

# 波束量子力学のススメ

Kenji Nishiwaki

(केंजी निशिवाकि ← Kendi Nishiwaki ←  
니시와키 겐지 ← 西脇 健二)

SHIV NADAR  
UNIVERSITY  
DELHI NCR



# 経歴



- ✓ 学部 (2002—2006) @ 神戸大学
- ✓ 修士過程 (2006—2008) @ 神戸大学
- ✓ 博士過程 (2008—2011) @ 神戸大学

Ph.D. 指導教員: 林青司教授 (Prof. C.S.Lim)



- ✓ PD (Oct. 2011—Sep. 2014) @ Harish-Chandra Research Institute (India)
- ✓ PD (Oct. 2014—Sep. 12 2018) @ KIAS (South Korea)
- ✓ PD (Sep. 14 2018—Oct. 31 2019) @ Ruđer Bošković Institute (Croatia)
- ✓ Asst. Prof. (Nov. 4 2019—) @ Shiv Nadar University (India)



[ザグレブ, クロアチア]

[ソウル, 韓国]

# 尾田さんと今・昔



2009年8月(?)@富士山

# 尾田さんと今・昔



2022年7月上旬@吉祥寺

# デリー(インドの首都)

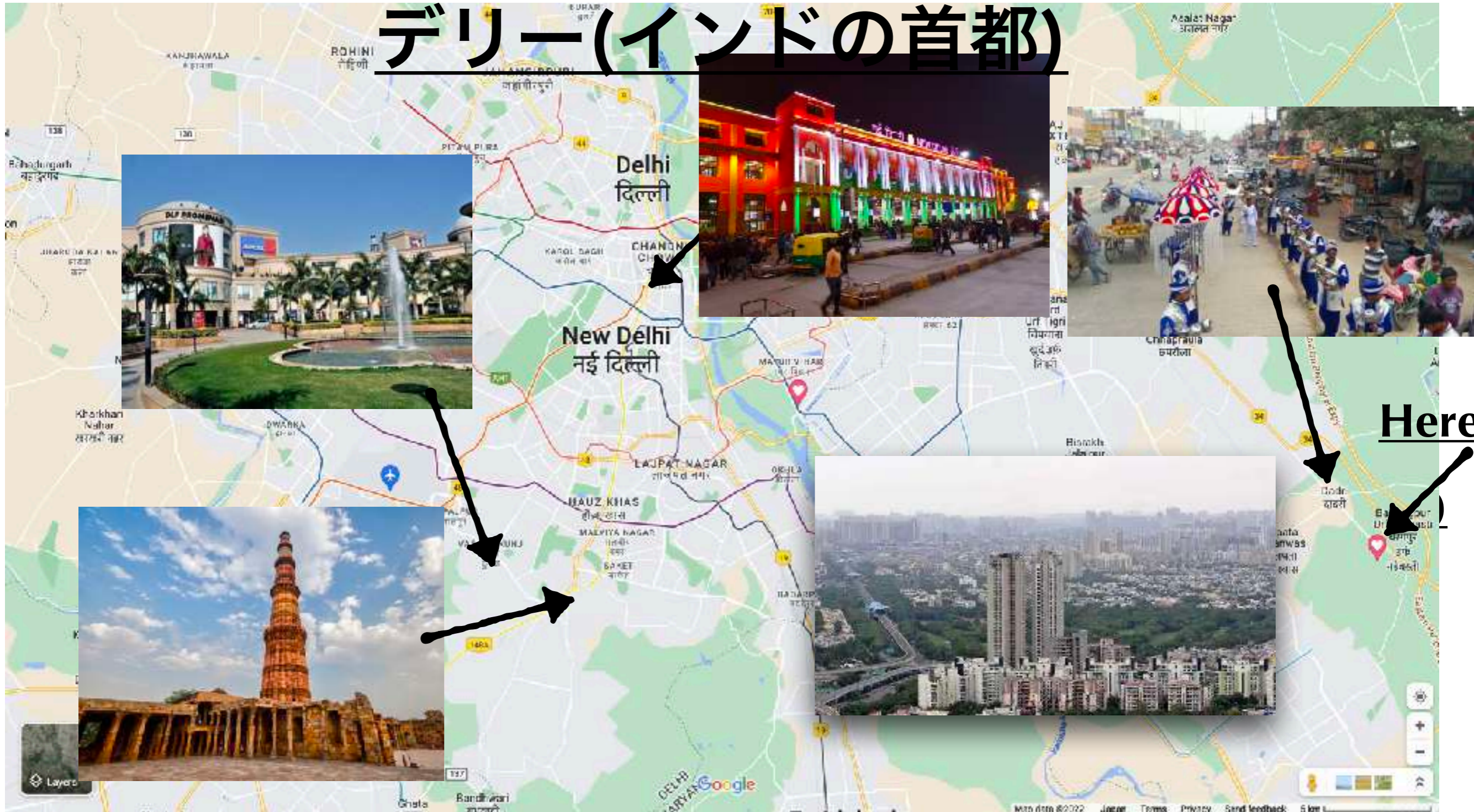


Here



[pictures from the web]

# デリー(インドの首都)



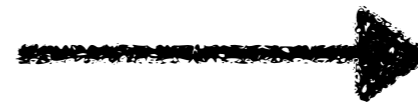
[pictures from the web]

インドはIT大国として有名ですが、

**paytm** (2010-)



技術提供



  
**PayPay**  
(2018-)

# 教育にも力をいれているようです。

[faculty members of  
our Department of Physics] (2012-)

(更に人数を増やすという噂が・・・)



**Dr. Sankar Dhar**  
Professor and Head  
Office: A021 Extn: 804  
sankar.dhar@snu.edu.in



**Dr. Bijan Bagchi**  
Professor  
Office: A023H  
bijan.bagchi@snu.edu.in



**Dr. Alok Kanjilal**  
Professor  
Office: A017A Extn: 124  
aloke.kanjilal@snu.edu.in



**Dr. Susanta Sinha Roy**  
Professor  
Office: R005C Extn: 860  
susanta.roy@snu.edu.in



**Dr. Priya Johari**  
Professor  
Office: 023G Extn: 206  
priya.johari@snu.edu.in



**Dr. Samarendra Singh**  
Associate Professor  
Office: R006-E Extn: 218  
samarendra.singh@snu.edu.in



**Dr. Syed Kamil**  
Assistant Professor  
Office: A017D Extn: 214  
kamil.syed@snu.edu.in



**Dr. Kenji Nishiwaki**  
Assistant Professor  
Office: A021 Extn: 375  
kenji.nishiwaki@snu.edu.in



**Dr. Subhra Sen Gupta**  
Assistant Professor  
Office: A023-J Extn: 361  
subhra.sengupta@snu.edu.in



**Dr. Santosh Kumar**  
Associate Professor  
Office: A023K Extn: 296  
santosh.kumar@snu.edu.in



**Dr. Sojal Ghosh**  
Associate Professor  
Office: A017D Extn: 480  
sojal.ghosh@snu.edu.in



**Dr. Bhaskar Kaviraj**  
Assistant Professor  
Office: Department of Physics,  
School of Natural Sciences  
bhaskar.kaviraj@snu.edu.in

(この中に一人、  
non-Indian citizen がいる!)



**Dr. Arindam Chatterjee**  
Assistant Professor  
Extn: 193  
arindam.chatterjee@snu.edu.in



**Dr. Mayukh Majumder**  
Assistant Professor  
Office: R-004C Extn: 362  
mayukh.majumder@snu.edu.in

(+ Dr. Rana Nandi が  
数日前に  
Assistant Professor  
として着任:

専門: 天体物理、中性子星)

[pictures from the web]

# 教育にも力をいれているようです。

[faculty members of  
our Department of Physics] (2012-)

(更に人数を増やすという噂が・・・)



**Dr. Sankar Dhar**  
Professor and Head  
Office: A021 Extn: 804  
sankar.dhar@snu.edu.in



**Dr. Bijan Bagchi**  
Professor  
Office: A023H  
bijan.bagchi@snu.edu.in



**Dr. Alok Kanjilal**  
Professor  
Office: A017A Extn: 124  
alok.kanjilal@snu.edu.in



**Dr. Susanta Sinha Roy**  
Professor  
Office: R005C Extn: 863  
susanta.roy@snu.edu.in



**Dr. Priya Johari**  
Professor  
Office: 023G Extn: 206  
priya.johari@snu.edu.in



**Dr. Samarendra Singh**  
Associate Professor  
Office: R006-E Extn: 218  
samarendra.singh@snu.edu.in



**Dr. Syed Kamil**  
Assistant Professor  
Office: A017D Extn: 224  
kamil.syed@snu.edu.in



**Dr. Kenji Nishiwaki**  
Assistant Professor  
Office: A021 Extn: 375  
kenji.nishiwaki@snu.edu.in



**Dr. Subhra Sen Gupta**  
Assistant Professor  
Office: A023-J Extn: 381  
subhra.sengupta@snu.edu.in



**Dr. Santosh Kumar**  
Associate Professor  
Office: A023K Extn: 296  
santosh.kumar@snu.edu.in



**Dr. Sojal Ghosh**  
Associate Professor  
Office: A017D Extn: 480  
sojal.ghosh@snu.edu.in



**Dr. Bhaskar Kaviraj**  
Assistant Professor  
Office: Department of Physics,  
School of Natural Sciences

おまけその一

**実験屋 v.s. 理論屋**



**Dr. Arindam Chatterjee**  
Assistant Professor  
Extn: 193  
arindam.chatterjee@snu.edu.in



**Dr. Mayukh Majumder**  
Assistant Professor  
Office: R-004C Extn: 362  
mayukh.majumder@snu.edu.in

(+ **Dr. Rana Nandi** が

数日前に

Assistant Professor

として着任:

専門: 天体物理、中性子星)

[pictures from the web]

# 教育にも力をいれているようです。

[faculty members of  
our Department of Physics] (2012-)

(更に人数を増やすという噂が・・・)



**Dr. Sankar Dhar**  
Professor and Head  
Office: A021 Extn: 804  
sankar.dhar@snu.edu.in



**Dr. Bijan Bagchi**  
Professor  
Office: A023H  
bijan.bagchi@snu.edu.in



**Dr. Alok Kanjilal**  
Professor  
Office: A017A Extn: 124  
alok.kanjilal@snu.edu.in



**Dr. Susanta Sinha Roy**  
Professor  
Office: R005C Extn: 863  
susanta.roy@snu.edu.in



**Dr. Priya Johari**  
Professor  
Office: 023G Extn: 206  
priya.johari@snu.edu.in



**Dr. Samarendra Singh**  
Associate Professor  
Office: R006-E Extn: 218  
samarendra.singh@snu.edu.in



**Dr. Syed Kamil**  
Assistant Professor  
Office: A017D Extn: 214  
kamil.syed@snu.edu.in



**Dr. Kenji Nishiwaki**  
Assistant Professor  
Office: A021 Extn: 375  
kenji.nishiwaki@snu.edu.in



**Dr. Subhra Sen Gupta**  
Assistant Professor  
Office: A023-J Extn: 351  
subhra.sengupta@snu.edu.in



**Dr. Santosh Kumar**  
Associate Professor  
Office: A023K Extn: 295  
santosh.kumar@snu.edu.in



**Dr. Sojal Ghosh**  
Associate Professor  
Office: A017D Extn: 480  
sojal.ghosh@snu.edu.in



**Dr. Bhaskar Kaviraj**  
Assistant Professor  
Office: Department of Physics,  
School of Natural Sciences

おまけその二

物性 v.s. 素粒子+宇宙



**Dr. Arindam Chatterjee**  
Assistant Professor  
Extn: 193  
arindam.chatterjee@snu.edu.in



**Dr. Mayukh Majumder**  
Assistant Professor  
Office: R-004C Extn: 362  
mayukh.majumder@snu.edu.in

(+ Dr. Rana Nandi が

数日前に

Assistant Professor

として着任:

専門: 天体物理、中性子星)

[pictures from the web]

# 第一部:

# 背景の理解と何を議論したいかの 説明

(学部4年生向け、~30分)

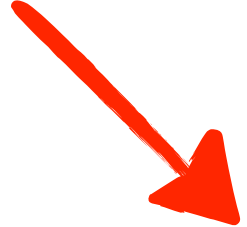
本日の話のキーワード



# 波束量子力学



波(の)束 (wave packet)



分子・原子といった  
この世の中のミクロな構造を  
記述する為の言語・方法論  
(Quantum Theory)

本日の話のキーワード

# 波束量子力学

波(の)束 (wave packet)

色々な波を束状に集めると、  
どんな形も表現できる。

分子・原子といった

この世の中のミクロな構造を  
記述する為の言語・方法論  
(Quantum Theory)

物理学(Physics)は、  
初めこの世のマクロな構造(身の回りの世界)  
を理解することから始まった。  
[古典理論 (Classical Theory)]

本日の話のキーワード

# 波束量子力学

波(の)束 (wave packet)

分子・原子といった

この世の中のミクロな構造を

記述する為の言語・方法論

(Quantum Theory)

本日の話の

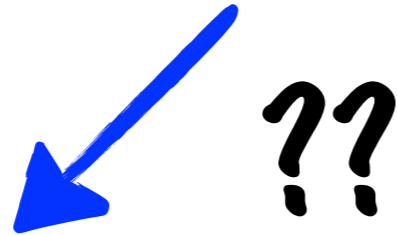
メイン・テーマ

どんな形状のミクロな構造でも

正確に記述できる方法論!

本日の話のキーワード

# 波束量子力学



波(の)束 (wave packet)



色々な波を束状に集めると、  
どんな形も表現できる。

分子・原子といった  
この世の中のミクロな構造を  
記述する為の言語・方法論  
(Quantum Theory)

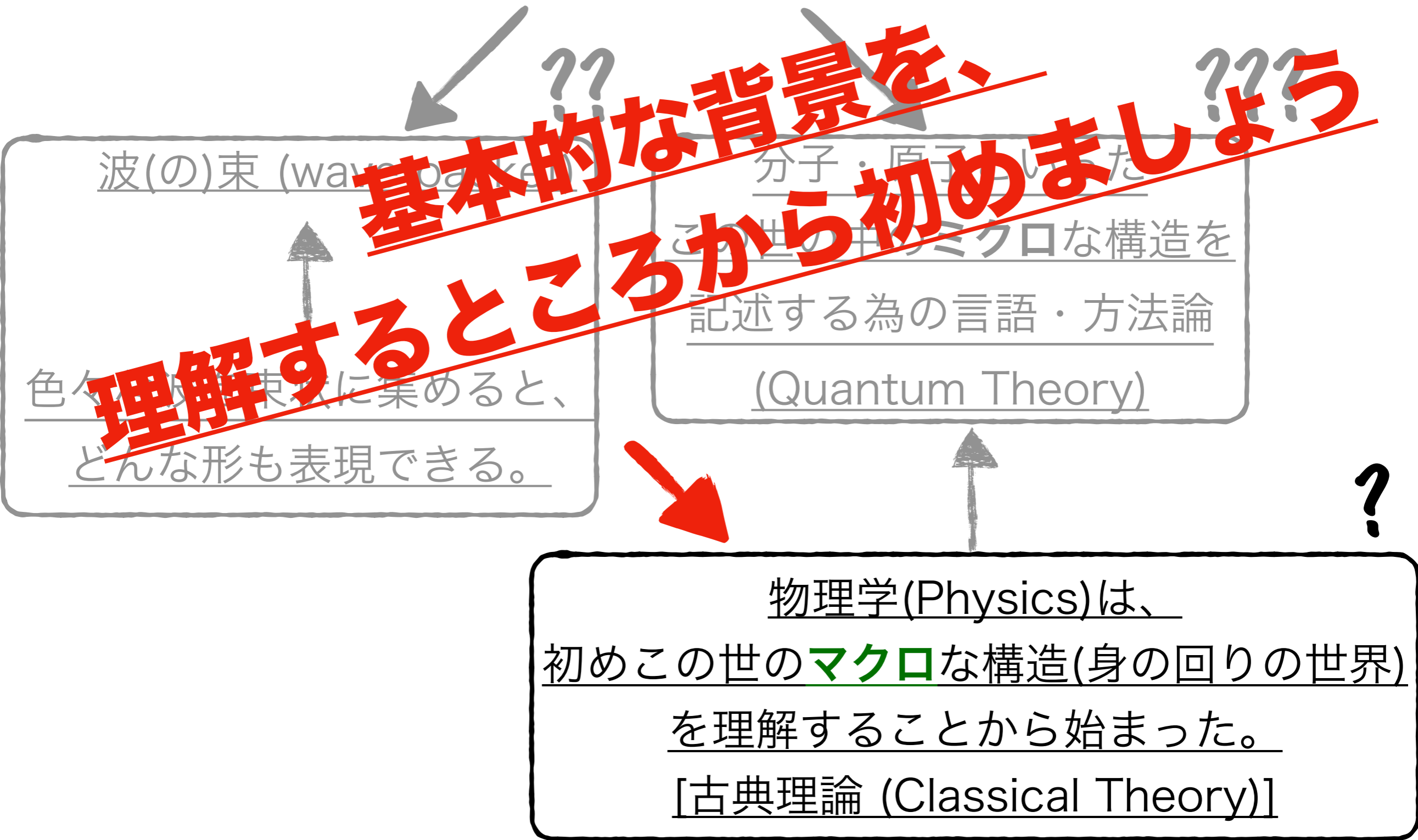


物理学(Physics)は、  
初めこの世のマクロな構造(身の回りの世界)  
を理解することから始まった。  
[古典理論 (Classical Theory)]

?

本日の話のキーワード

# 波束量子力学

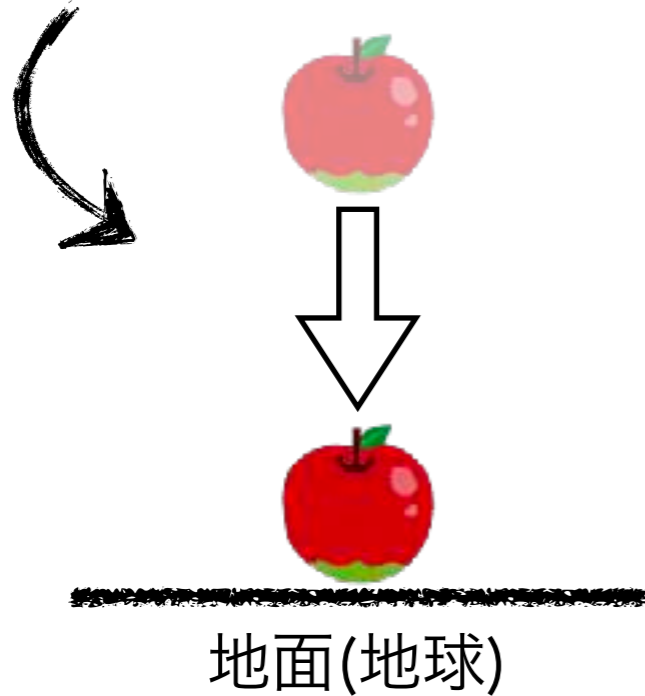


- 古典物理(マクロな身の回りの世界を記述する理論)
  - ⇒ マクロな物の動きの記述 [古典力学 (Classical Mechanics)]

□ 古典物理(マクロな身の回りの世界を記述する理論)

⇒ マクロな物の動きの記述 [古典力学 (Classical Mechanics)]

例えば...



地上で手を話すと、  
物体(りんご)は下に落ちる

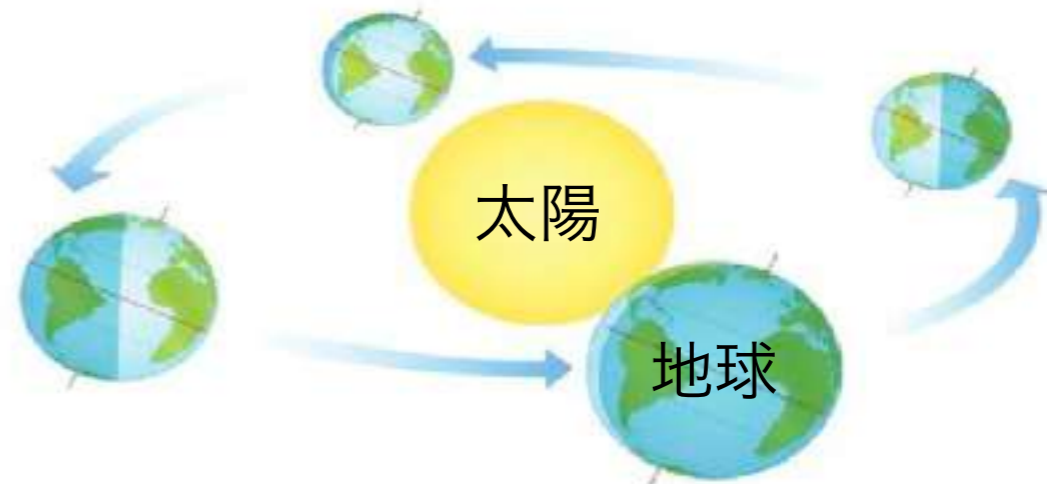
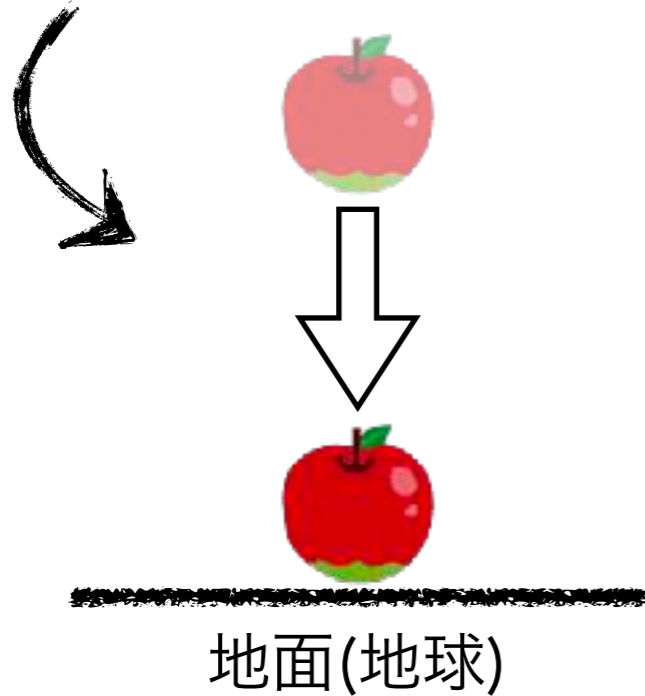


地球は太陽の周りを  
周回している

□ 古典物理(マクロな身の回りの世界を記述する理論)

⇒ マクロな物の動きの記述 [古典力学 (Classical Mechanics)]

例えば...



りんごの速度 (velocity)  
(向きのある量 [=ベクトル])

速度が変化する度合い  
(向きのある量 [=ベクトル])

$$m_{\text{apple}} \frac{dv_{\text{apple}}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{apple}}$$

$$m_{\text{Earth}} \frac{dv_{\text{Earth}}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{Earth}}$$

りんごの質量 (mass)  
=(物体の動きにくさ) (time)  
≒ (物体の重さ)

時間  
(time)

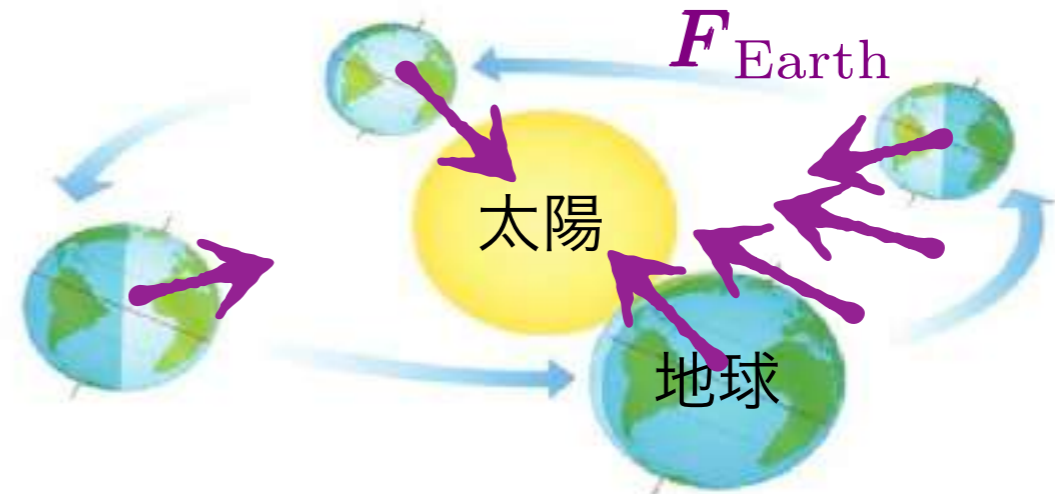
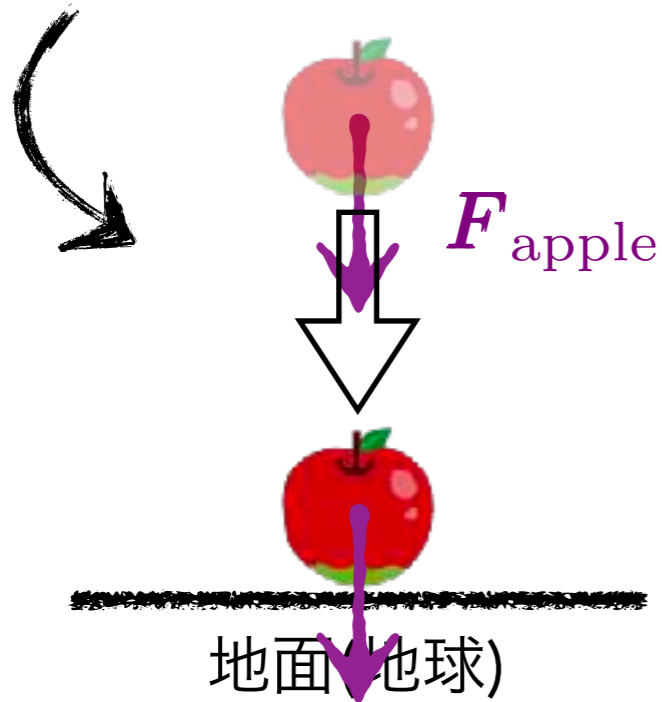
りんごにかかる  
力 (force)

ニュートンの運動方程式が、  
物の動きを支配する!

□ 古典物理(マクロな身の回りの世界を記述する理論)

⇒ マクロな物の動きの記述 [古典力学 (Classical Mechanics)]

例えば...

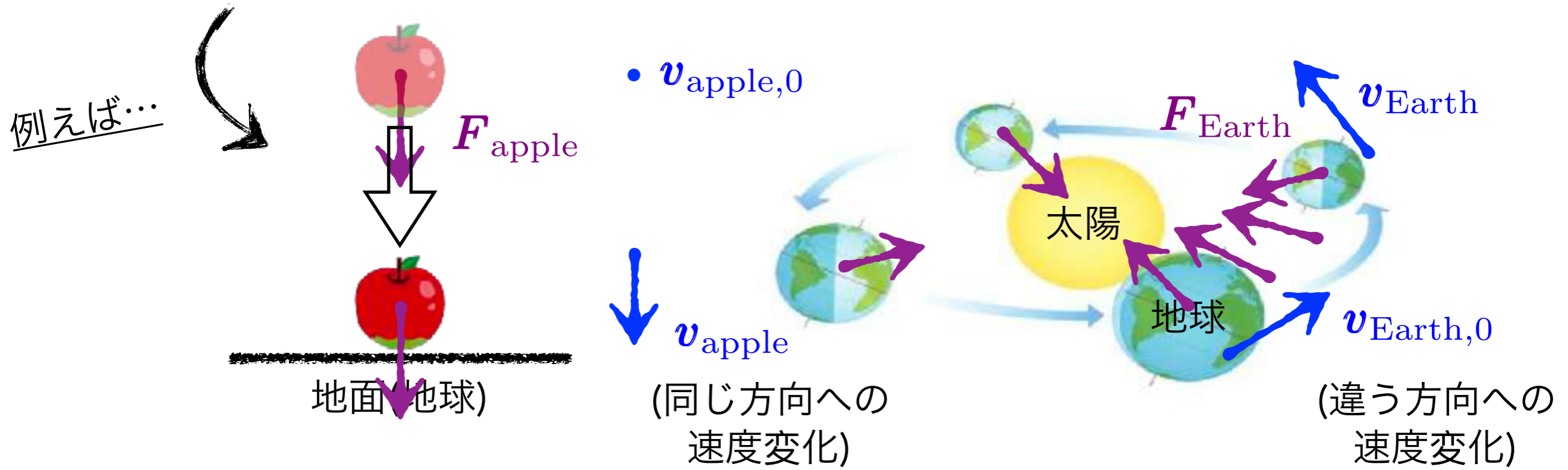


物質間に引力が働くと考えると、

$$m_{\text{apple}} \frac{dv_{\text{apple}}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{apple}}$$

$$m_{\text{Earth}} \frac{dv_{\text{Earth}}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{Earth}}$$

- 古典物理(マクロな身の回りの世界を記述する理論)
  - ⇒ マクロな物の動きの記述 [古典力学 (Classical Mechanics)]

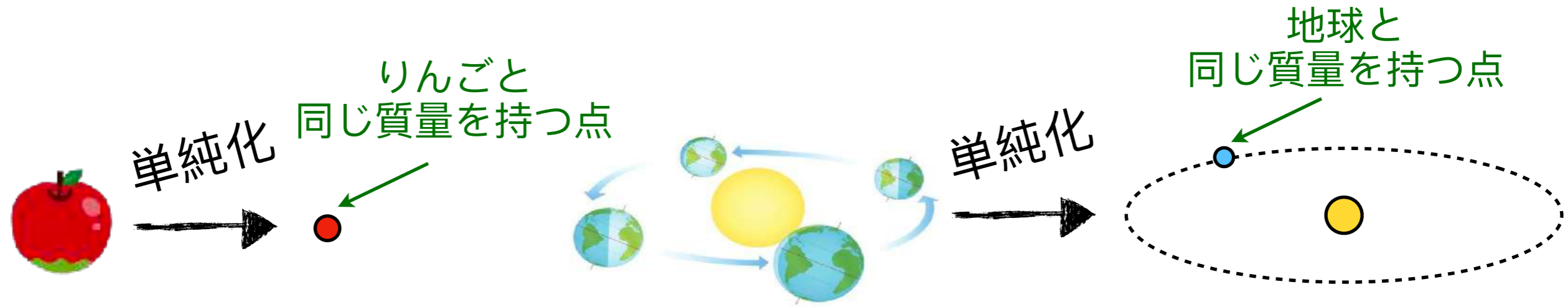


物質間に引力が働くと考えると、

$$m_{\text{apple}} \frac{dv_{\text{apple}}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{apple}} \qquad m_{\text{Earth}} \frac{dv_{\text{Earth}}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{Earth}}$$

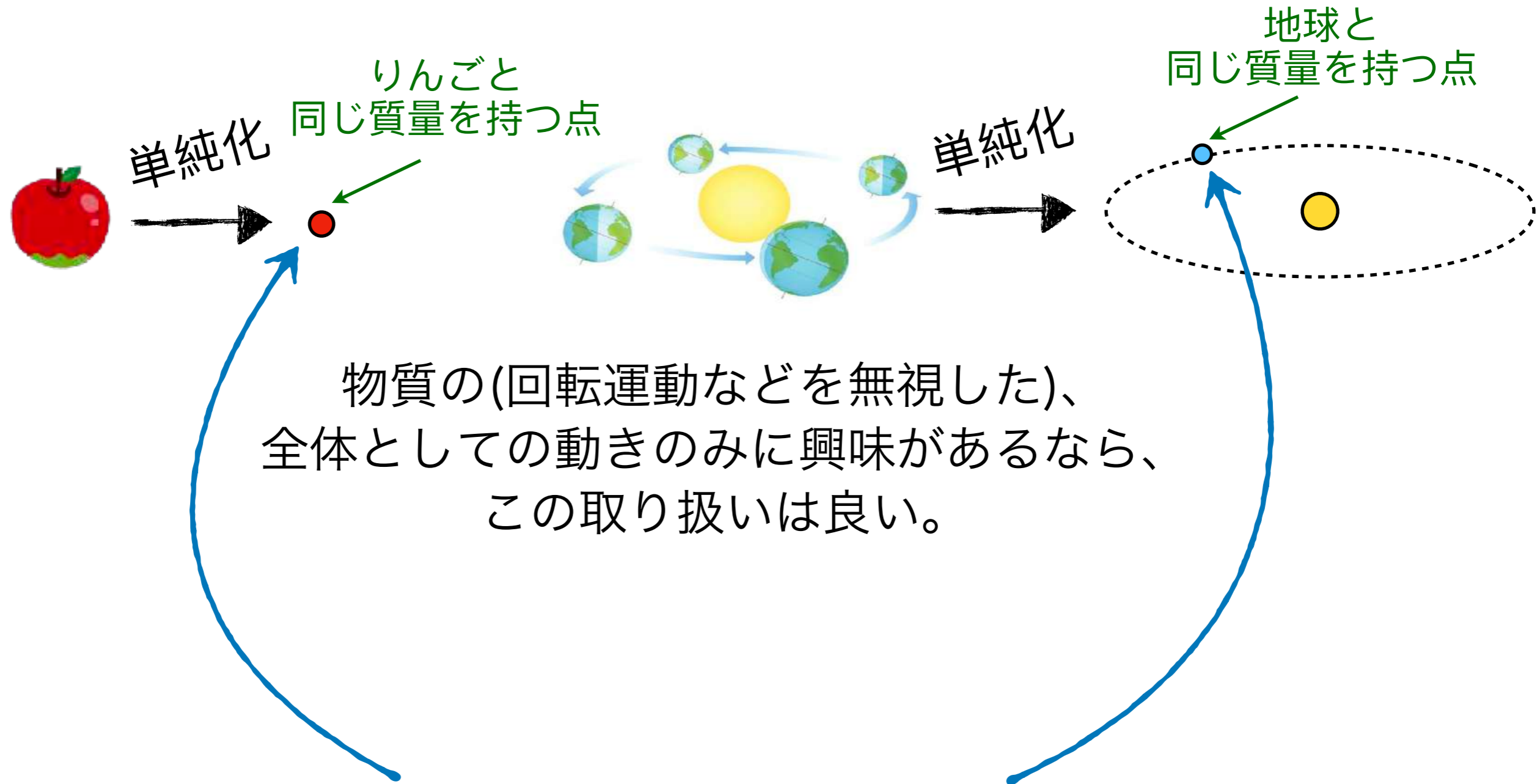
両者の運動は統一的に理解できる!

実は、ここで以下の近似を使用した。



物質の(回転運動などを無視した)、  
全体としての動きのみに興味があるなら、  
この取り扱いは良い。

実は、ここで以下の近似を使用した。



物質の(回転運動などを無視した)、  
全体としての動きのみに興味があるなら、  
この取り扱いは良い。

このような理想的に考えた物体のことを、  
(古典的な) **粒子(particle)**と呼ぶ。

本日の話のキーワード

# 波束量子力学

波(の)束 (wave packet)



色々な波を束状に集めると、  
どんな形も表現できる。

分子・原子といった  
この世の中のミクロな構造を  
記述する為の言語・方法論  
(Quantum Theory)

物理学(Physics)は、  
初めこの世のマクロな構造(身の回りの世界)  
を理解することから始まった。  
[古典理論 (Classical Theory)]

Done!

皆様、海で(水の)波をご覧になったことがあるかと思います。



皆様、海で(水の)波をご覧になったことがあるかと思います。



この現象は、以下のように明文化できます。  
波とは、**広がった「物体」(媒質, 今は水)**の分布パターンが、ある方向に伝搬していく現象である。



皆様、海で(水の)波をご覧になったことがあるかと思います。



この現象は、以下のように明文化できます。  
波とは、広がった「物体」(媒質, 今は水)の分布パターンが、ある方向に伝搬していく現象である。

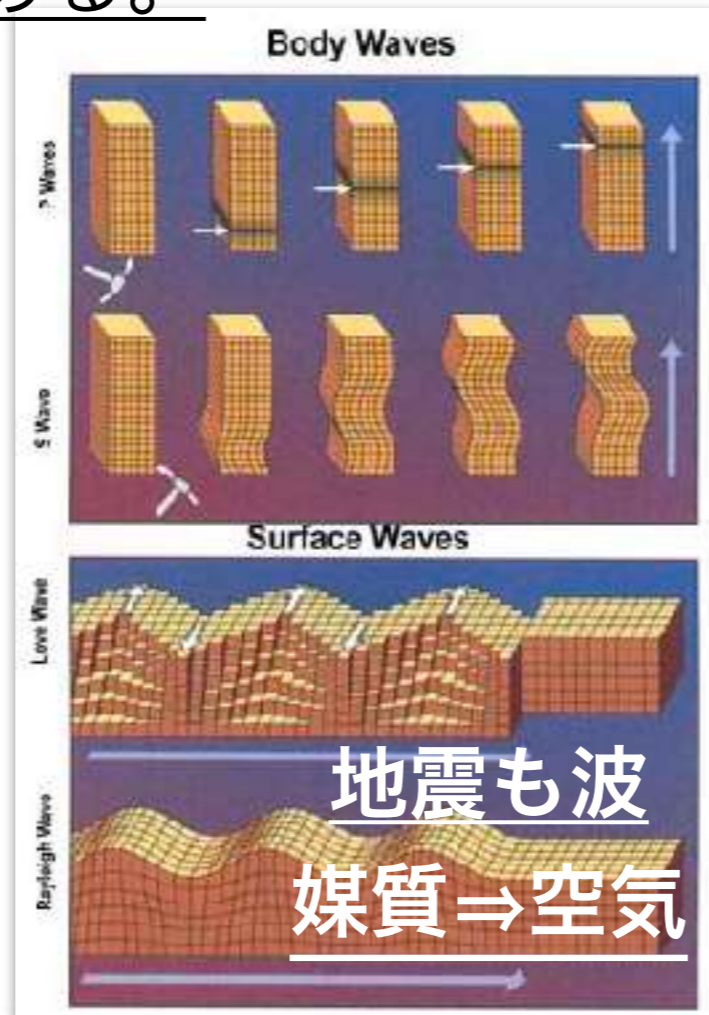


媒質⇒水



音も波

媒質⇒空気



地震も波

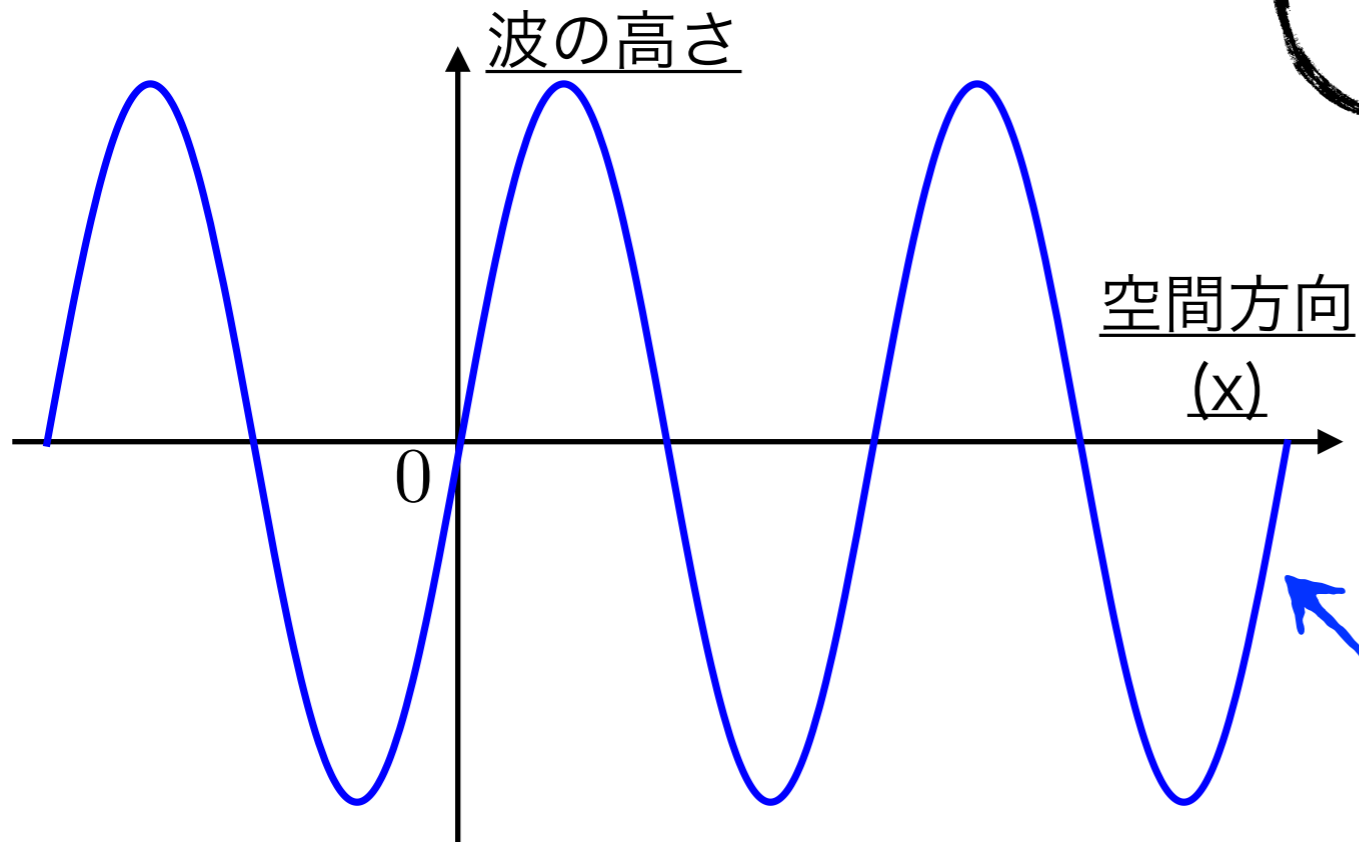
媒質⇒空気



光も波

媒質⇒「真空」

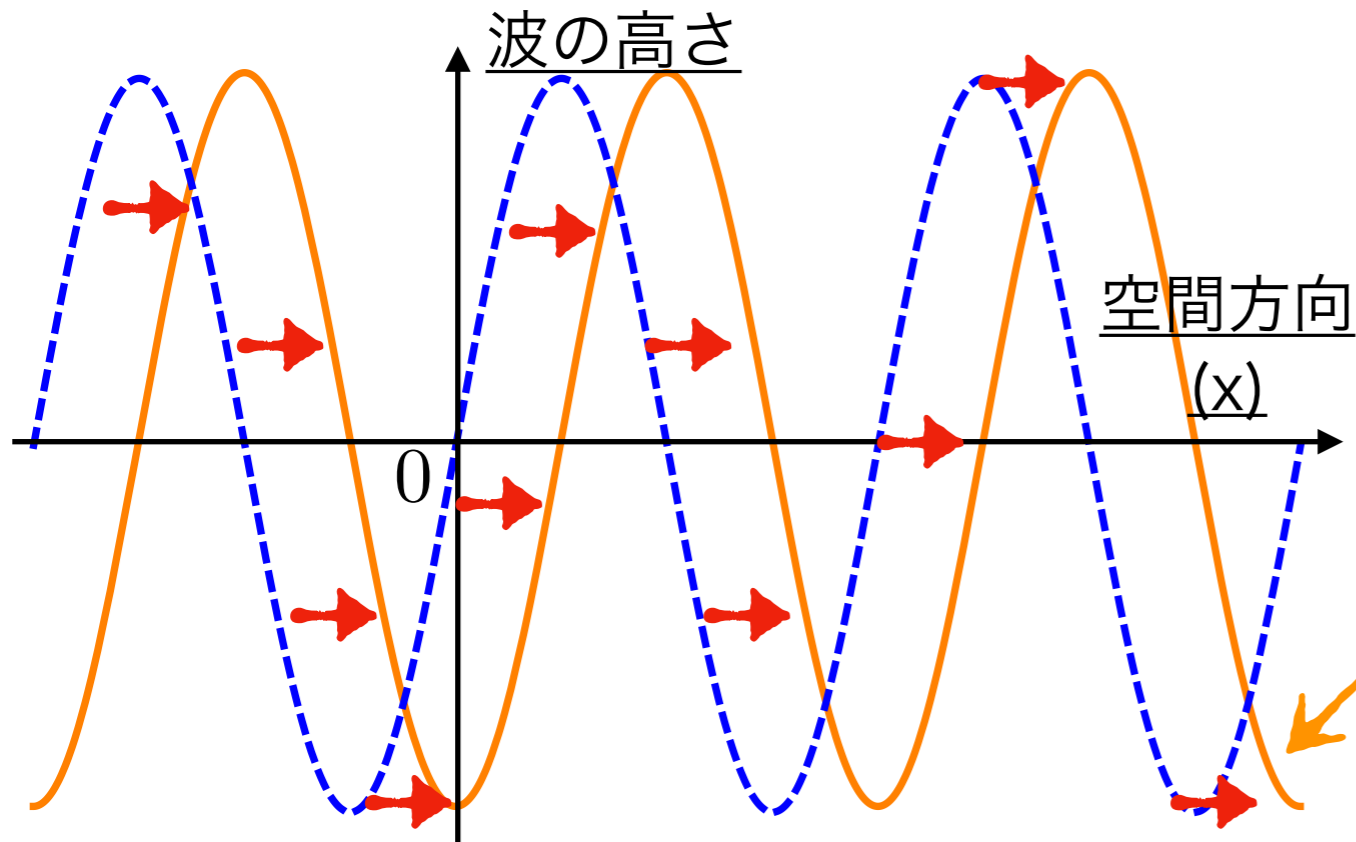
伝搬方向を一方向に定めて、一番単純な場合を詳しく見てみましょう。



三角関数(sin or cos)一つで  
表せる場合。

時刻  $t=0$  での波の配位

伝搬方向を一方向に定めて、一番単純な場合を詳しく見てみましょう。

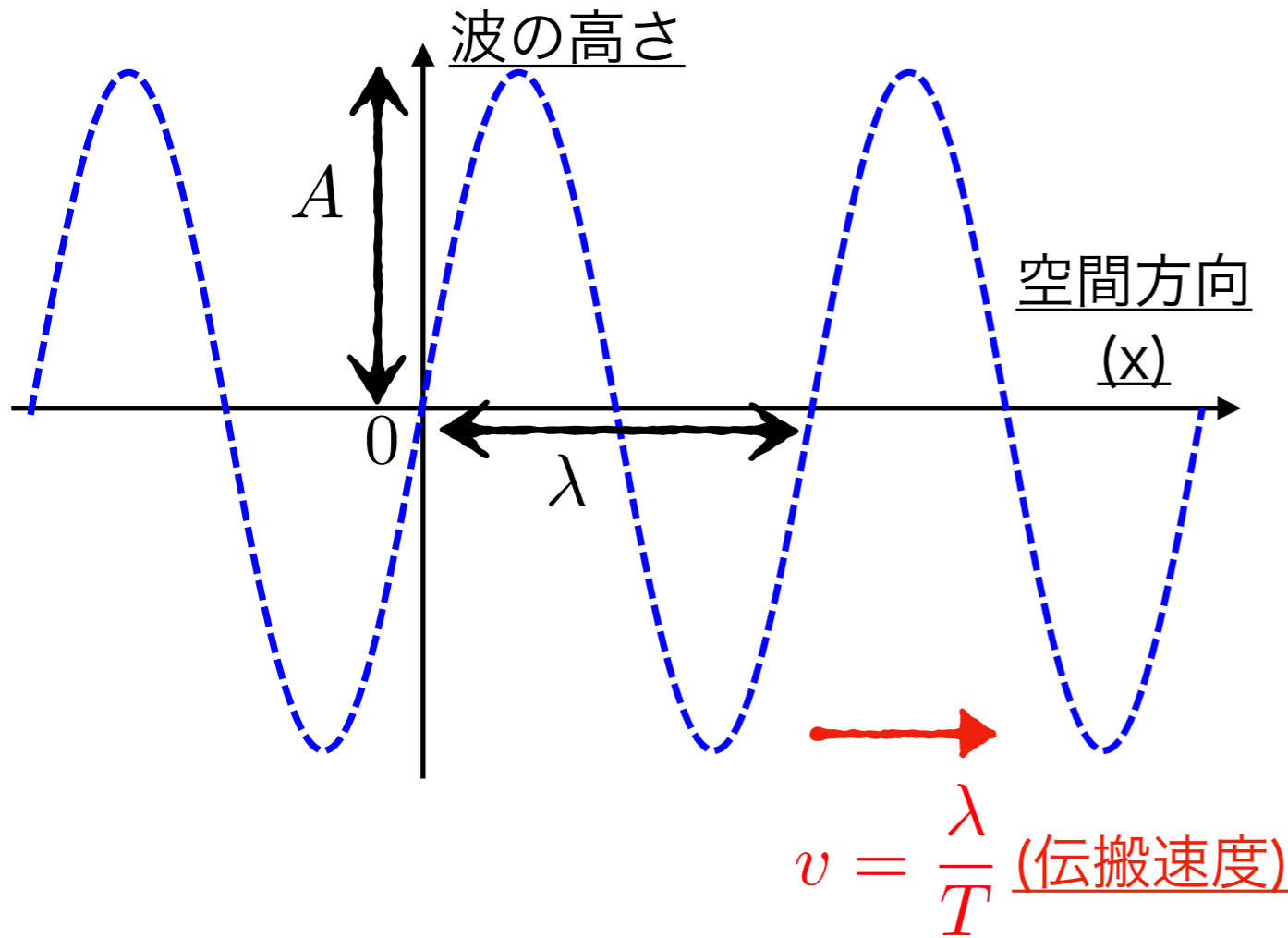


ある後の時刻  $t(>0)$  での波の配位

$$\sin(x - vt)$$

[t時間の中に動いた距離]=  
 $v$ (波の伝搬速度)  $\times t$

伝搬方向を一方向に定めて、一番単純な場合を詳しく見てみましょう。



$$A \times \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t (+\alpha) \right)$$

↑ **振幅**      ↑ **波長 =**  
[最小パターンの長さ]

↑ **位相**

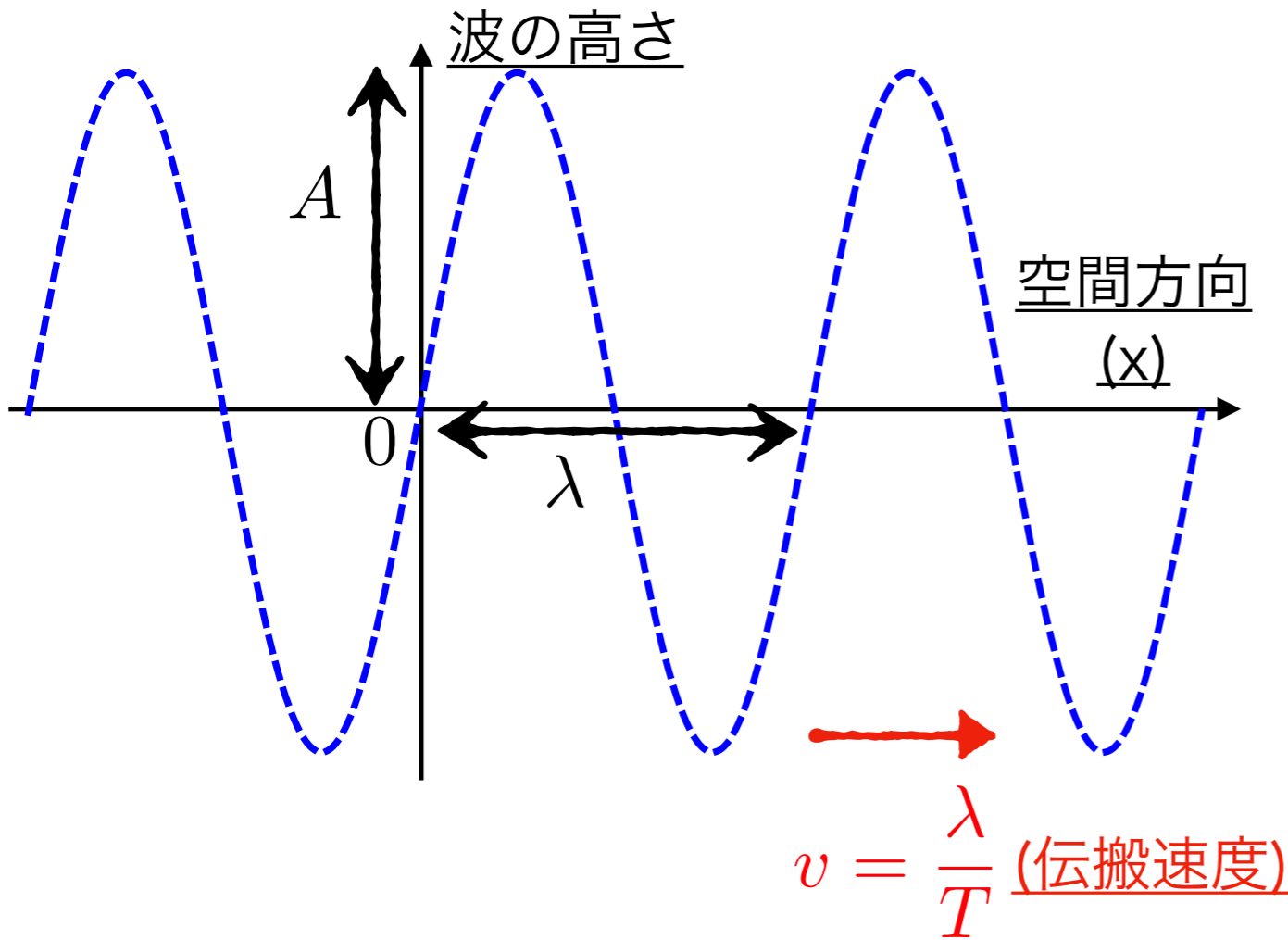
↘ **周期 =**  
[一波長分進むのにかかる時間]

$$A \times \sin (kx - \omega t (+\alpha))$$

○  $k := \frac{2\pi}{\lambda}$       **波数 =**  
[単位長さあたりのパターンの数]/(2π)

○  $\omega := \frac{2\pi}{T}$       **角振動数 =**  
[単位時間あたりに何波長進むか]/(2π)

伝搬方向を一方向に定めて、一番単純な場合を詳しく見てみましょう。



$$A \times \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t (+\alpha) \right)$$

↑ **振幅**      ↑ **波長 =**  
[最小パターンの長さ]

↑ **位相**  
↑ **周期 =**  
[一波長分進むのにかかる時間]

$$e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y)$$

オイラーの公式

$$A \times \text{Im} \left[ e^{i(kx - \omega t (+\alpha))} \right]$$

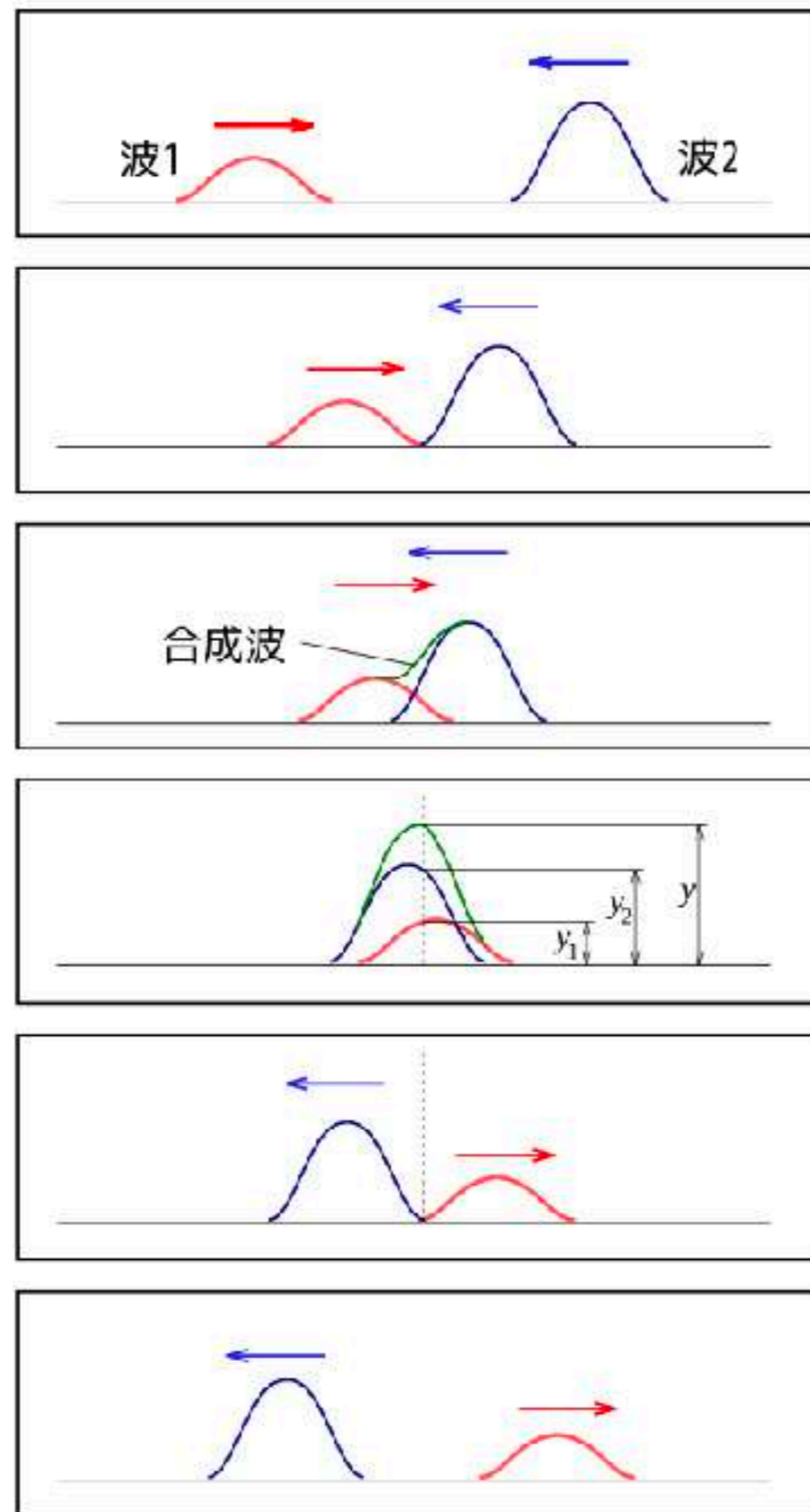
指数関数を使って表現できる。

$$A \times \sin (kx - \omega t (+\alpha))$$

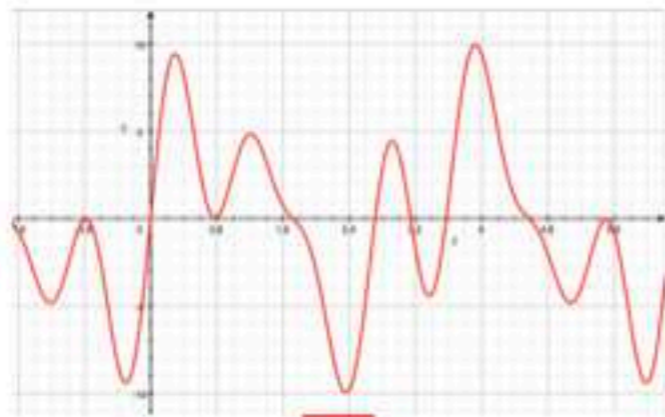
○  $k := \frac{2\pi}{\lambda}$       **波数 =**  
[単位長さあたりのパターンの数]/(2π)

○  $\omega := \frac{2\pi}{T}$       **角振動数 =**  
[単位時間あたりに何波長進むか]/(2π)

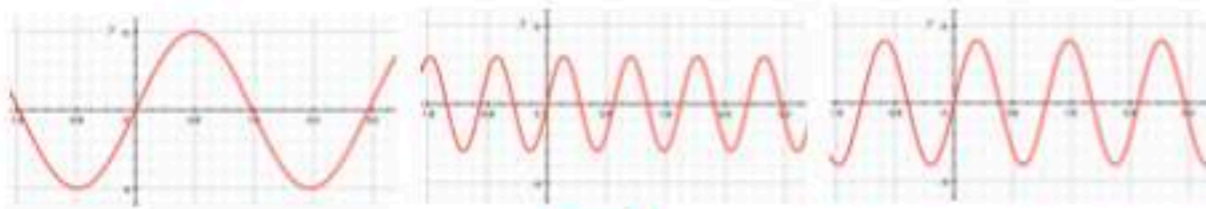
2つ以上の波のプロファイルは、それぞれの足し算で得られる。



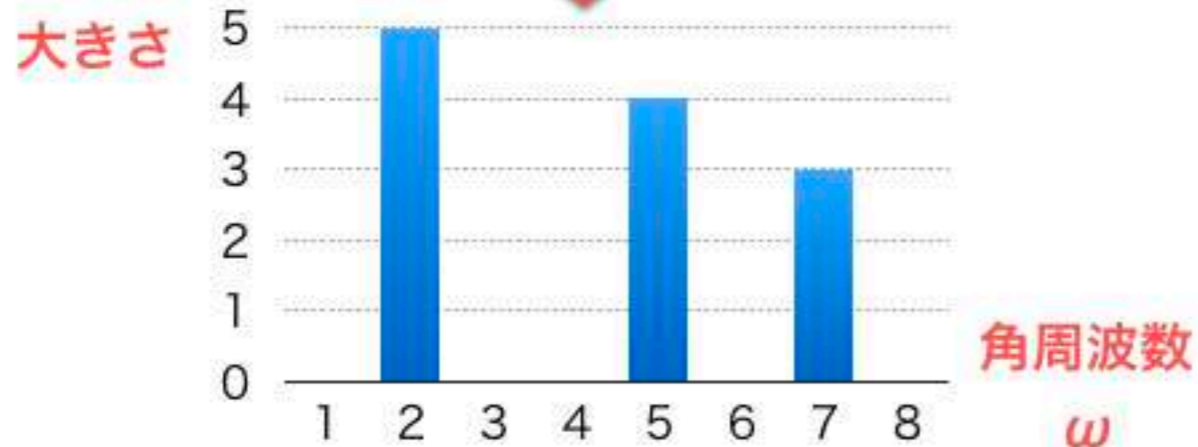
# フーリエ変換の流れ



複雑な波形が与えられる



単純なsin関数に分ける



それぞれのsin波の振幅を  
角周波数ごとにまとめる

本日の話のキーワード

# 波束量子力学

Done! ??

???

波(の)束 (wave packet)



色々な波を束状に集めると、  
どんな形も表現できる。

分子・原子といった

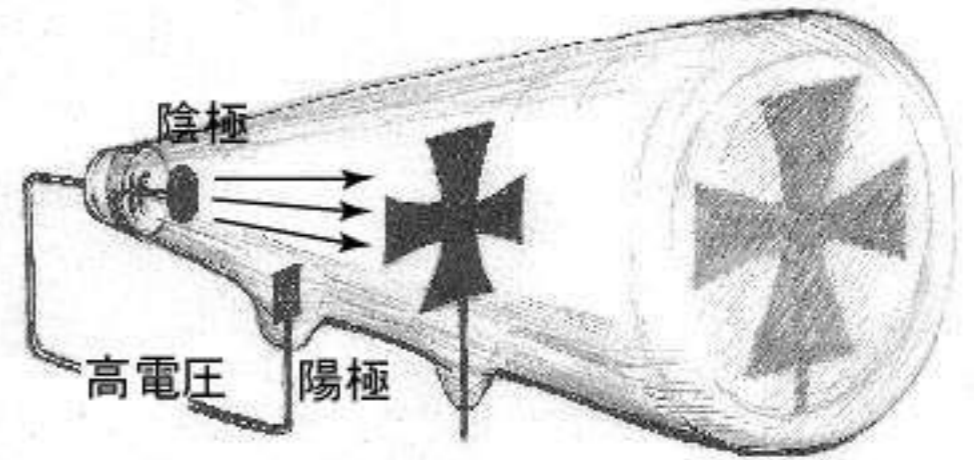
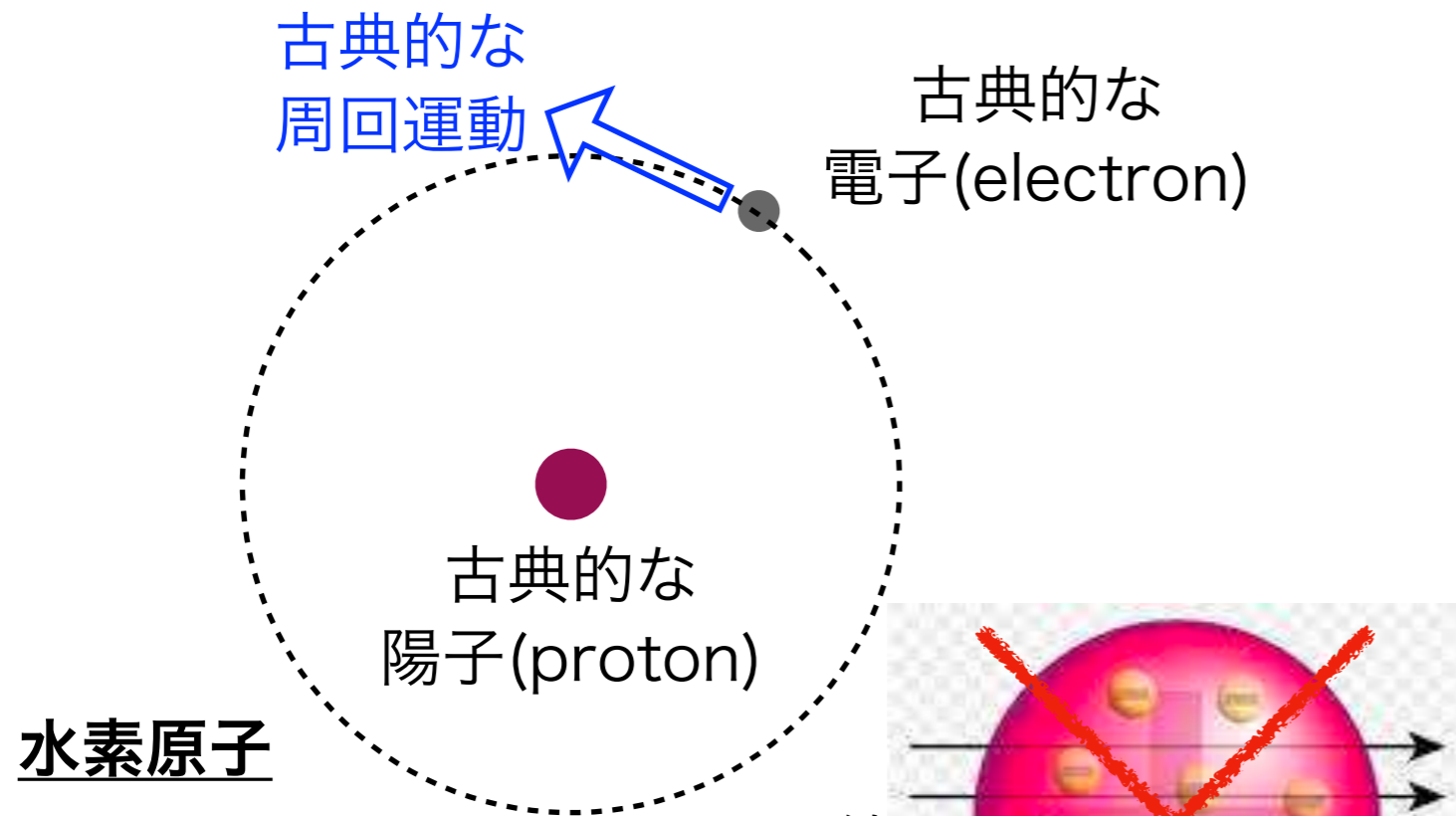
この世の中のミクロな構造を  
記述する為の言語・方法論  
(Quantum Theory)

Done! ?

物理学(Physics)は、

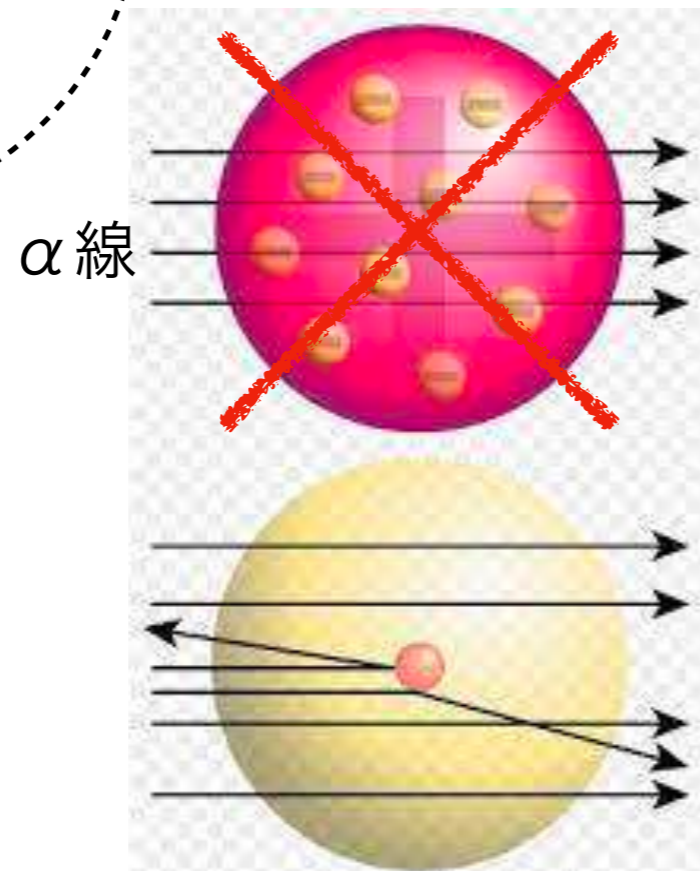
初めこの世のマクロな構造(身の回りの世界)  
を理解することから始まった。  
[古典理論 (Classical Theory)]

□ 20世紀初め頃までに、この世の元素は原子から構成されているという考えに人類はたどり着き、以下のような模型が具体的に考えられた。

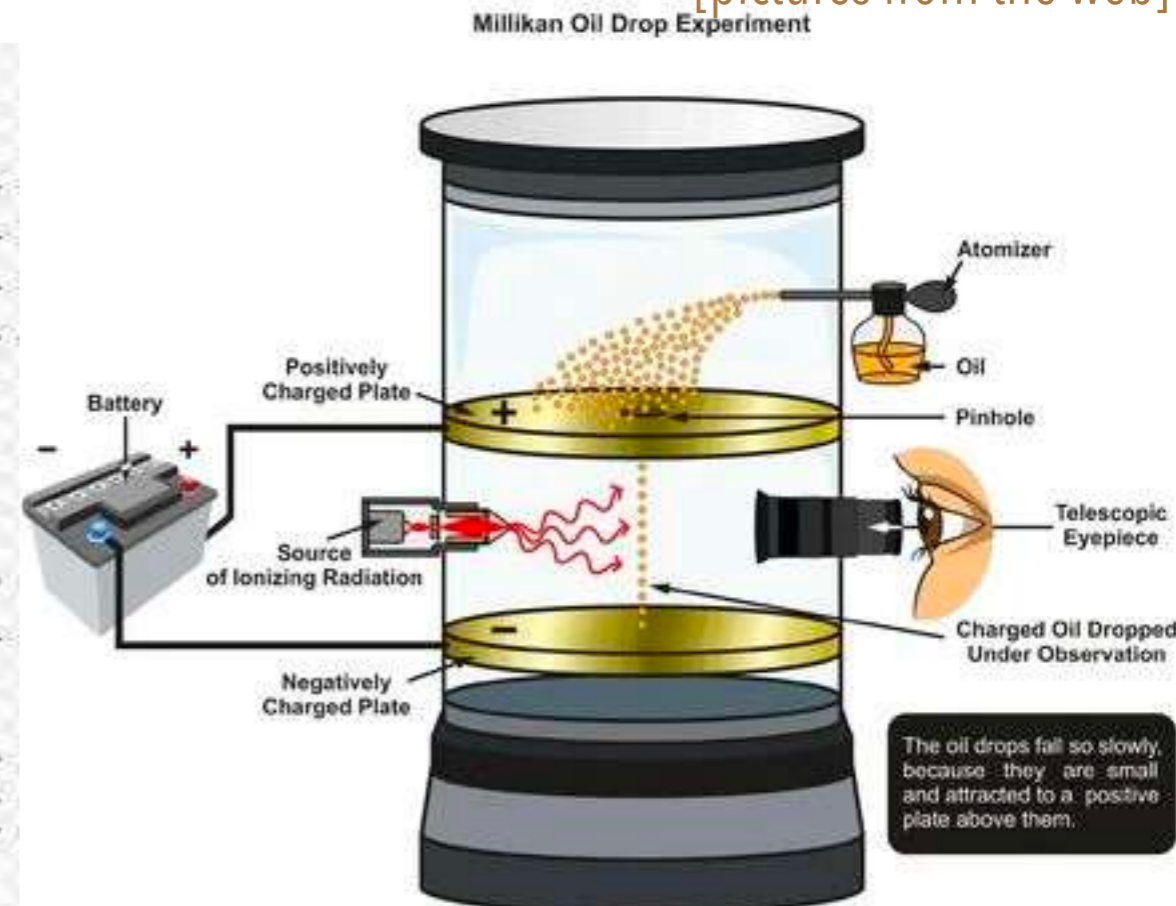


電子の発見 [J.J.トムソン (1897)]

[pictures from the web]

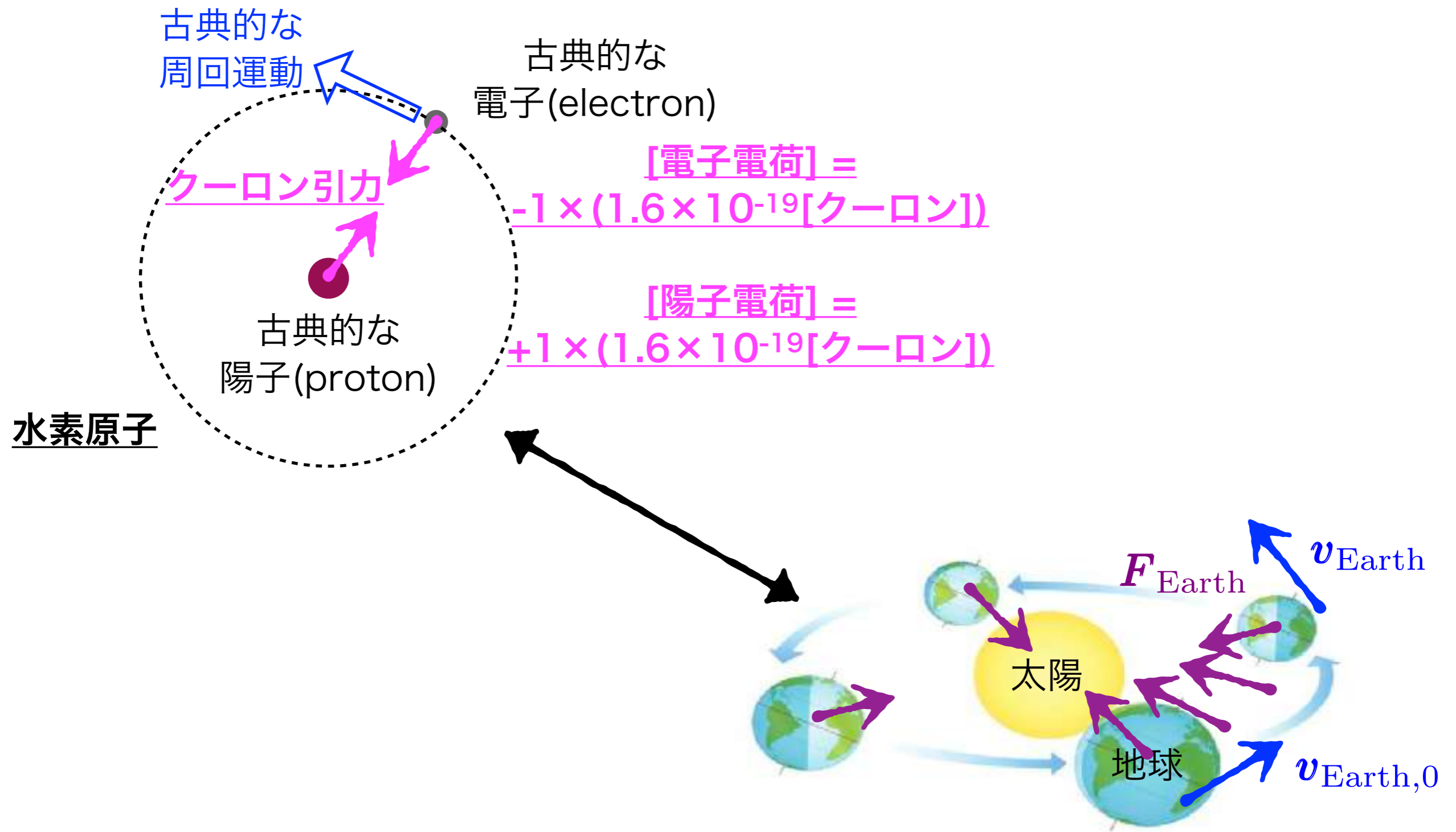


原子核の発見  
[E.ラザフォード (1911)]

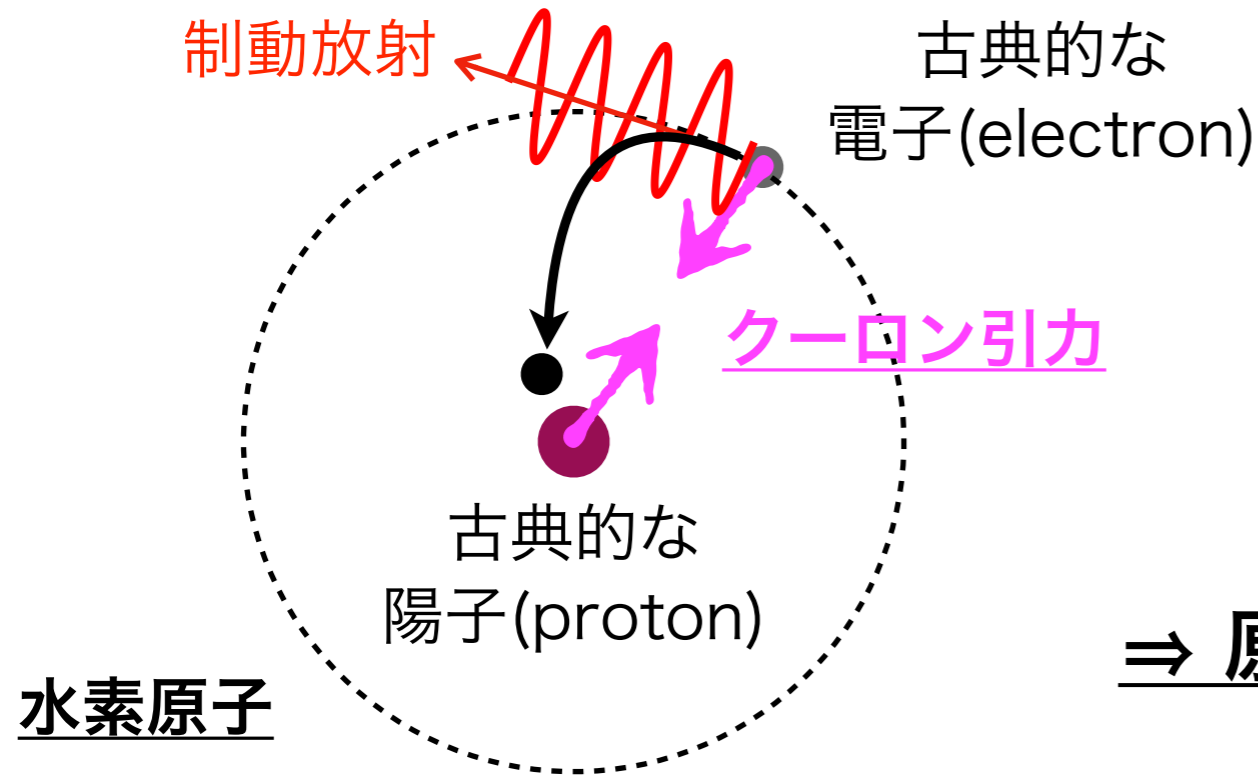


電子電荷の測定  
[R.A.ミリカン (1910)]

□ 20世紀初め頃までに、この世の元素は原子から構成されているという考えに人類はたどり着き、以下のような模型が具体的に考えられた。



- 20世紀初め頃までに、この世の元素は原子から構成されているという考えに人類はたどり着き、以下のような模型が具体的に考えられた。



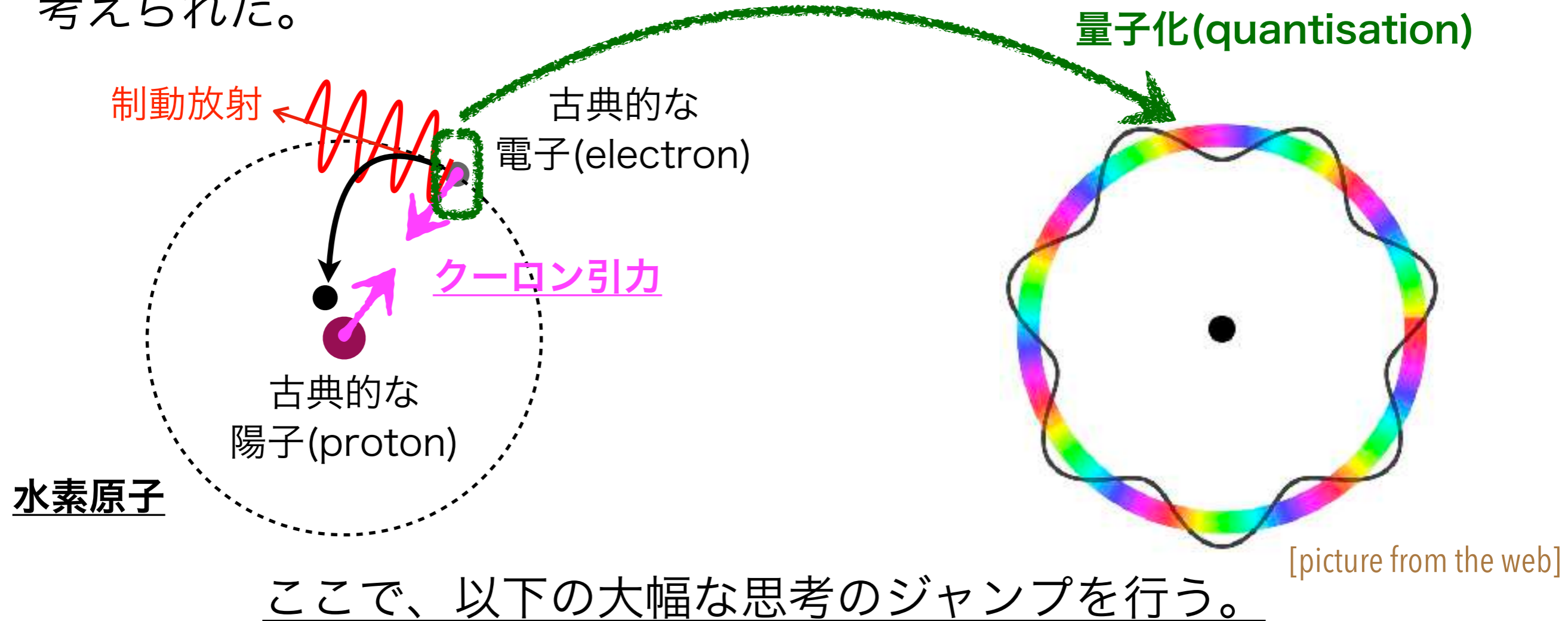
しかし、  
古典的な電磁気の理論によると、  
電磁波 (=光) の放出により、  
電子はエネルギーを即座に失う。

⇒ 原子は古典理論では不安定、記述不可!



原子・分子といった  
ミクロの世界の記述には、  
全く新しい方法論・言語が必要!!

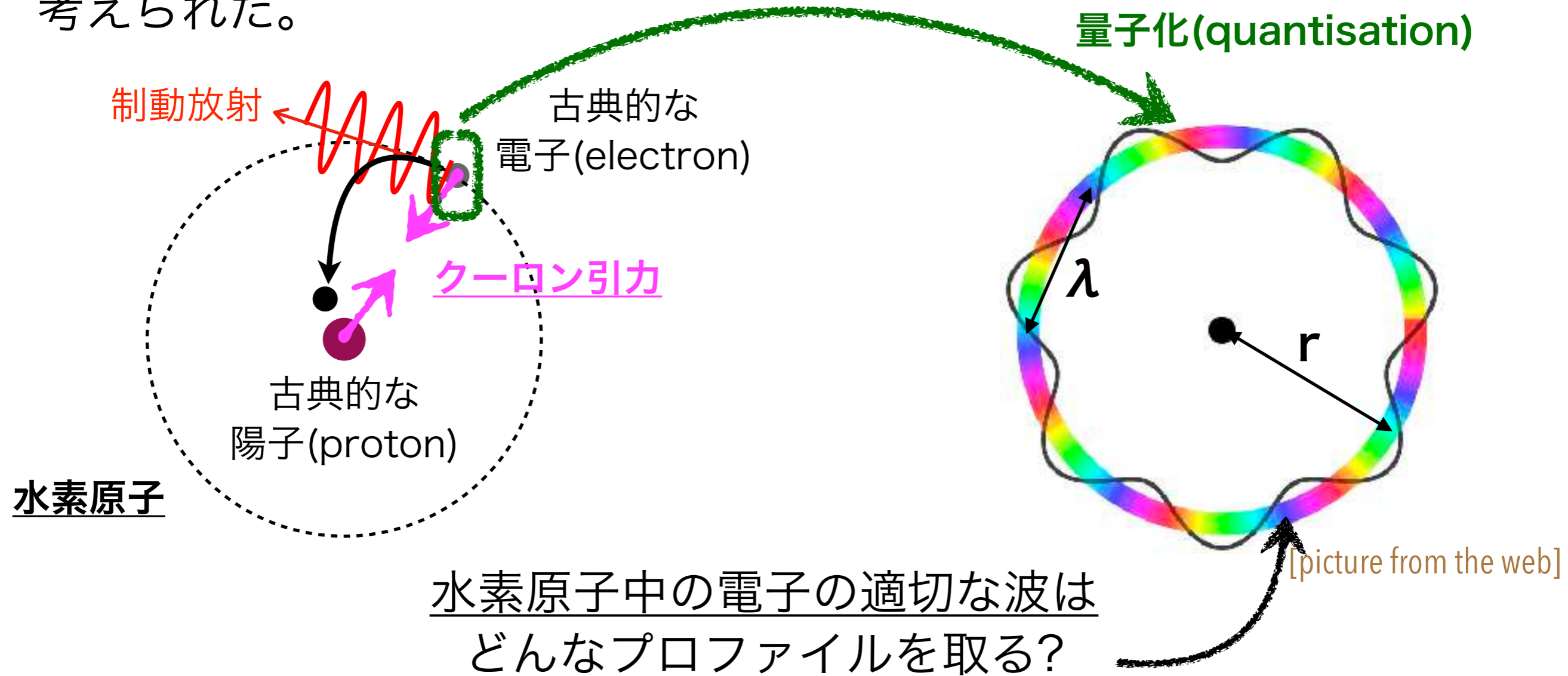
- 20世紀初め頃までに、この世の元素は原子から構成されているという考えに人類はたどり着き、以下のような模型が具体的に考えられた。



ミクロな粒子の空間プロファイルは、適切な波として表現されなければならない。

このアイディアの下に、ミクロな世界を記述する方法論・言語を量子論/力学 (quantum theory/mechanics) と呼ぶ。

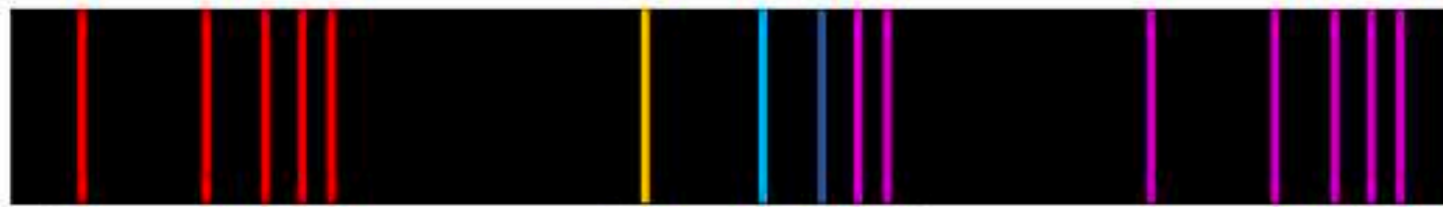
- 20世紀初め頃までに、この世の元素は原子から構成されているという考えに人類はたどり着き、以下のような模型が具体的に考えられた。



⇒ 安定に存在するためには、条件 " $n \times \lambda = 2\pi r$  ( $n=1,2,\dots$ )" が必要  
[限られた波長の定常的な波のみが選ばれる。]

波長 長い

短い



赤外線領域  
パッシェン系列

可視光領域  
バルマー系列

紫外線領域  
ライマン系列

$n_1 \rightarrow n_2$  から遷移したときの光の波長  $\lambda$

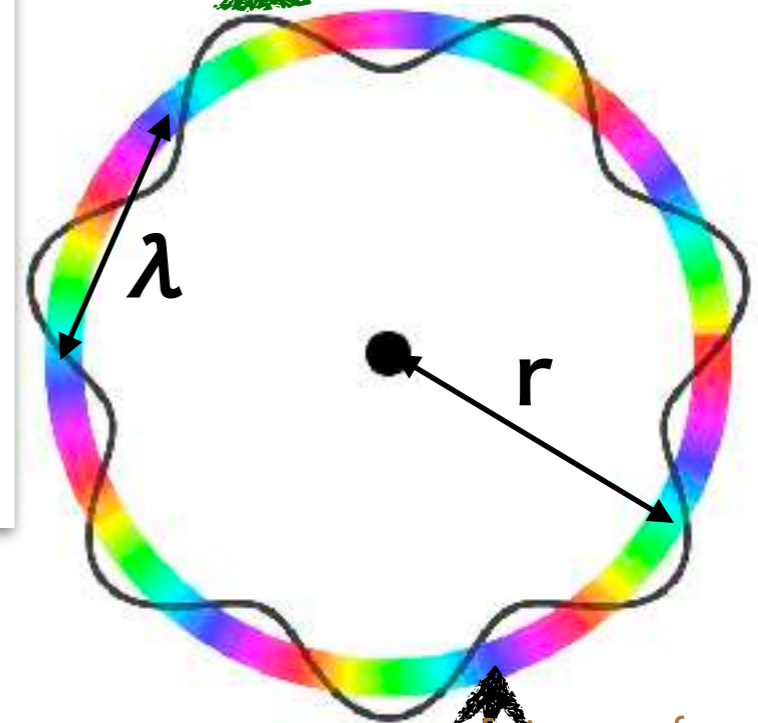
$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

陽子 (proton)

水素原子

ら構成されている  
な模型が具体的に

量子化 (quantisation)



[pictures from the web]

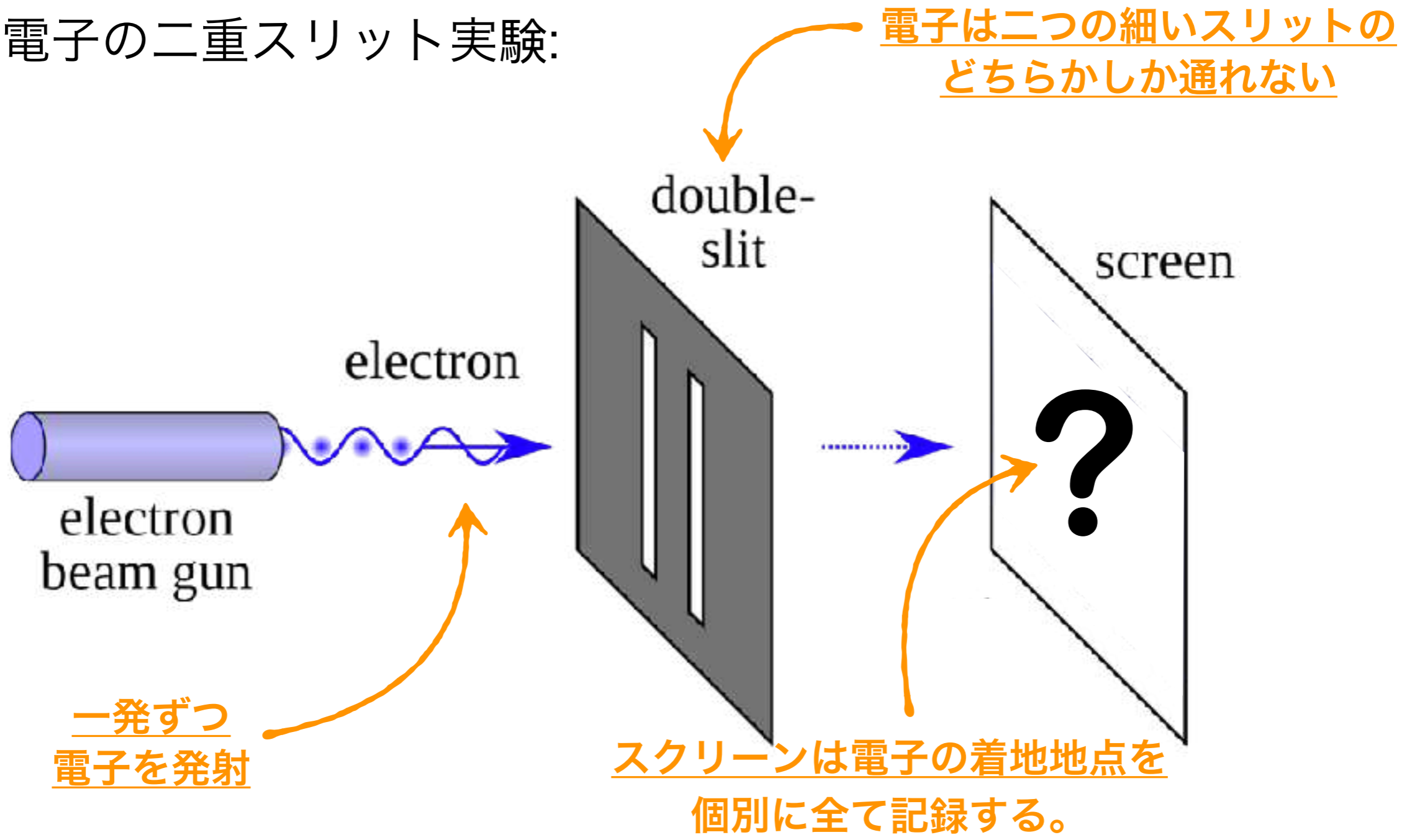
水素原子中の電子の適切な波は  
どんなプロファイルを取る?

⇒ 安定に存在するためには、条件 " $n \times \lambda = 2\pi r$  ( $n=1,2,\dots$ )" が必要  
[限られた波長の定常的な波のみが選ばれる。]

⇒ この結果から、水素原子から放出される光スペクトルが説明できる!

- 先程は、電磁ポテンシャル内の電子を考えましたが、以下のような実験を行うと、自由な(=外から力が働いていない)電子に対しても、量子的な粒子の驚くべき性質が見えてきます。

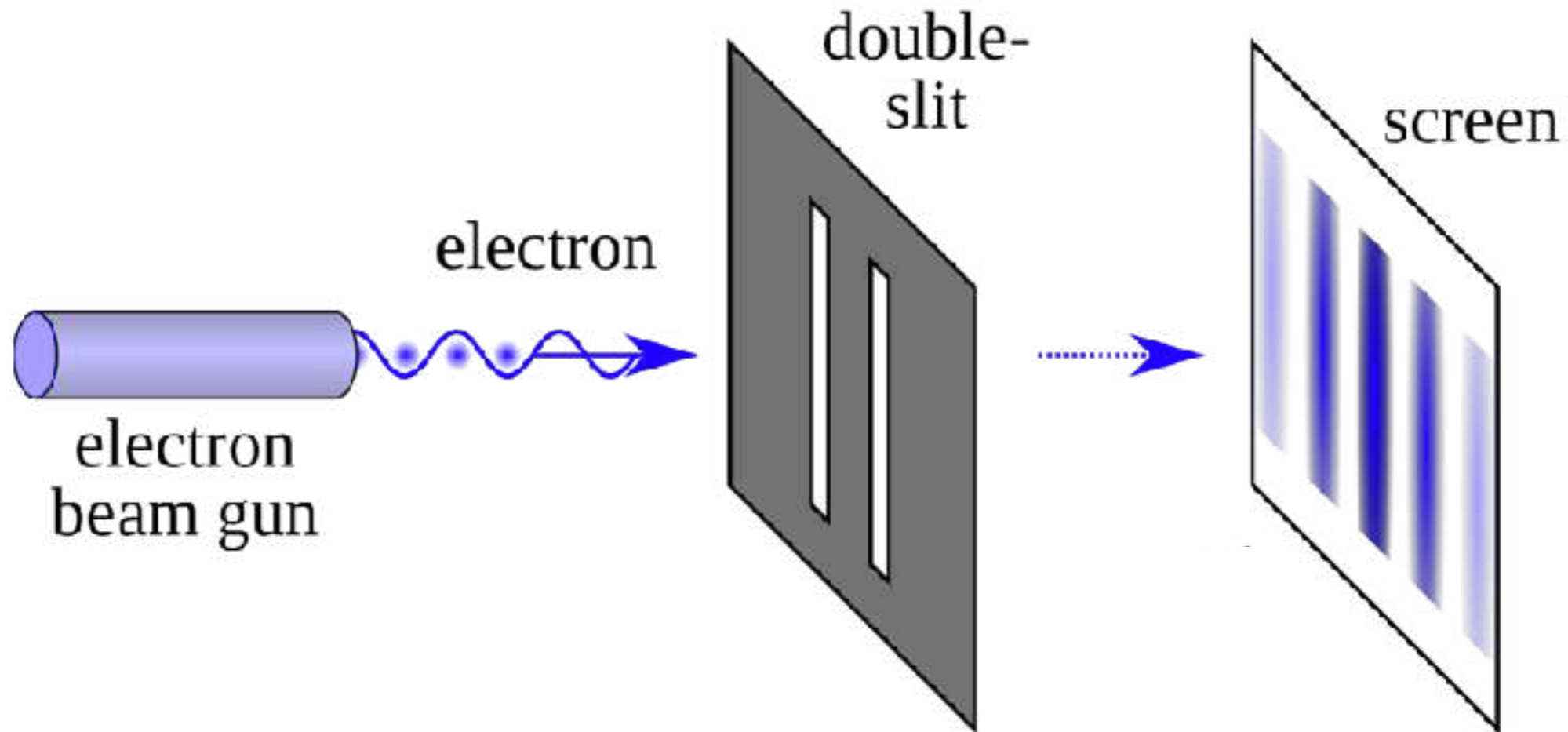
👤 電子の二重スリット実験:



⇒ Q. 多数の電子を発射した後、何が記録されているのでしょうか?

- 先程は、電磁ポテンシャル内の電子を考えましたが、以下のような実験を行うと、自由な(=外から力が働いていない)電子に対しても、量子的な粒子の驚くべき性質が見えてきます。

👤 電子の二重スリット実験:



**A. 干渉パターンが見える!**

古典的な波の場合:

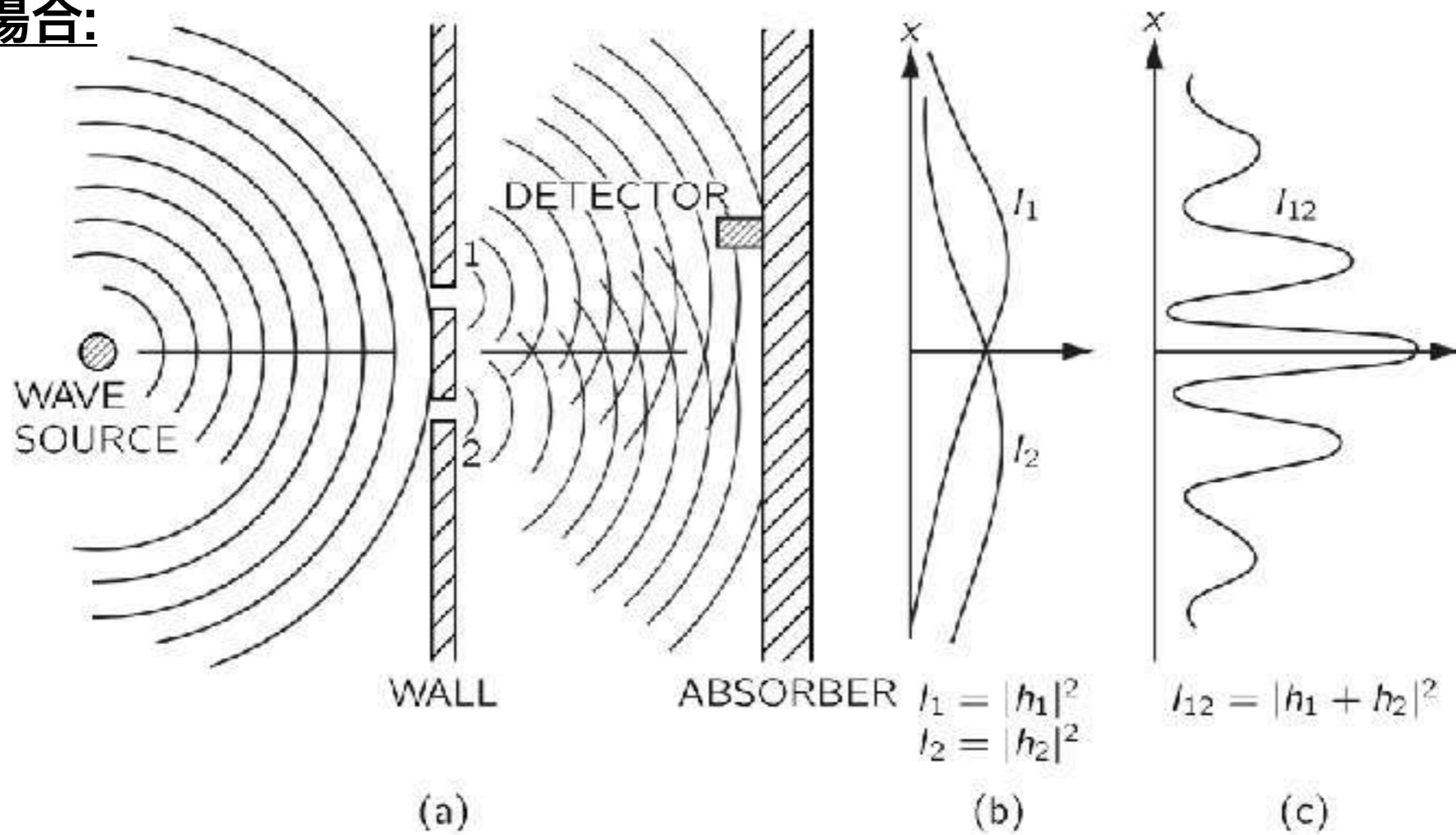


Fig. 1-2. Interference experiment with water waves.

- $h_1$ : スリット"1"からの波の、右端(absorber)での高さ
- $h_2$ : スリット"2"からの波の、右端(absorber)での高さ

📍 右端での波全体の強度 " $I_{12} = |h_1 + h_2|^2$ ".

量子的な電子の空間プロファイル(=波動関数)の場合:

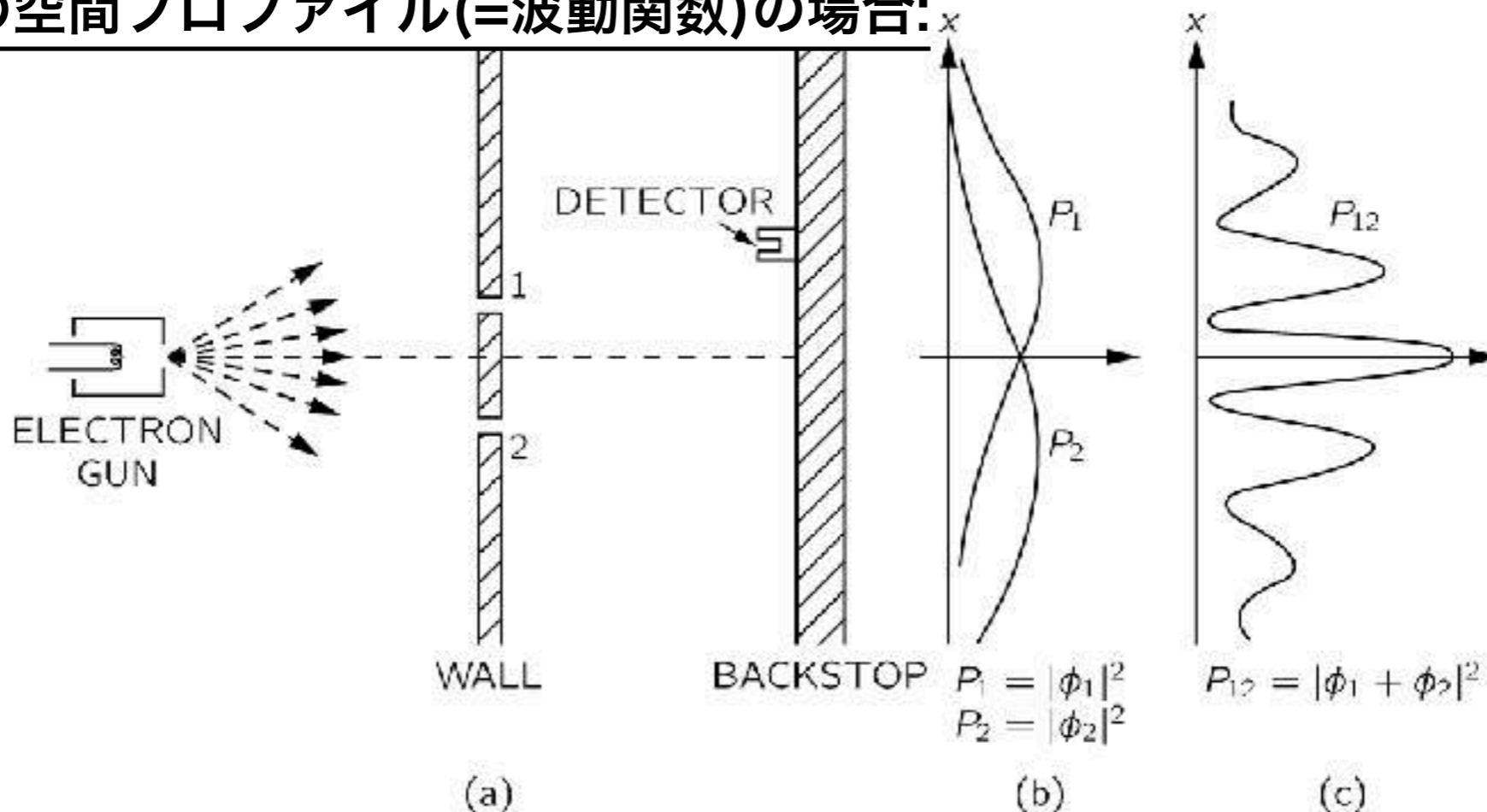


Fig. 1-3. Interference experiment with electrons.

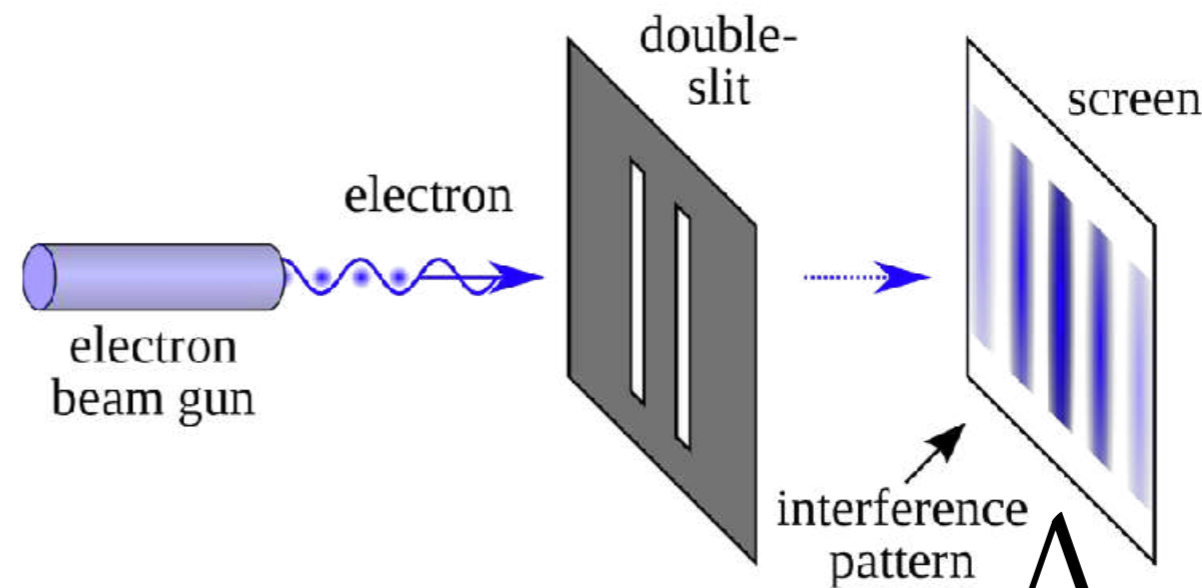
- $\phi_1$ : スリット"1"を通る電子の波動関数の、右端(backstop)での値
- $\phi_2$ : スリット"2"を通る電子の波動関数の、右端(backstop)での値

🔦 右端での波動関数全体の強度 " $P_{12} = |\phi_1 + \phi_2|^2$ ".



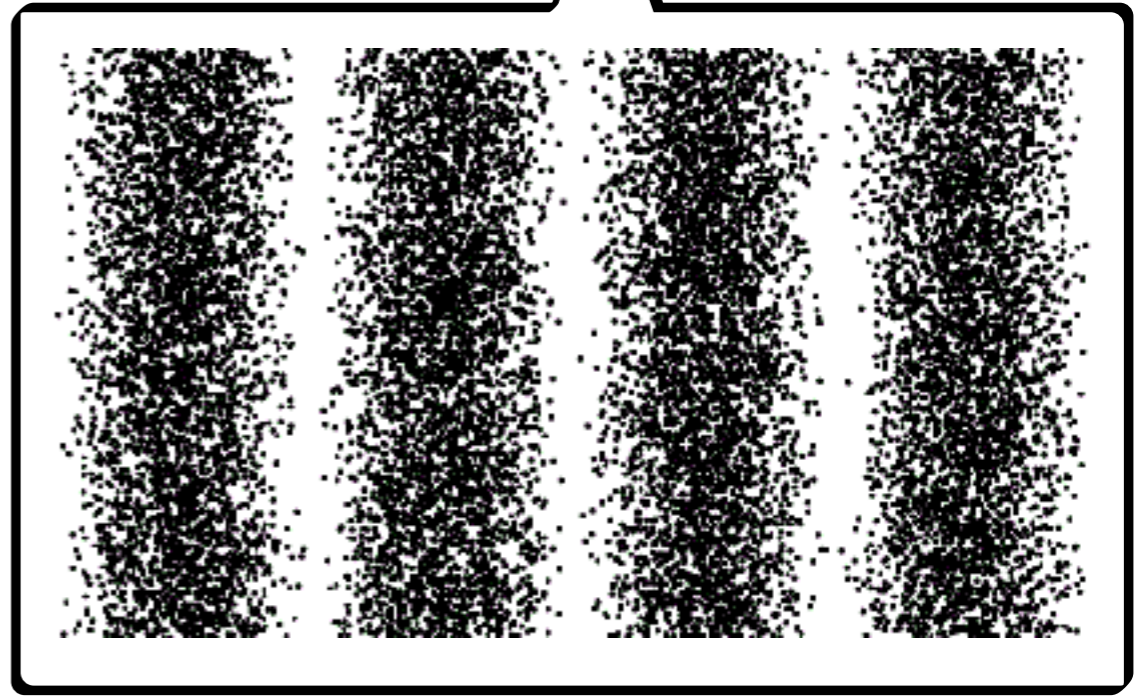
**電子の各地点における存在確率と理解する**

# □ 詳細:



- 各電子は、点として観測される (粒子)
- 多数の観測結果は、干渉効果を含めた波動関数の強度(⇒対応する確率)に従う (波)

“粒子と波の二重性”



ド・ブROI-アインシュタインの関係式: 粒子と波の言語の対応

$$E = \hbar \times \omega$$

エネルギー      角運動量

$$p = \hbar \times k$$

空間運動量      波数

(reduced) プランク定数  
次元を合わせるために、新しい定数が必要

$$[\hbar] = [\text{エネルギー} \times \text{時間}] = [\text{空間運動量} \times \text{長さ}]$$

[pictures from the web]

# 量子的な電子の空間プロファイル(=波動関数)の場合

[どちらのスリットを通ったか調べる際]:

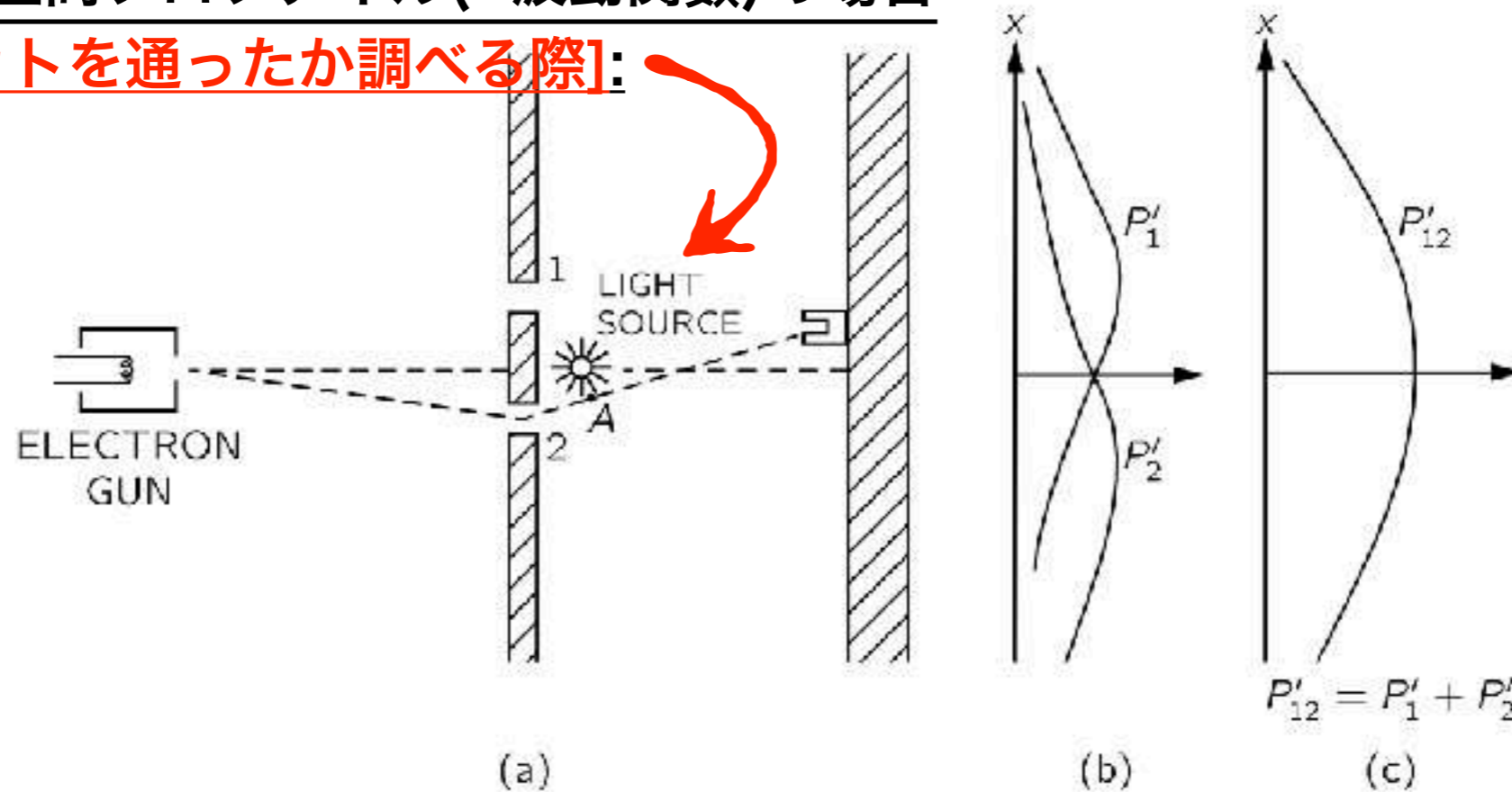


Fig. 1-4. A different electron experiment.

- $\Phi'_1$ : スリット"1"を通る電子の波動関数の、右端(backstop)での値
- $\Phi'_2$ : スリット"2"を通る電子の波動関数の、右端(backstop)での値

● 粒子の観測確率 " $P'_{12} = |\Phi'_1|^2 + |\Phi'_2|^2 = P'_1 + P'_2$ ".

途中の微弱な操作によっても、

最後の結果が大きく変化することが(干渉光の喪失!)

□ さて、量子的な粒子の空間的なプロファイル(=波動関数)は、  
どんな形をしているのでしょうか?

○ [粒子のエネルギー] :  $E_p = \left\{ \frac{p^2}{2m} \text{ (non-relativistic), } \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \text{ (relativistic)} \right\}$

○ [粒子の空間運動量] :  $p$  (何か固有の値を持つ)

👤 (wave)  $\sim$  superposition (over  $\mathbf{k}$ ) of  $e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$

□ さて、量子的な粒子の空間的なプロファイル(=波動関数)は、  
どんな形をしているのでしょうか?

○ [粒子のエネルギー] :  $E_p = \left\{ \begin{array}{l} \frac{p^2}{2m} \text{ (non-relativistic), } \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \text{ (relativistic)} \end{array} \right\}$

○ [粒子の空間運動量] :  $p$  (何か固有の値を持つ)

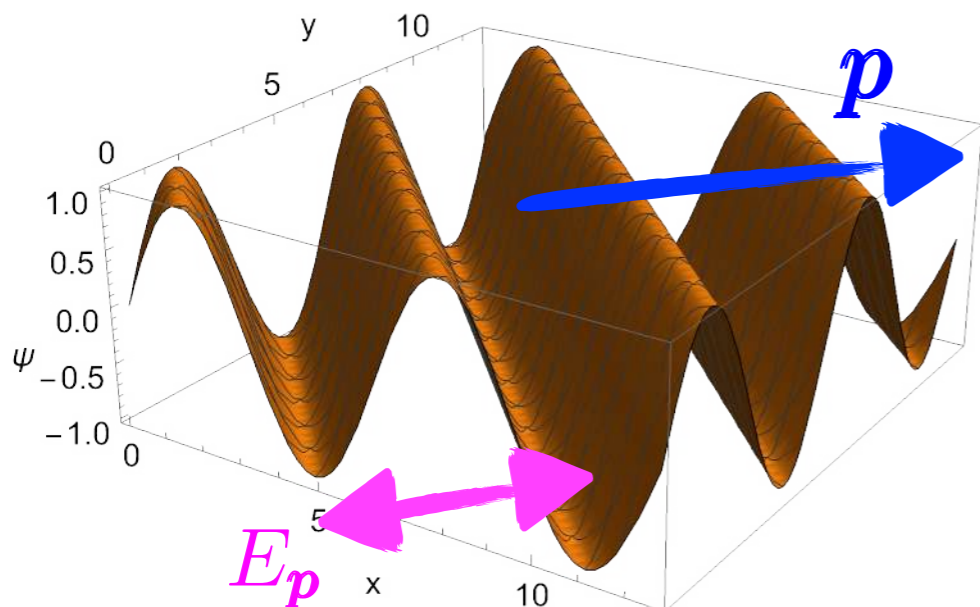
👤 (wave) ~ superposition (over  $\mathbf{k}$ ) of  $e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$

ド・ブローイ-アインシュタインの関係式

note: (metric) = diag(-1,1,1,1);  
自然単位を採用:  $\hbar = c = 1$

平面波(plane wave)による粒子の表現:

$$\psi(t, \mathbf{x}) \sim e^{-iE_p t + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad \left( = e^{+ip_\mu x^\mu} \right)$$

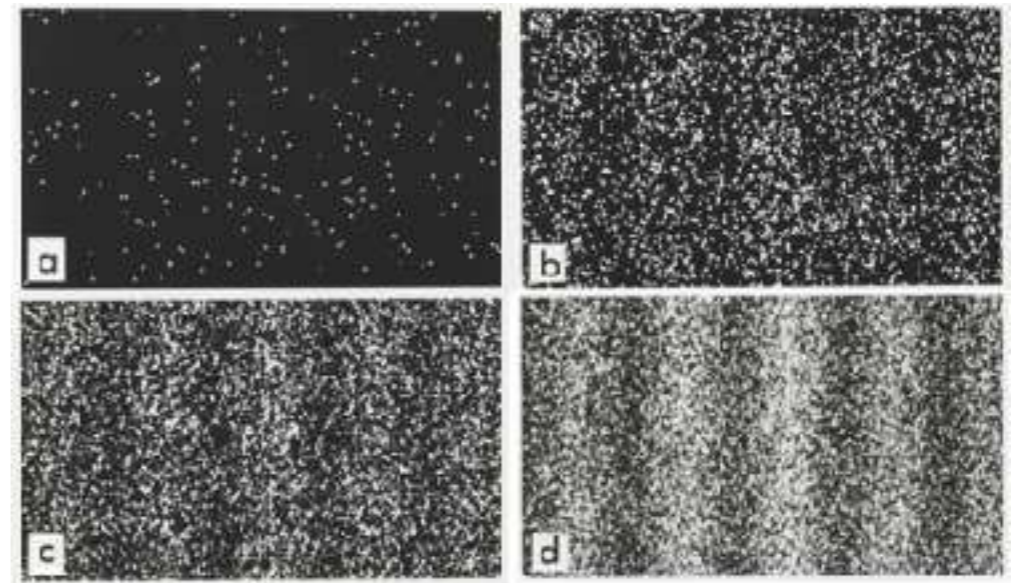
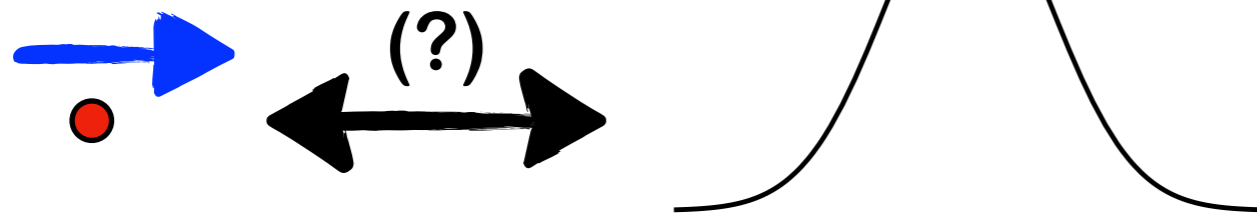


- 固有の運動量を表現
- エネルギーの運動量依存性(分散関係)

を正しく表現している  
(⇒幅広く使用されている)

# ところが！

- この結果を思い出そう →  
量子力学的粒子の配位は、空間的に局在化している筈



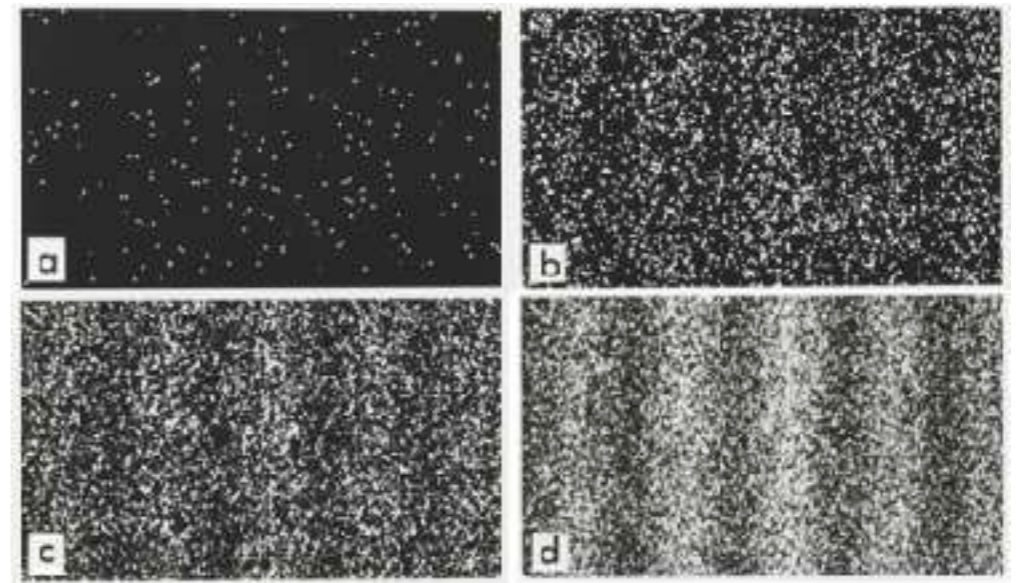
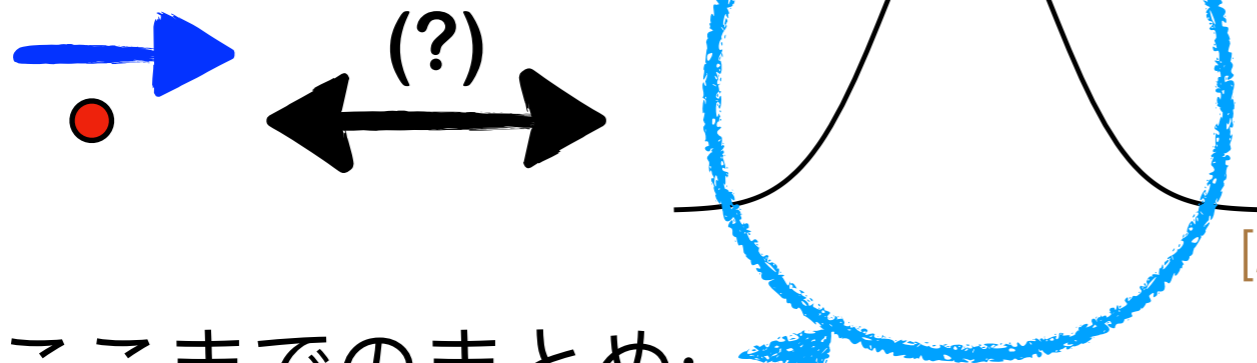
[A. Tonomura, Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, 102, 14952 (2005)]

- ここまでのまとめ:

- 平面波を利用した量子的な粒子の表現は、“粒子としての”幾つかの性質(運動量、分散関係)を正しく表現
- しかし、他の重要な性質(局在性)は全く表現されていない!

# ところが！

- この結果を思い出そう →  
量子力学的粒子の配位は、空間的に局在化している筈



[A. Tonomura, Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, 102, 14952 (2005)]

- ここまでのまとめ:

- 平面波を利用した量子的な粒子の表現は、“粒子としての”幾つかの性質(運動量、分散関係)を正しく表現
- しかし、他の重要な性質(局在性)は全く表現されていない!

波束を使用すれば、局在性も加味した  
完全な量子力学的粒子の表現が可能になる!

本日の話のキーワード

# 波束量子力学

Done! ??

Done! ??

波(の)束 (wave packet)

原子・原子といった

この世界中のミクロな構造を

記述する為の言語・方法論

(Quantum Theory)

色々な波を束ねると、

どんな形も表現できる。

次に、平面波での標準的な計算に  
関して議論しましょう。

Done! ?

物理学(Physics)は、

初めこの世のマクロな構造(身の回りの世界)

を理解することから始まった。

[古典理論 (Classical Theory)]

□ 先程話お話しした通り、量子力学/論では、諸々の議論は対応する**確率量**の計算になります。

物理過程一つ一つで何が起こるかは測ってみるまでわからない。しかし、**確率量の性質・分布は理論から決定でき、実験でも測れる。**

- 先程話お話しした通り、量子力学/論では、諸々の議論は対応する**確率量**の計算になります。



物理過程一つ一つで何が起こるかは測ってみるまでわからない。しかし、**確率量の性質・分布は理論から決定でき、実験でも測れる。**

この理解は、以下の身近(!?)な例の理解と基本的に同じです。

- 一枚**300円**の宝くじを一枚買って、**一等賞(7億円!)**が当たることは極々々々々々々偶にはある。  
[一つ一つの過程の極端な例]

等	当選金額	当選確率
1等	7億円	2000万分の1
1等の前後賞	1億5000万円	1000万分の1
1等の組違い賞	10万円	10万503分の1
2等	1000万円	666万6667分の1
3等	100万円	20万分の1
4等	10万円	5000分の1
5等	1万円	1000分の1
6等	3000円	100分の1
7等	300円	10分の1

□ 先程話お話しした通り、量子力学/論では、諸々の議論は  
 対応する**確率量**の計算にかゝります

[賭博破戒録カイジ、沼編]

物理  
 わたし  
 理解

かは測ってみるまで  
性質・分布は  
れる。



この理解は、以下の...的に同じです。

- 一枚**300円**の宝くじを一枚買って、  
 一等賞(**7億円!**)が当たることは  
 極々々々々々偶にはある。  
 [一つ一つの過程の極端な例]

等	当選金額	当選確率
1等	7億円	2000万分の1
1等の前後賞	1億5000万円	1000万分の1
1等の組違い賞	10万円	10万503分の1
2等	1000万円	666万6667分の1
3等	100万円	20万分の1
4等	10万円	5000分の1
5等	1万円	1000分の1
6等	3000円	100分の1
7等	300円	10分の1

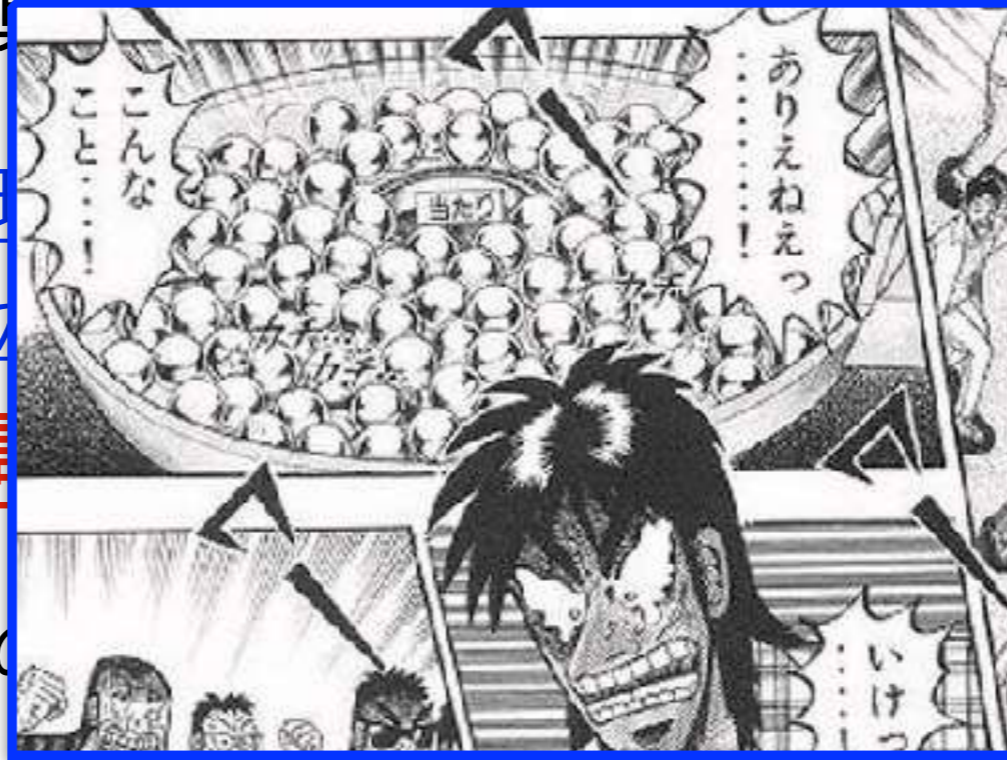
□ 先程話お話しした通り、量子力学/論では、諸々の議論は  
 対応する確率量の計算にかかっています

[賭博破戒録カイジ、沼編]

物理  
 わ  
 理論

かは測ってみるまで  
性質・分布は  
れる。

この理解は、以下の



的に同じです。

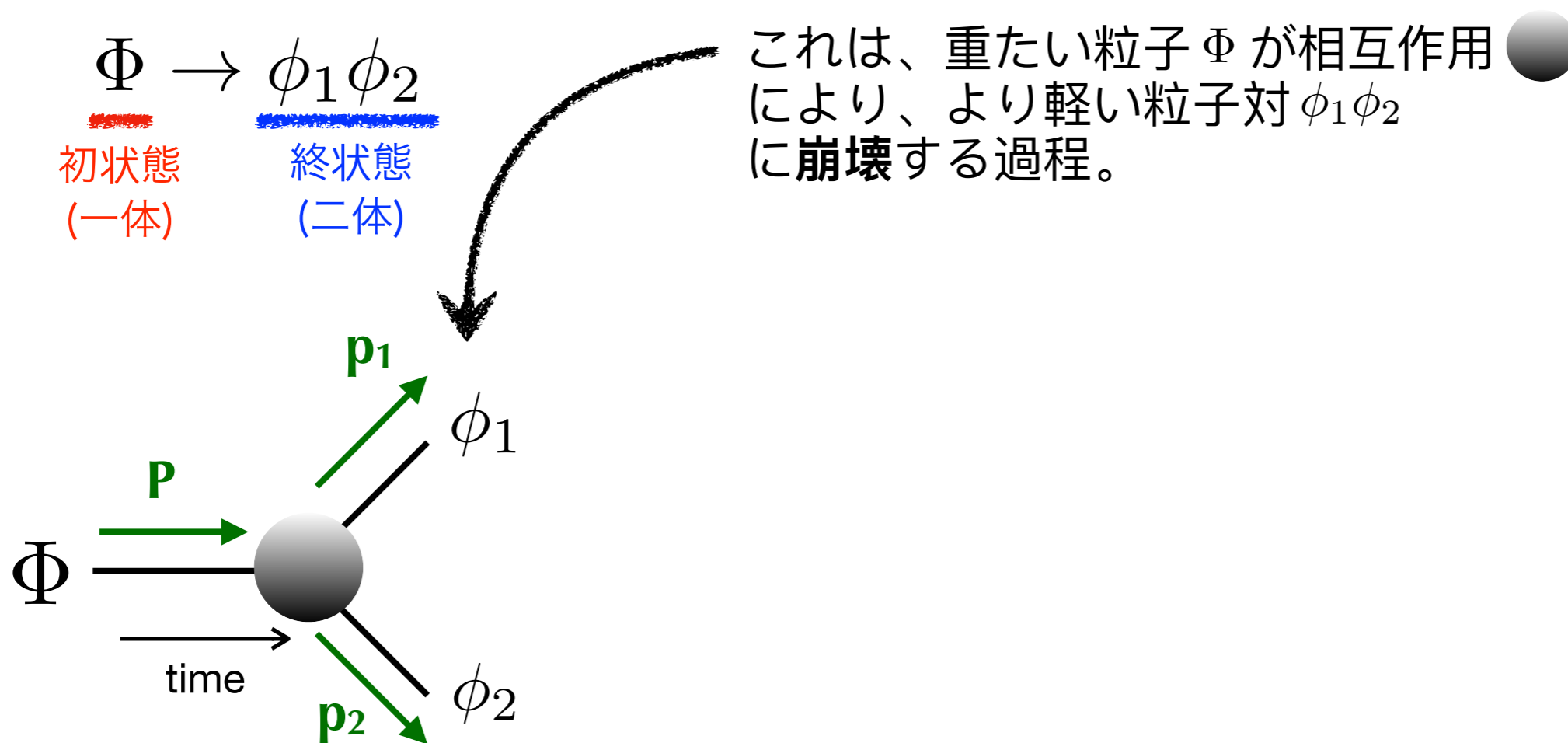
- 一枚300円の宝くじを一枚買って、  
 一等賞(7億円!)が当たることは  
 極々々々々々偶にはある。  
 [一つ一つの過程の極端な例]
- 賞金の期待値は、理論的に計算可能。  
 右のデータを下にすると、約148円。  
 ⇒ 基本的には大きく損をする。  
 [宝くじの確率分布の性質の一例]



当選確率
1000 万分の 1
1000 万分の 1
100 万 503 分の 1
100 万 6667 分の 1
20 万分の 1
5000 分の 1
1000 分の 1
100 分の 1
10 分の 1

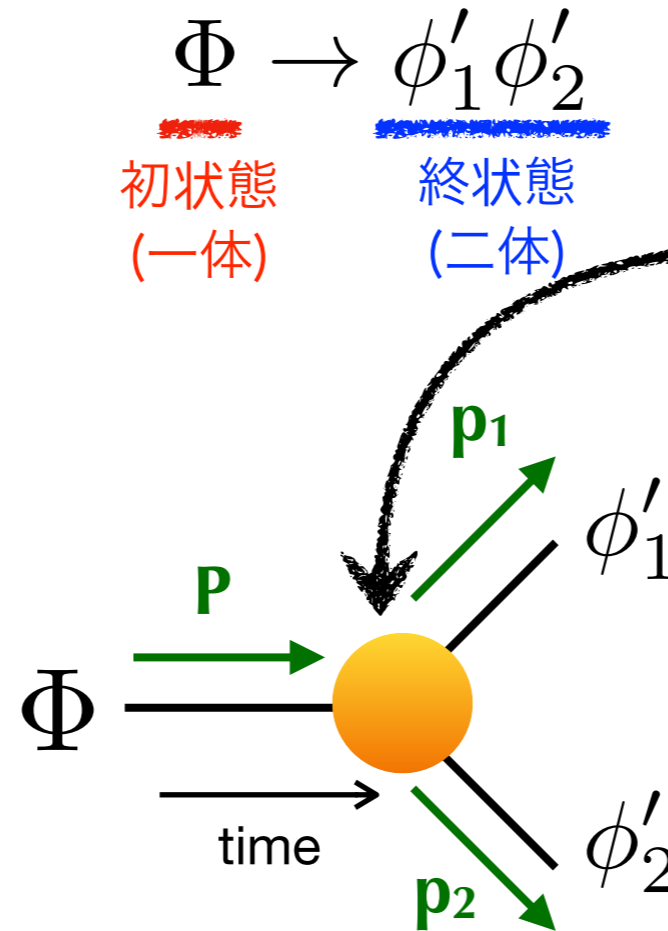
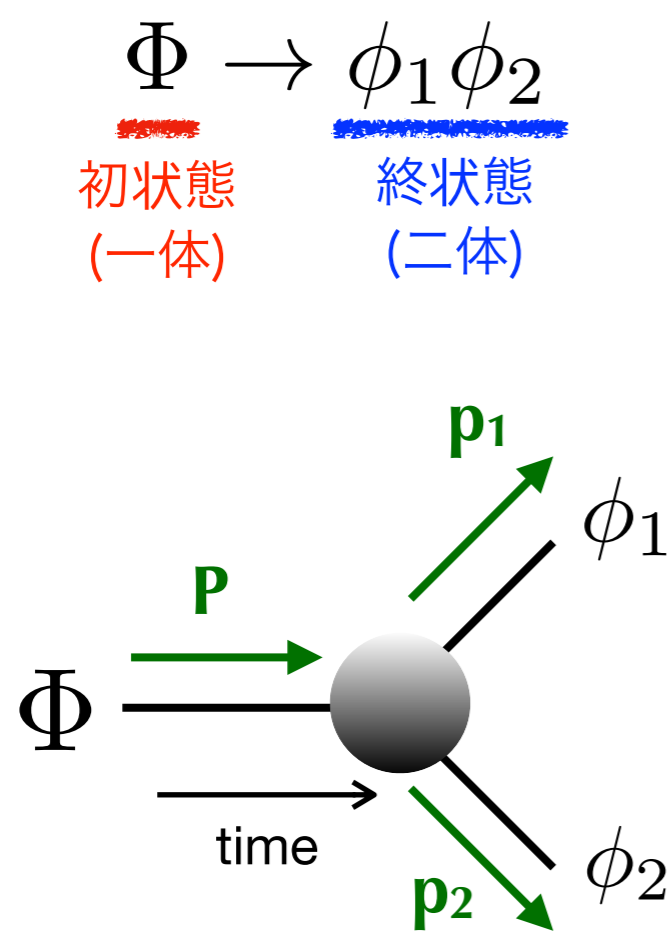
□ この世の根本的なミクロな世界が、確率によって支配されるのは不思議な気がします。これは観測事実なので、認めて先に進みましょう。

□ 更に以下では、本質に集中するため、最も単純な (1⇒2)-体量子遷移に集中しましょう。



□ この世の根本的なミクロな世界が、確率によって支配されるのは不思議な気がします。これは観測事実なので、認めて先に進みましょう。

□ 更に以下では、本質に集中するため、最も単純な (1⇒2)-体量子遷移に集中しましょう。



他の相互作用 ● が存在するなら、別種のより軽い粒子対  $\phi'_1 \phi'_2$  に崩壊する過程も存在。

□ この世の根本的なミクロな世界が、確率によって支配されるのは不思議な気がします、これは観測事実なので、認めて先に進みましょう。

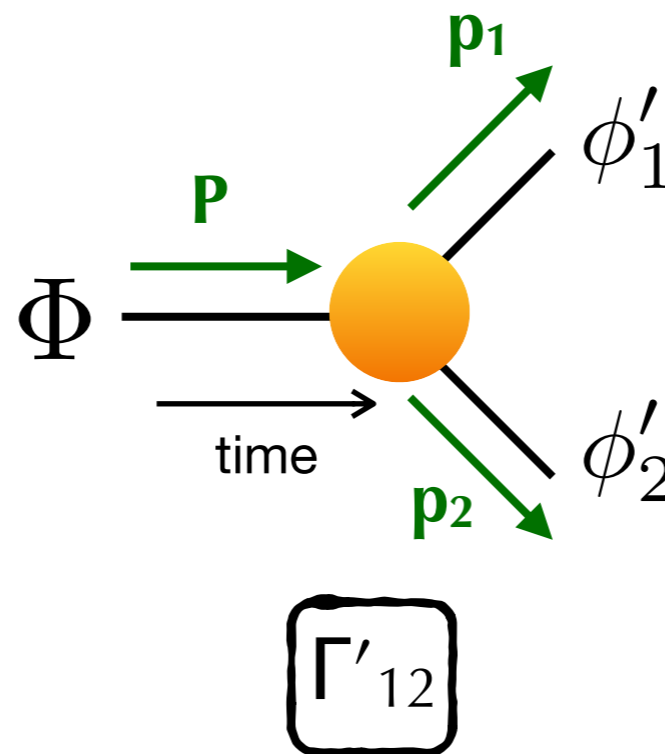
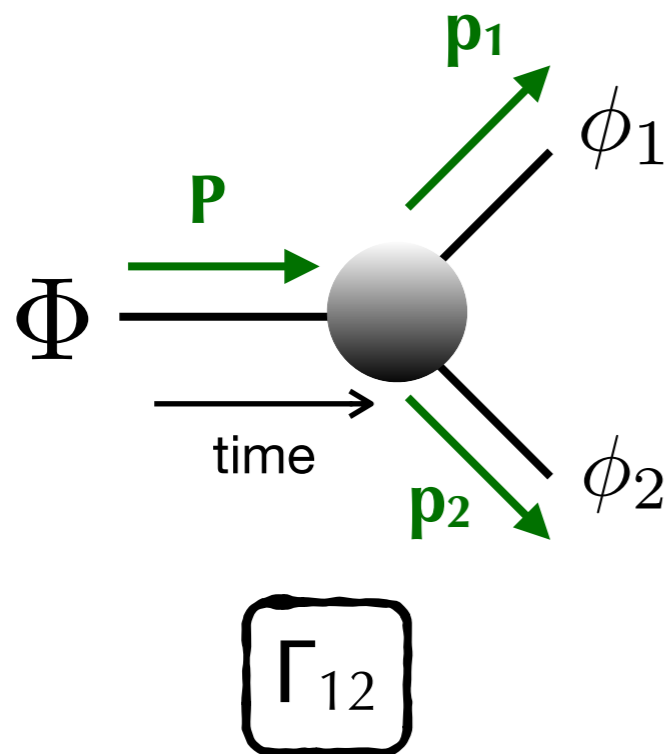
□ 更に以下では、本質に集中するため、最も単純な (1⇒2)-体量子遷移に集中しましょう。

$$\Phi \rightarrow \phi_1 \phi_2$$

初状態 (一体)      終状態 (二体)

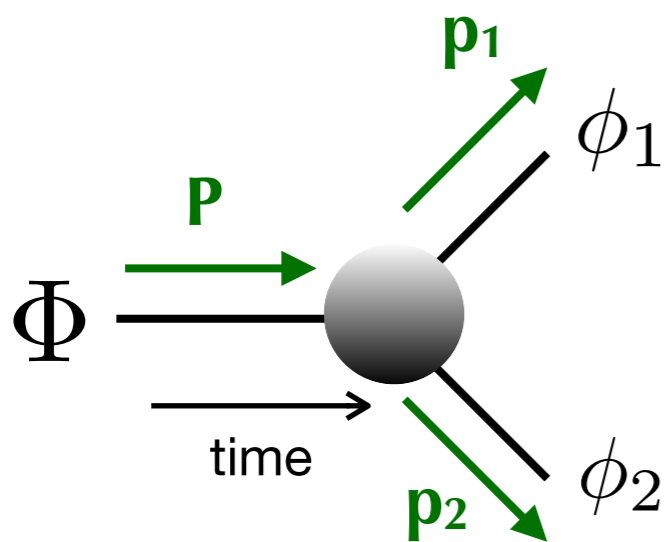
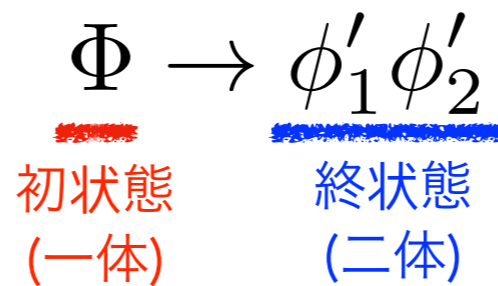
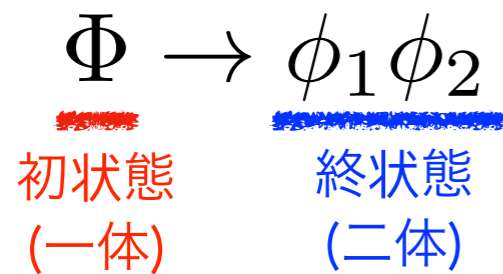
$$\Phi \rightarrow \phi'_1 \phi'_2$$

初状態 (一体)      終状態 (二体)

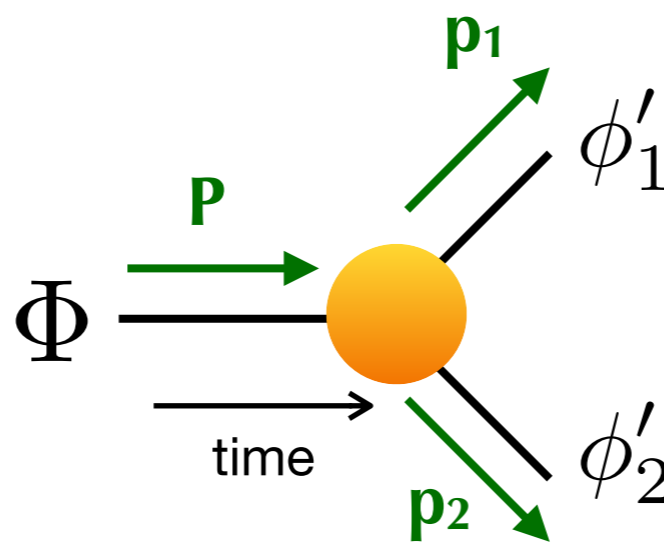


後で示すように、平面波の計算では、二つの崩壊過程は、それぞれ対応する単位時間あたりの崩壊確率  $\Gamma_{12}, \Gamma'_{12}$  で特徴づく。

- $\Gamma_{\text{total}} := \Gamma_{12} + \Gamma'_{12}$  を全崩壊確率と呼ぶ。  
これは、単位時間辺りにどちらかに崩壊する確率。
- $\tau := 1/(\Gamma_{\text{total}})$  は時間の物理単位を持ち、これは崩壊する粒子の平均寿命を表す。



$$\Gamma_{12}$$



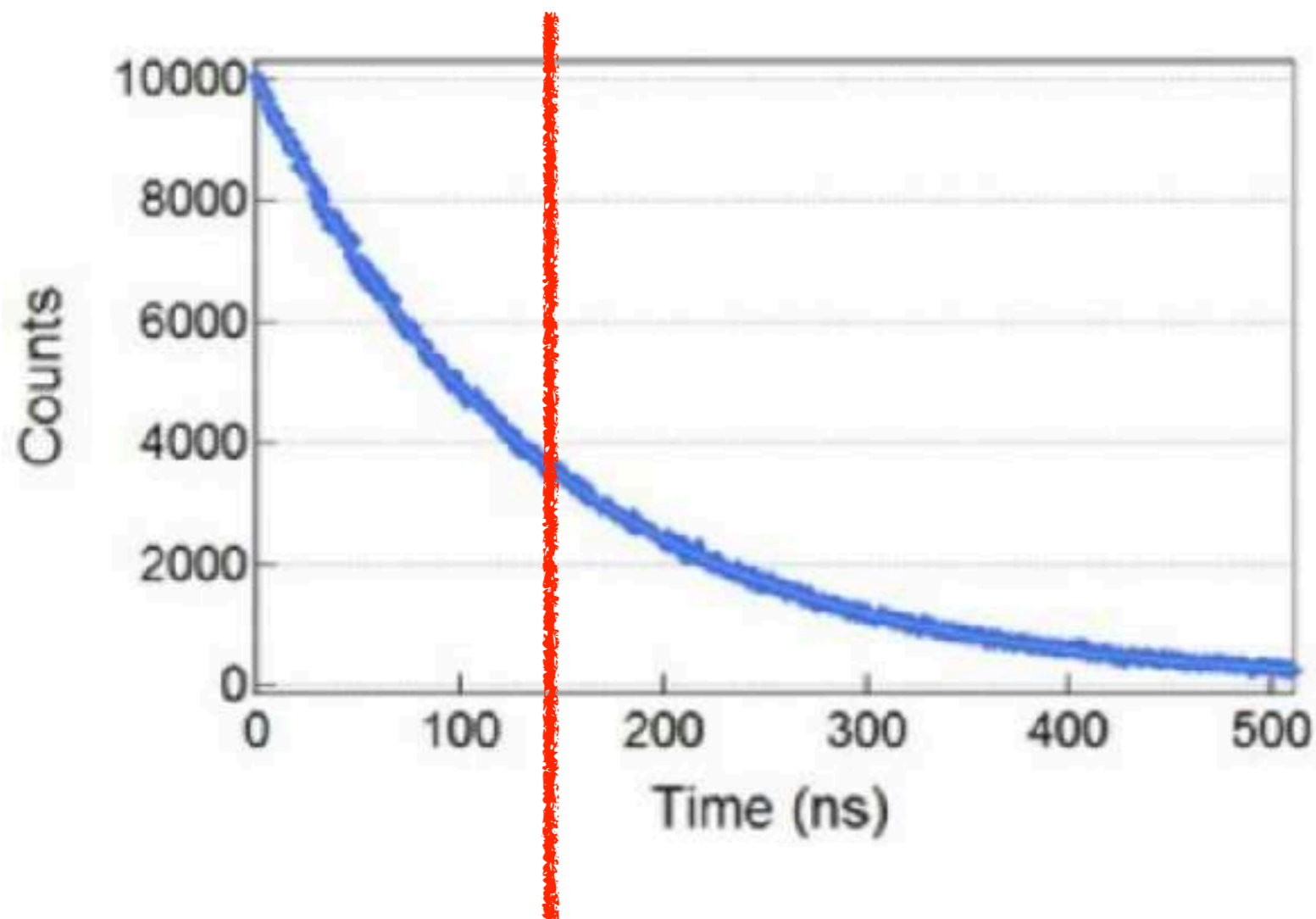
$$\Gamma'_{12}$$

後で示すように、平面波の計算では、二つの崩壊過程は、それぞれ対応する単位時間あたりの崩壊確率  $\Gamma_{12}, \Gamma'_{12}$  で特徴づく。

## 鉄の同位体 Fe<sup>57</sup> の

(第一励起状態からγ線(光の量子)を放出して基底状態に落ち着く)

“崩壊”までにかかった時間の実験結果



$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{t_0}\right)$$

$t_0 = 141$  [nano seconds]

□ 単位時間あたりの確率は、物理次元「(時間)<sup>-1</sup>」をもつ量で、“(時間)<sup>-1</sup>で平均化した”(相対的な)確率と理解できます。

□ 一方で、通常考える「あるイベントが発生する確率」は、物理次元を持たない(絶対的な)確率で記述されます。

[例] 理想的なサイコロを一回降って、一の目が出る確率は 1/6 (無次元量)。

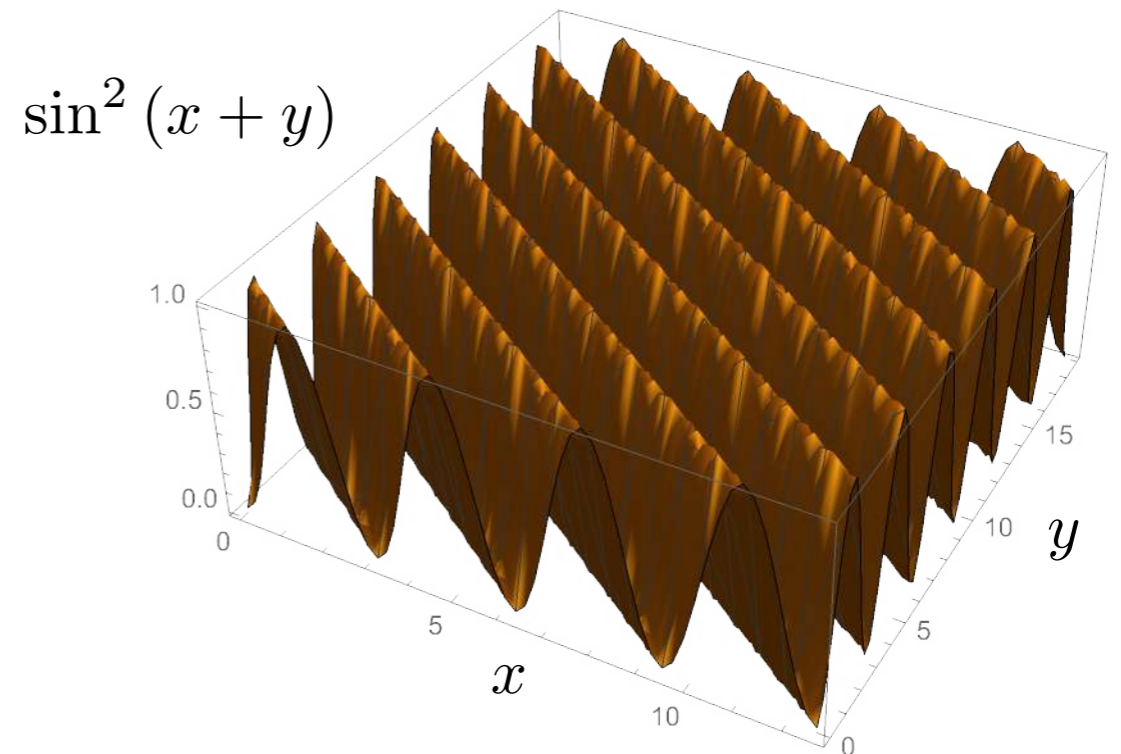
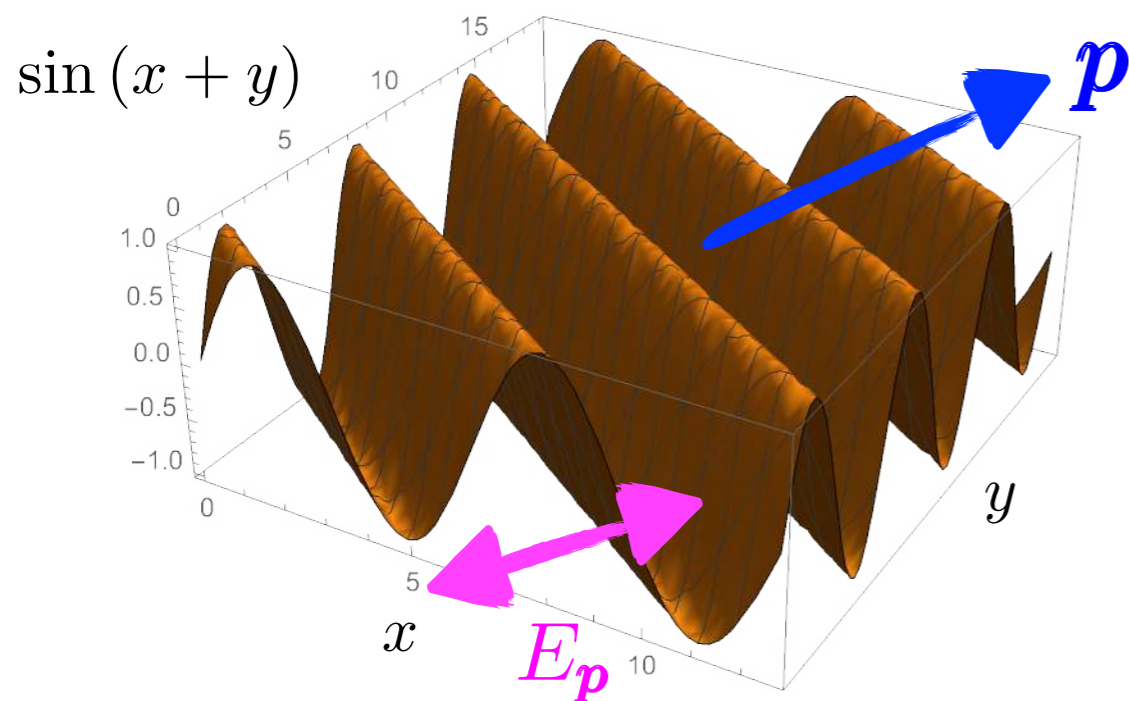
□ 単位時間あたりの確率は、物理次元「(時間)<sup>-1</sup>」をもつ量で、“(時間)<sup>-1</sup>で平均化した”(相対的な)確率と理解できます。

□ 一方で、通常考える「あるイベントが発生する確率」は、物理次元を持たない(絶対的な)確率で記述されます。

[例] 理想的なサイコロを一回降って、一の目が出る確率は 1/6 (無次元量)。

□ なぜ平面波の計算で、絶対的な確率を考えないのでしょうか?

答えは、考えないのではなく、考えられないのです。



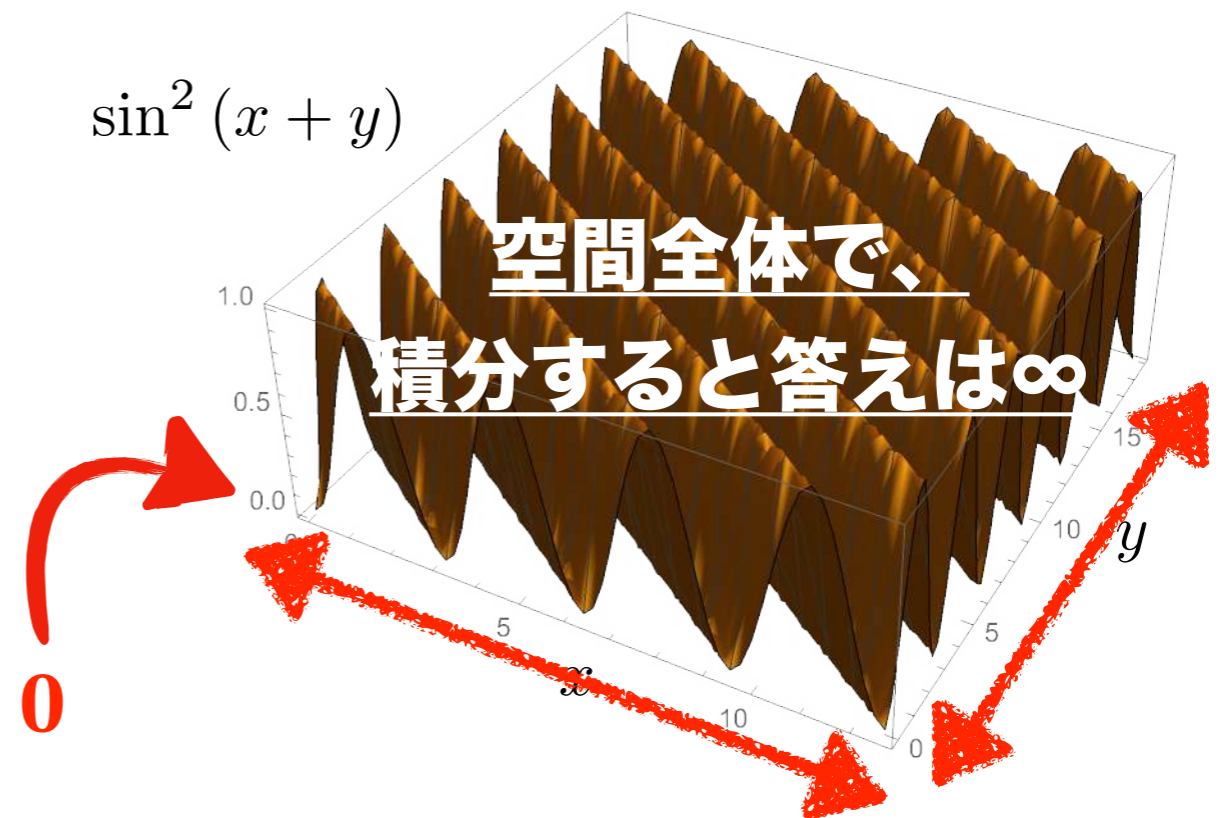
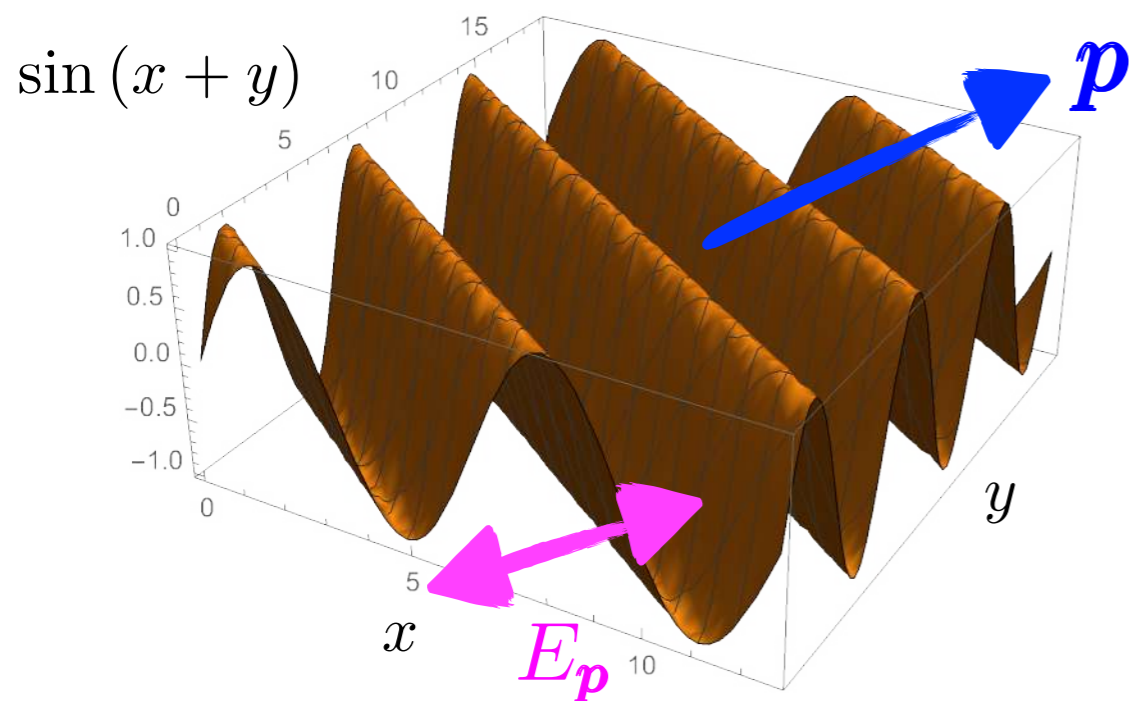
□ 単位時間あたりの確率は、物理次元「(時間)<sup>-1</sup>」をもつ量で、“(時間)<sup>-1</sup>で平均化した”(相対的な)確率と理解できます。

□ 一方で、通常考える「あるイベントが発生する確率」は、物理次元を持たない(絶対的な)確率で記述されます。

[例] 理想的なサイコロを一回降って、一の出る確率は 1/6 (無次元量)。

□ なぜ平面波の計算で、絶対的な確率を考えないのでしょうか？

答えは、考えないのではなく、考えられないのです。



# **第二部:**

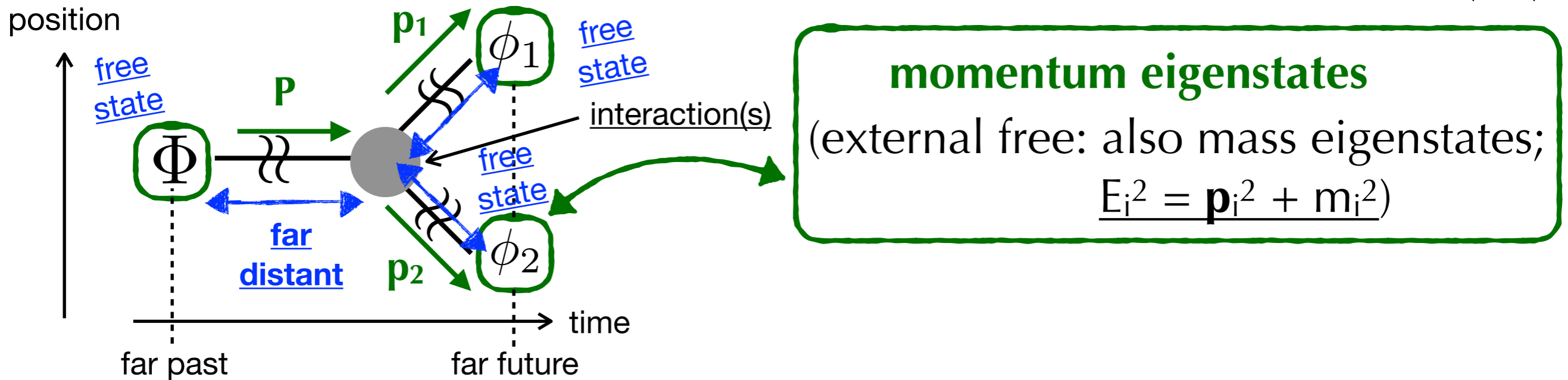
# **平面波の計算の限界と、**

# **波束計算の導入**

(修士向け、~15分)

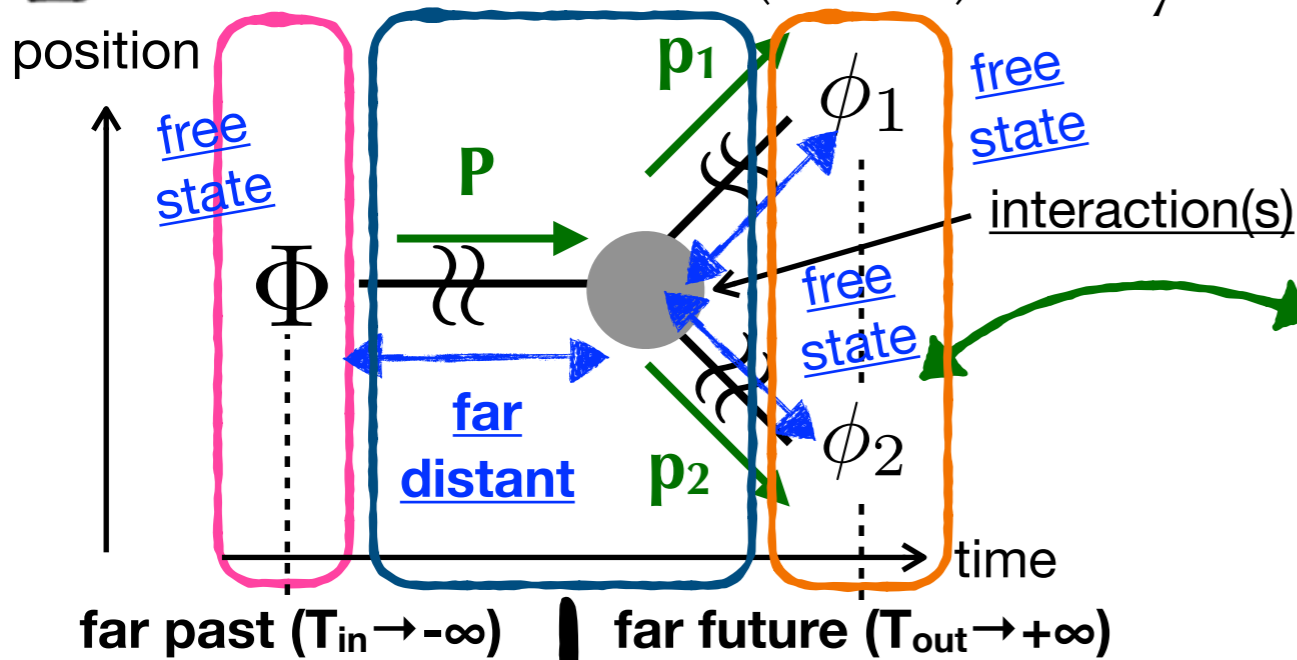
# Review on plane-wave amplitude

□ We focus on the (1 → 2)-body relativistic transition/decay:  $\Phi \rightarrow \phi_1 \phi_2$



# Review on plane-wave amplitude

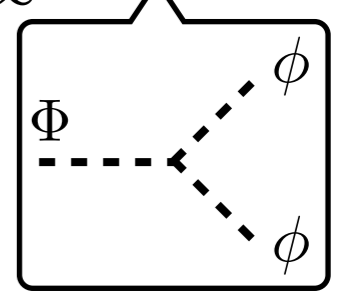
□ We focus on the (1 → 2)-body relativistic transition/decay:  $\Phi \rightarrow \phi_1 \phi_2$



**momentum eigenstates**  
 (external free: also mass eigenstates;  
 $E_i^2 = \mathbf{p}_i^2 + m_i^2$ )

(in interaction picture) interaction Hamiltonian density

$$\hat{H}_{\text{int}}^{(I)} = \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x} \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}^{(I)}(t, \mathbf{x})$$



transition amplitude  
 (S-matrix)

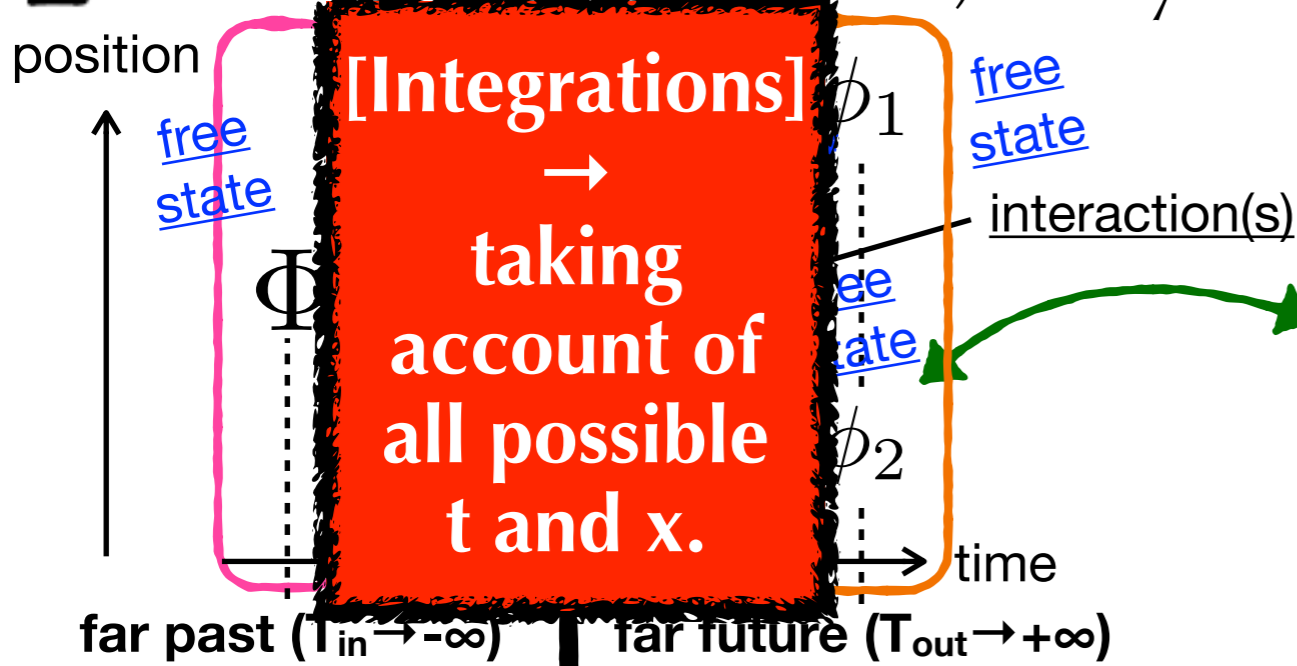
$$S_{\text{PW}} = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle_{\text{out free state}} \mathcal{T} e^{-i \int_{T_{\text{in}}}^{T_{\text{out}}} dt \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)} | \mathbf{P}_0 \rangle_{\text{in free state}}$$

$$= \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(P_{\text{out}} - P_{\text{in}})}_{\text{manifest energy-momentum conservation (due to translation invariance)}} \times \underbrace{(iM_{\text{PW}})}_{\text{(factorised) amplitude}}$$

○ ( $\mathcal{T}$  represents the time-ordered product for relativistic process.)

# Review on plane-wave amplitude

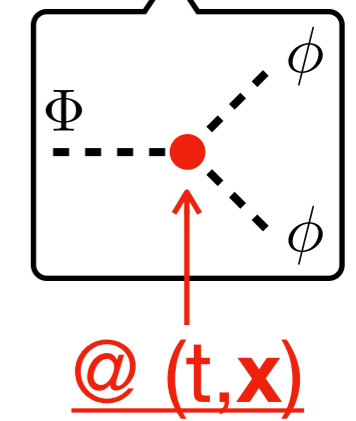
□ We focus on the (1 → 2)-body relativistic transition/decay:  $\Phi \rightarrow \phi_1 \phi_2$



**momentum eigenstates**  
 (external free: also mass eigenstates;  
 $E_i^2 = \mathbf{p}_i^2 + m_i^2$ )

(in interaction picture) interaction Hamiltonian density

$$\hat{H}_{\text{int}}^{(I)} = \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x} \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}^{(I)}(t, \mathbf{x})$$



transition amplitude  
 (S-matrix)

$$S_{\text{PW}} = \langle \overset{\text{out}}{\text{free state}} \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle \text{T}e^{-i \int_{T_{\text{in}}}^{T_{\text{out}}} dt \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)} | \overset{\text{in}}{\text{free state}} \mathbf{P}_0 \rangle$$

$$= \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(P_{\text{out}} - P_{\text{in}})}_{\text{manifest energy-momentum conservation (due to translation invariance)}} \times \underbrace{(iM_{\text{PW}})}_{\text{(factorised) amplitude}}$$

# Problem in plane-wave S-matrix

[QFT textbooks]

☑ Plane-wave  
S-matrix (1 → 2) def.:

$$S_{PW} = \langle \overset{\text{out}}{\text{free state}} \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | \text{T} e^{-i \int_{T_{\text{in}}}^{T_{\text{out}}} dt \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)} | \overset{\text{in}}{\text{free state}} \mathbf{P}_0 \rangle$$

$$= \underbrace{(2\pi)^4 \delta^4(P_{\text{out}} - P_{\text{in}})}_{\text{manifest energy-momentum conservation}} \times \underbrace{(iM_{PW})}_{\text{(factorised) amplitude}}$$

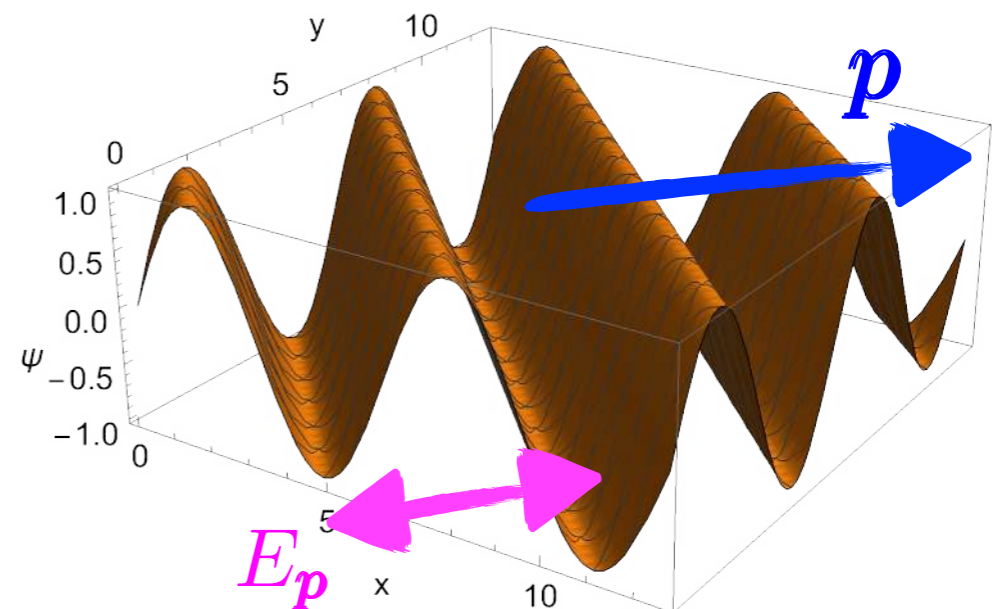
📌 Corresponding probability is given as  $|S_{PW}|^2$ .  $(2\pi)^{-4}[(\text{Volume})(\text{Time}) \rightarrow \infty]$

📌  $|S_{PW}|^2$  is ill-defined due to  $|\delta^4(P_{\text{out}} - P_{\text{in}})|^2 = \delta^4(P_{\text{out}} - P_{\text{in}}) \times \delta^4(\mathbf{0})$ .

⇒ **Only the averaged (per V and T) frequencies of events is calculable.**

$(T_{\text{in}} (= T_{\text{initial}}) = -\infty, T_{\text{out}} (= T_{\text{final}}) = +\infty)$   $\uparrow$  We will see soon later.

Why the problem happens?  
Plane Wave is  
**non-normalisable!**



# plane-wave basis

[QFT textbooks]

✓ Plane wave — the **standard tool** for describing **particles**:

📌 Basis (@ Schrödinger Pic.):  $\langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle \propto e^{i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}$

(plane wave: the eigenstate of  $\mathbf{p}$ )  $\longleftrightarrow$   $\mathbf{x}$  completely undetermined  
(non-normalisable mode)

📌 Expansion of Scalar operator (in Int. Pic.):

$$\circ \hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 (2E_{\mathbf{p}})}} \left[ e^{+i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \hat{a}_{\mathbf{p}} + \text{h.c.} \right] \quad \left( E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_{\phi}^2} \right)$$

Wave function of plane wave  $\uparrow$  Annihilation op. for momentum- $\mathbf{p}$  state  $\uparrow$

$$\circ |\mathbf{p}\rangle = \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle$$

the one-particle state

(ignoring the overall factor  $e^{-iEt}$ )

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle \propto e^{i \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \Big|_{p^0 = E_{\mathbf{p}}}$$

- $x = \left( x^0 (= t), \mathbf{x} \right)$   
4d position
- $\langle \mathbf{x} | = \langle \mathbf{x} | e^{-i \hat{H}_{\text{free}} t}$   
Int. Pic. Sch. Pic.

# What is calculable?


□ So, what can we do in the plane-wave formalism?

○  $\psi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}V}} e^{-iE_{\mathbf{p}}t + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$  “literal normalisation”

○ [(PW) phase space] =  $\frac{(V)d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{(V)d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3}$

📌  $|S_{\text{PW}}|^2 \times [\text{phase space}]$

$$= (2\pi)^4 \delta^4(P_{\text{out}} - P_{\text{in}}) \frac{1}{2E_{\text{in}}} |M_{\text{PW}}|^2 \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2(2\pi)^3} \times T$$


↔

well defined  
(The volume is cancelled out.)
ill-defined!  
(since  $T \rightarrow \infty$ )

# What is calculable?

□ So, what can we do in the plane-wave formalism?

$$\circ \psi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}V}} e^{-iE_{\mathbf{p}}t + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$

$$\circ [(\text{PW}) \text{ phase space}] = \frac{(V)d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{(V)d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3}$$

$$\begin{aligned} & \text{📌 } |S_{\text{PW}}|^2 \times [\text{phase space}] \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(P_{\text{out}} - P_{\text{in}}) \frac{1}{2E_{\text{in}}} |M_{\text{PW}}|^2 \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2(2\pi)^3} \times T \end{aligned}$$

→  $|S_{\text{PW}}|^2 \times [\text{phase space}]$

$$= (2\pi)^4 \delta^4(P_{\text{out}} - P_{\text{in}}) \frac{1}{2E_{\text{in}}} |M_{\text{PW}}|^2 \frac{d^3\mathbf{p}_1}{2E_1(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{p}_2}{2E_2(2\pi)^3}$$

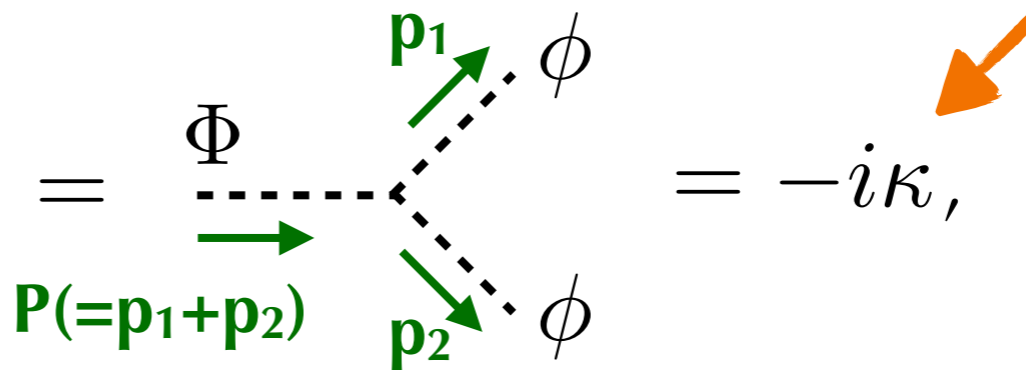
←————— well defined! —————→

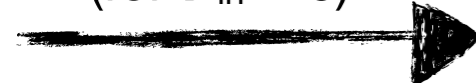
**The frequency per time (=  $\Gamma$ : decay rate) is well defined and calculatble.**

As we know very well,

□ In the case of  $\hat{H}_{\text{int}}(t) = \int d^3\mathbf{x} \frac{\kappa}{2} (\hat{\Phi}\hat{\phi}\hat{\phi}),$

the plane-wave amplitude;  
taking a **simple** form,  
easily derived via **Feynman rules**

○  $iM_{\text{PW}}(\Phi \rightarrow \phi\phi) =$    $= -i\kappa,$

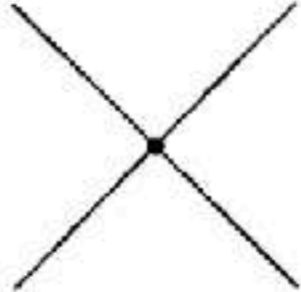
$(\text{for } \mathbf{P}_{\text{in}} = \mathbf{0})$    $\Gamma(\Phi \rightarrow \phi\phi) = \frac{\kappa^2}{32\pi m_\Phi} \sqrt{1 - \frac{4m_\phi^2}{m_\Phi^2}}$

## A.1 Feynman Rules

In all theories it is understood that momentum is conserved at each vertex, and that undetermined loop momenta are integrated over:  $\int d^4p/(2\pi)^4$ . Fermion (including ghost) loops receive an additional factor of  $(-1)$ , as explained on page 120. Finally, each diagram can potentially have a symmetry factor, as explained on page 93.

$$\phi^4 \text{ theory: } \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

Scalar propagator:   $= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$  (A.1)

$\phi^4$  vertex:   $= -i\lambda$  (A.2)

External scalar:   $= 1$  (A.3)

## A.1 Feynman Rules

In all theories it is understood that momentum is conserved at each vertex, and that undetermined loop momenta are integrated over:  $\int d^4p/(2\pi)^4$ . Fermion (including ghost) loops receive an additional factor of  $(-1)$ , as explained on page 120. Finally, each diagram can potentially have a symmetry factor, as explained on page 93.

$$\phi^4 \text{ theory: } \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

$$\text{Scalar propagator: } \begin{array}{c} \longrightarrow \\ p \end{array} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (\text{A.1})$$

The differential decay rate of an unstable particle to a given final state is

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_A} \left( \prod_f \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |\mathcal{M}(m_A \rightarrow \{p_f\})|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A - \sum p_f). \quad (\text{A.57})$$

For the special case of a two-particle final state, the Lorentz-invariant phase space takes the simple form

$$\left( \prod_f \int \frac{d^3p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p_i - \sum p_f) = \int \frac{d\Omega_{\text{cm}}}{4\pi} \frac{1}{8\pi} \left( \frac{2|\mathbf{p}|}{E_{\text{cm}}} \right), \quad (\text{A.58})$$

plitude;  
orm,  
man rules

# Gaussian basis

[Ishikawa, Shimomura (0508303), Ishikawa, Oda (1809.04285)]

☑ Key: Fields can be expanded in any complete sets of bases.

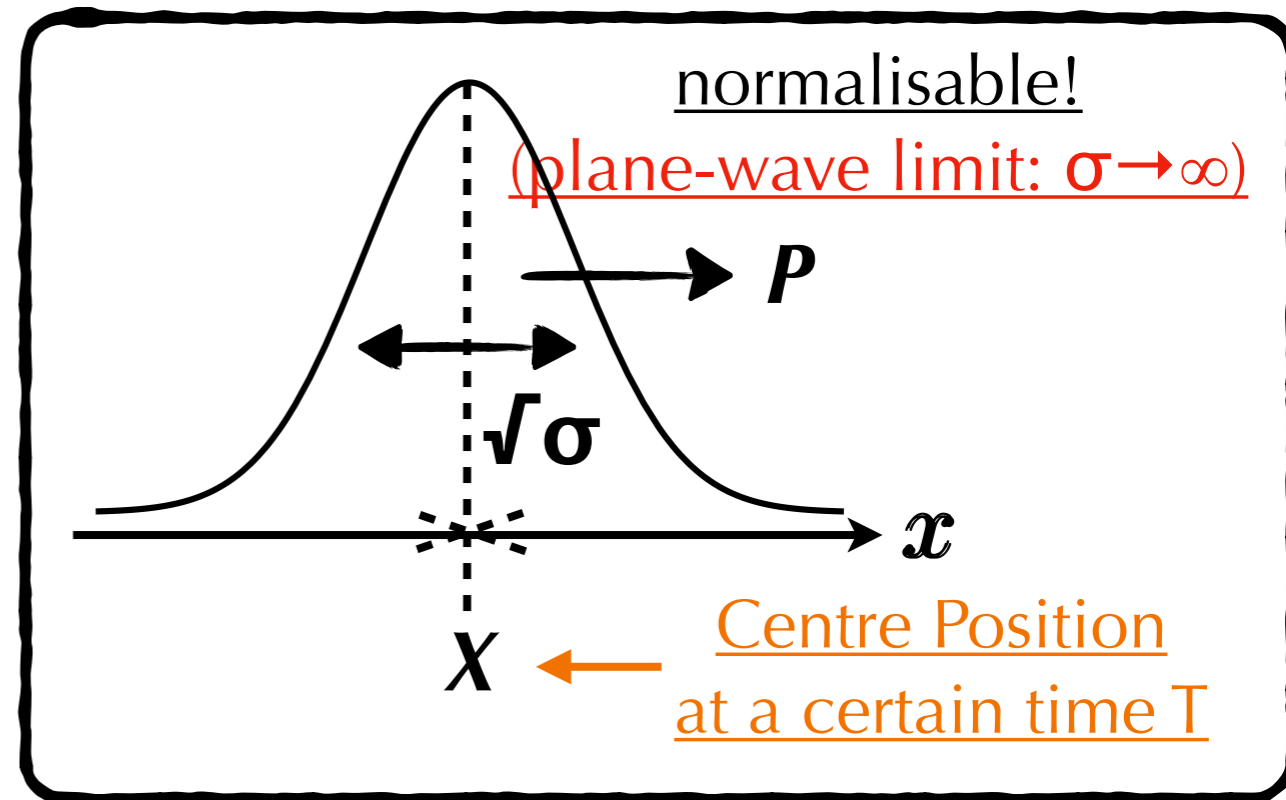
→ Perturbations under **normalised** bases are possible. → **Gaussian!**

☑ Gaussian basis  $\langle \mathbf{x} | \sigma, \mathbf{X}, \mathbf{P} \rangle$

📍 **Form (@ Schrödinger Pic.):**

$$\simeq e^{i\mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{X}) - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{X})^2}{2\sigma}}$$

(a coherent state) (when  $T=0$ )



# Gaussian basis

[Ishikawa, Shimomura (0508303), Ishikawa, Oda (1809.04285)]

☑ Key: Fields can be expanded in any complete sets of bases.

→ Perturbations under **normalised** bases are possible. → **Gaussian!**

☑ Gaussian basis  $\langle \mathbf{x} | \sigma, \mathbf{X}, \mathbf{P} \rangle$

📍 Form (@ Schrödinger Pic.):

$$\simeq e^{i\mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{X}) - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{X})^2}{2\sigma}}$$

(a coherent state) (when  $T=0$ )

📍 Expansion of Scalar operator  
(in Int. Pic.):

$$\circ \hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{X} d^3 \mathbf{P}}{(2\pi)^3} \left[ f_{\sigma, \mathbf{X}, \mathbf{P}}(x) \hat{A}(\sigma, \mathbf{X}, \mathbf{P}) + \text{h.c.} \right]$$

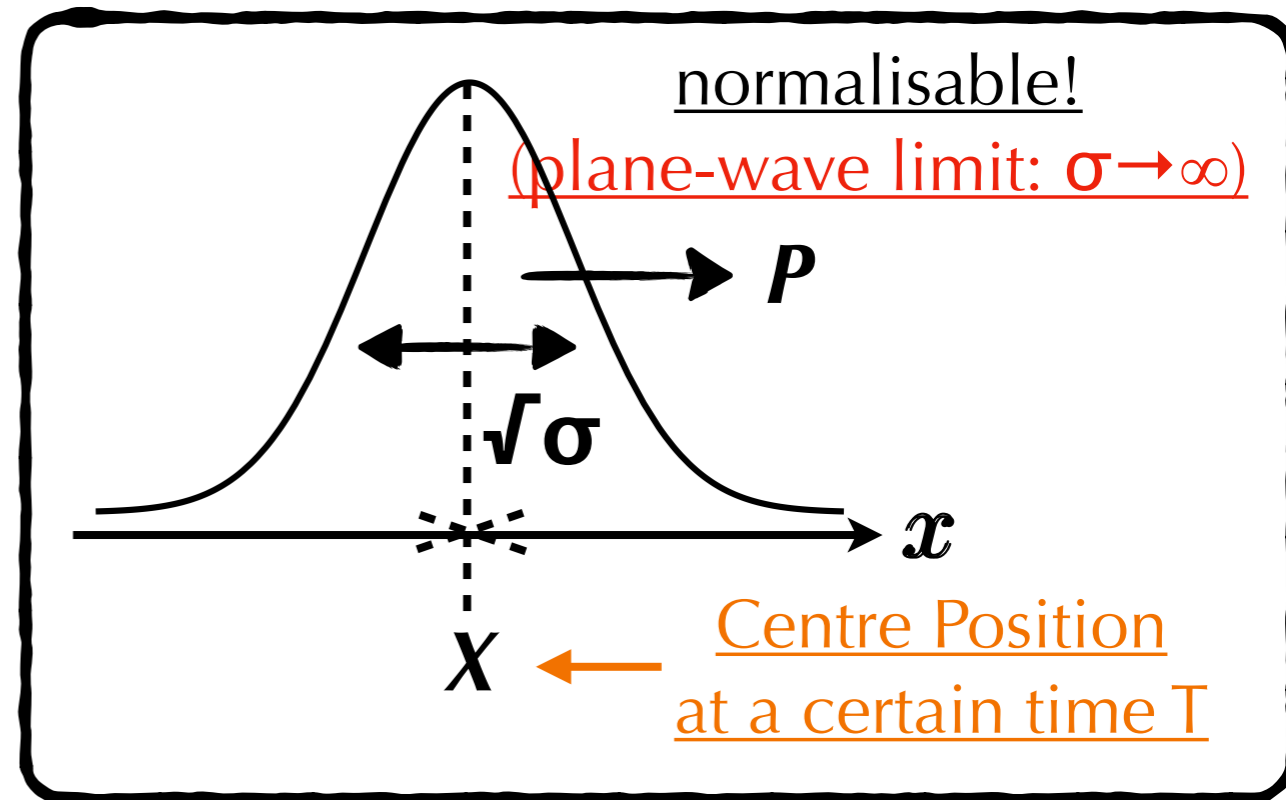
Wave function of Gaussian wave packet

( $\mathbf{X}$  is defined @  $T$ )

Annihilation op.  
for the corresponding wave-packet state

$$\circ |\mathcal{P}\rangle = \hat{A}^\dagger(\mathcal{P}) |0\rangle, \quad \left[ \mathcal{P} = \underbrace{\{\sigma, X^0 (= T), \mathbf{X}, \mathbf{P}\}}_{=: X} \right]$$

the one-particle state



**(SKIPPABLE)**  
**DETAILS**

# Gaussian wavefunction

[Ishikawa, Oda (1809.04285)]

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3 X d^3 P}{(2\pi)^3} \left[ f_{\sigma, X, P}(x) \hat{A}(\sigma, X, P) + \text{h.c.} \right]$$

Wave function of Gaussian wave packet  $\uparrow$

(X is defined @ T)

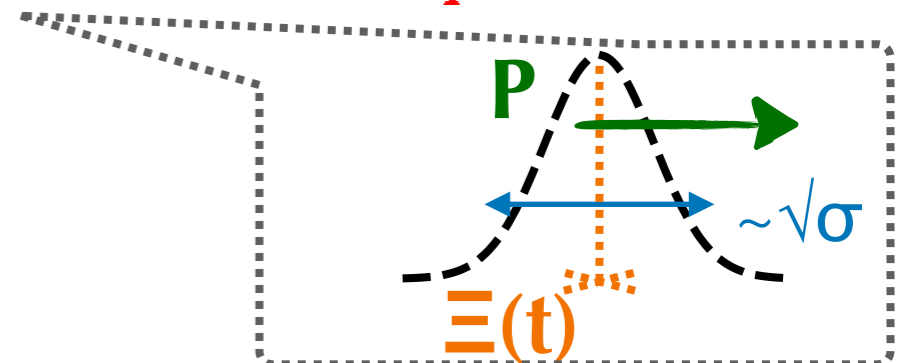
$$\begin{aligned} \circ f_{\sigma, X, P}(x) &:= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \overset{\text{Int. Pic.}}{\langle x | \mathbf{p} \rangle} \langle \mathbf{p} | \sigma, X, P \rangle \\ &= \left( \frac{\sigma}{\pi} \right)^{3/4} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{\sqrt{2p^0} (2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{p} \cdot (x - X) - \frac{\sigma}{2} (\mathbf{p} - P)^2} \Bigg|_{p^0 = E_{\mathbf{p}}} \end{aligned}$$

saddle-point approx. for a large  $\sigma$

$$\left( \frac{\sigma}{\pi} \right)^{3/4} \left( \frac{2\pi}{\sigma} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{2P^0} (2\pi)^{3/2}} e^{iP \cdot (x - X) - \frac{1}{2\sigma} (x - \mathbb{E}(t))^2} \Bigg|_{P^0 = E_P}$$

$$\mathbb{E}(t) := X + V(P)(t - T), \quad V(P) := P/E_P$$

Position of Centre of the Gaussian peak at the time (t)



**(SKIPPABLE)**  
**DETAILS**

## (some details on Gaussian state)

○ **Normalisable:**  $\langle \sigma, \mathbf{X}, \mathbf{P} | \sigma, \mathbf{X}, \mathbf{P} \rangle = 1$

○ **Coherent:**  $\delta x_i^2 = \frac{\sigma}{2}, \delta p_i^2 = \frac{1}{2\sigma} \quad (i = x, y, z)$

○ **Non-orthogonal:**

$$\langle \sigma, \mathbf{X}, \mathbf{P} | \sigma', \mathbf{X}', \mathbf{P}' \rangle = \left( \frac{\sigma_I}{\sigma_A} \right)^{3/4} e^{-\frac{1}{4\sigma_A} (\mathbf{X} - \mathbf{X}')^2 - \frac{\sigma_I}{4} (\mathbf{P} - \mathbf{P}')^2 + \frac{1}{2\sigma_I} (\sigma \mathbf{P} + \sigma' \mathbf{P}') \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}')}$$
$$\left( \sigma_A := \frac{\sigma + \sigma'}{2}, \sigma_I^{-1} := \frac{\sigma^{-1} + \sigma'^{-1}}{2} \right)$$

○ **Over-complete:**  $\int \frac{d^3 \mathbf{X} d^3 \mathbf{P}}{(2\pi)^3} |\sigma, \mathbf{X}, \mathbf{P} \rangle \langle \sigma, \mathbf{X}, \mathbf{P} | = \hat{1}$

○ **Algebra of Creation/Annihilation operators:**

$$\bullet \left[ \hat{A}(\sigma, T, \mathbf{X}, \mathbf{P}), \hat{A}^\dagger(\sigma', T, \mathbf{X}', \mathbf{P}') \right] = \langle \sigma, T, \mathbf{X}, \mathbf{P} | \sigma', T, \mathbf{X}', \mathbf{P}' \rangle$$

• (others) = 0

# S-matrix in Gaussian basis

☑ S-matrix (1 → 2) def.:

[Note: as in the plane-wave basis,  
but by the creation/annihilation  
operators for wave packets]

$$\mathcal{S} := \langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 | \text{T}e^{-i \int_{T_{\text{in}}}^{T_{\text{out}}} dt \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)} | \mathcal{P}_0 \rangle$$
$$\left[ \mathcal{P}_i = \left\{ \sigma_i, \underbrace{X_i^0 (= T_i), \mathbf{X}_i}_{=: X_i} \mathbf{P}_i \right\} \right]$$

This describes the amplitude for the finite probability/frequency  
of the event with fully-described initial & final particle states!

“additional”  
information

Normalisability of Gaussian  
can makes  $S$  itself finite!

# S-matrix in Gaussian basis

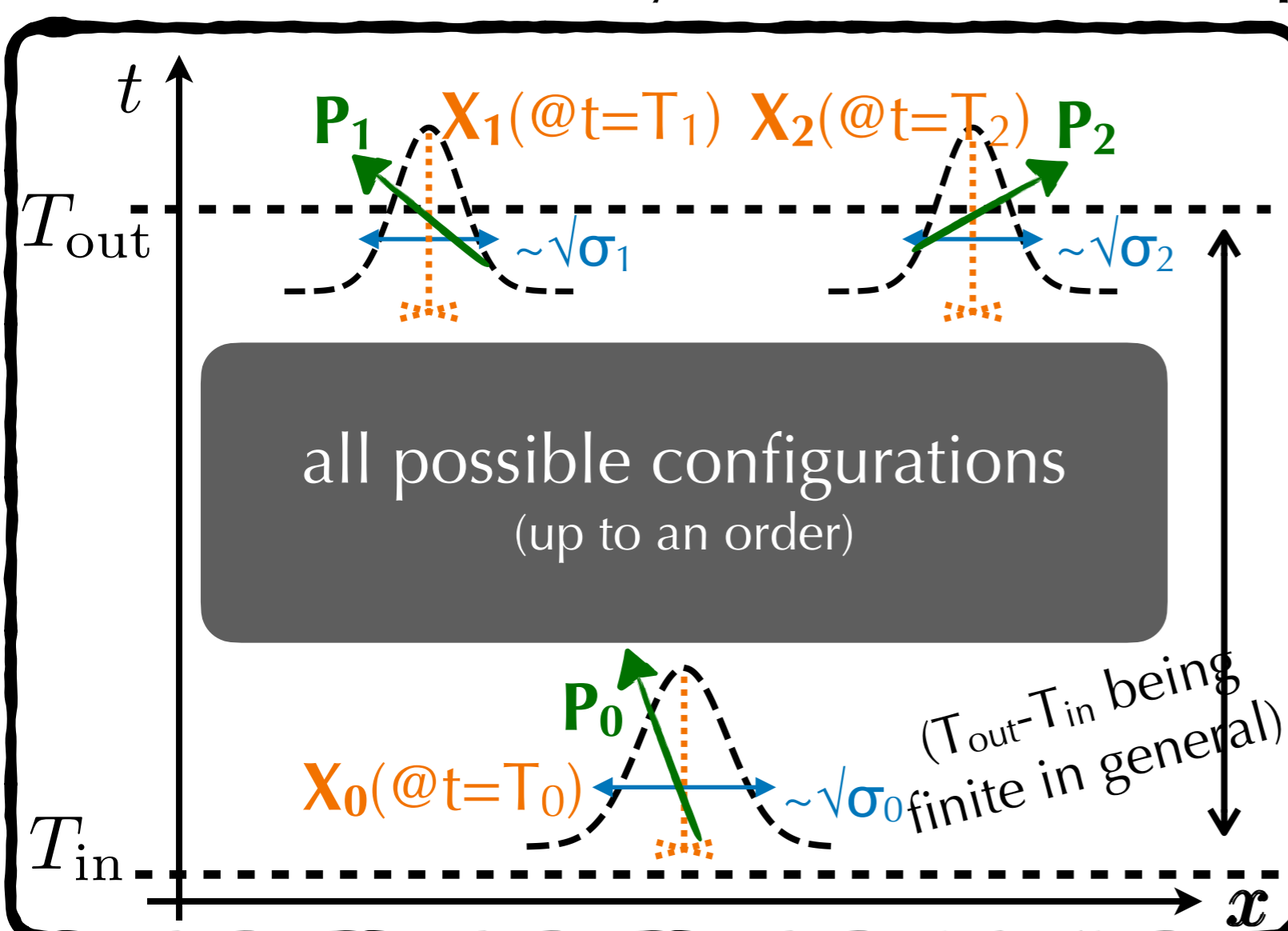
☑ S-matrix (1 → 2) def.:

[Note: as in the plane-wave basis, but by the creation/annihilation operators for wave packets]

$$S := \langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 | \text{T}e^{-i \int_{T_{\text{in}}}^{T_{\text{out}}} dt \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)} | \mathcal{P}_0 \rangle$$

$$[\mathcal{P}_i = \{ \sigma_i, \underbrace{X_i^0 (= T_i), \mathbf{X}_i, \mathbf{P}_i}_{=: X_i} \}]$$

This describes the amplitude for the **finite probability/frequency** of the **event** with **fully-described initial & final particle states!**



Normalisability of Gaussian can makes  $S$  itself finite!

○ First proposal by coherent state:  
[Ishikawa, Shimomura (0508303)]

○ Claims on various phenomena by Ishikawa-san et. al.

e.g. [Ishikawa, Jinnouchi, Kubota, Sloan, Tatsuishi (1901.03019)]

Experiment by the same group → (1907.01264)  
( $^{22}\text{Na} \rightarrow ^{22}\text{Ne}^* e^+ \nu, e^+ (e^-) \rightarrow 2\gamma$ )

# Short Summary

For the same focused physical  $1 \rightarrow 2$  process,

(note: we can similarly construct those for  $m \rightarrow n$  processes.)

\* plane-wave S-matrix:

- with partial information
- not suitably normalised

$$S_{\text{PW}} = \langle \overset{\text{out}}{\text{free state}} \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | \text{T}e^{-i \int_{T_{\text{in}}}^{T_{\text{out}}} dt \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)} | \overset{\text{in}}{\text{free state}} \mathbf{P}_0 \rangle$$

$$= (2\pi)^4 \delta^4(P_{\text{out}} - P_{\text{in}}) \times (iM_{\text{PW}})$$

not equal



more informative

suitable limits/marginalisations

\* Gaussian S-matrix:

- with full information
- normalised appropriately

$$S := \langle \overset{\text{out}}{\text{free state}} \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 | \text{T}e^{-i \int_{T_{\text{in}}}^{T_{\text{out}}} dt \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)} | \overset{\text{in}}{\text{free state}} \mathcal{P}_0 \rangle$$

$$\left[ \mathcal{P}_i = \left\{ \sigma_i, \underbrace{X_i^0 (= T_i), \mathbf{X}_i}_{=: X_i}, P_i \right\} \right]$$

“additional” information



# Short Summary

For the same focused physical  $1 \rightarrow 2$  process,

(note: we can similarly construct those for  $m \rightarrow n$  processes.)

## \* plane-wave S-matrix:

- with partial information
- not suitably normalised

$$|S_{\text{PW}}|^2 \text{ is ill defined.} \quad \text{(dimensionful, relative frequency)}$$
$$d\Gamma = \frac{|S_{\text{PW}}|^2}{T} \frac{(V)d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{(V)d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3}$$

External states are characterised by momenta.

## \* Gaussian S-matrix:

- with **full** information
- **normalised** appropriately

$$|\mathcal{S}|^2 \text{ itself is **well** defined.} \quad \text{(dimensionless, absolute frequency)}$$
$$dP = |\mathcal{S}|^2 \frac{d^3\mathbf{X}_1 d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{X}_2 d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^3}$$

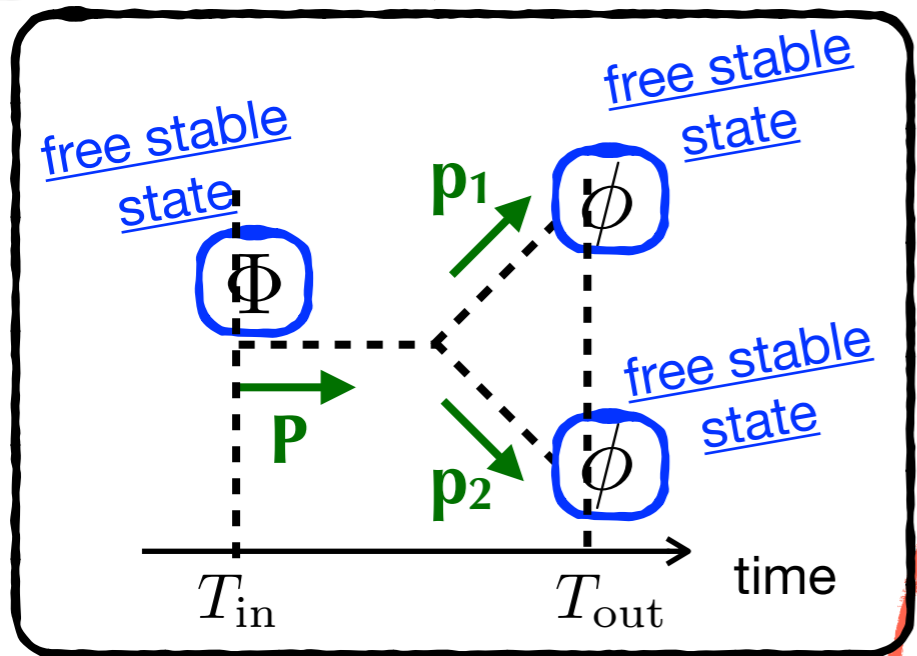
External states are characterised by momenta and positions of centres.

**第三部:**  
**波束計算の詳細と、**  
**クォーコニウム崩壊を通しての**  
**波束効果の実験的検証**

(プロ向け、~15分)

# Two contributions in P

□ Gaussian波束形式での、崩壊確率の計算:



幅の大きな波束  
(平面波に対応に近い)

[Ishikawa, Oda (1809.04285)]

$$P = \int |\mathcal{S}|^2 \frac{d^3 \mathbf{X}_1 d^3 \mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{X}_2 d^3 \mathbf{p}_2}{(2\pi)^3}$$

$$\simeq \Gamma(T_{\text{out}} - T_{\text{in}}) + \Delta P$$

↑  
典型的な時間幅 ( $T_{\text{out}} - T_{\text{in}}$ ),

‘フェルミの黄金律’

↑  
無次元量

↑  
典型的な時間幅 ( $T_{\text{out}} - T_{\text{in}}$ )

に依存しない

↑  
無次元量

↑  
[崩壊幅( $\Gamma$ )]

× [時間間隔]

↑  
“平均崩壊確率”

からのズレ

⇒ 平均崩壊確率

**(SKIPPABLE)**  
**DETAILS**

# S-matrix of the simplest 1→2: $\Phi \rightarrow \phi\phi$

[Ishikawa, Oda (1809.04285)]

□ When  $\hat{H}_{\text{int}}(t) = \int d^3\mathbf{x} \frac{\kappa}{2} (\hat{\Phi}\hat{\phi}\hat{\phi})$ , for finite  $T_{\text{in}}$  &  $T_{\text{out}}$ ,  $S$  becomes

$$S := \langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 | \mathcal{T} e^{-i \int_{T_{\text{in}}}^{T_{\text{out}}} dt \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)} | \mathcal{P}_0 \rangle$$

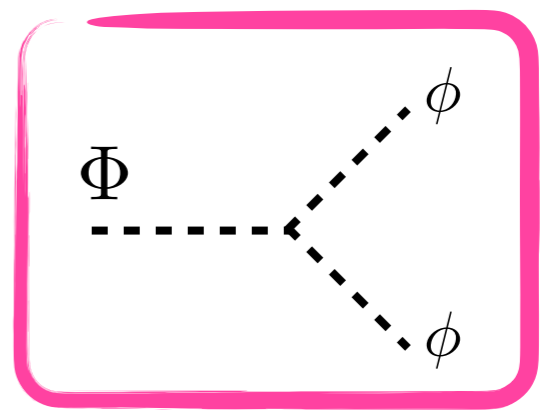
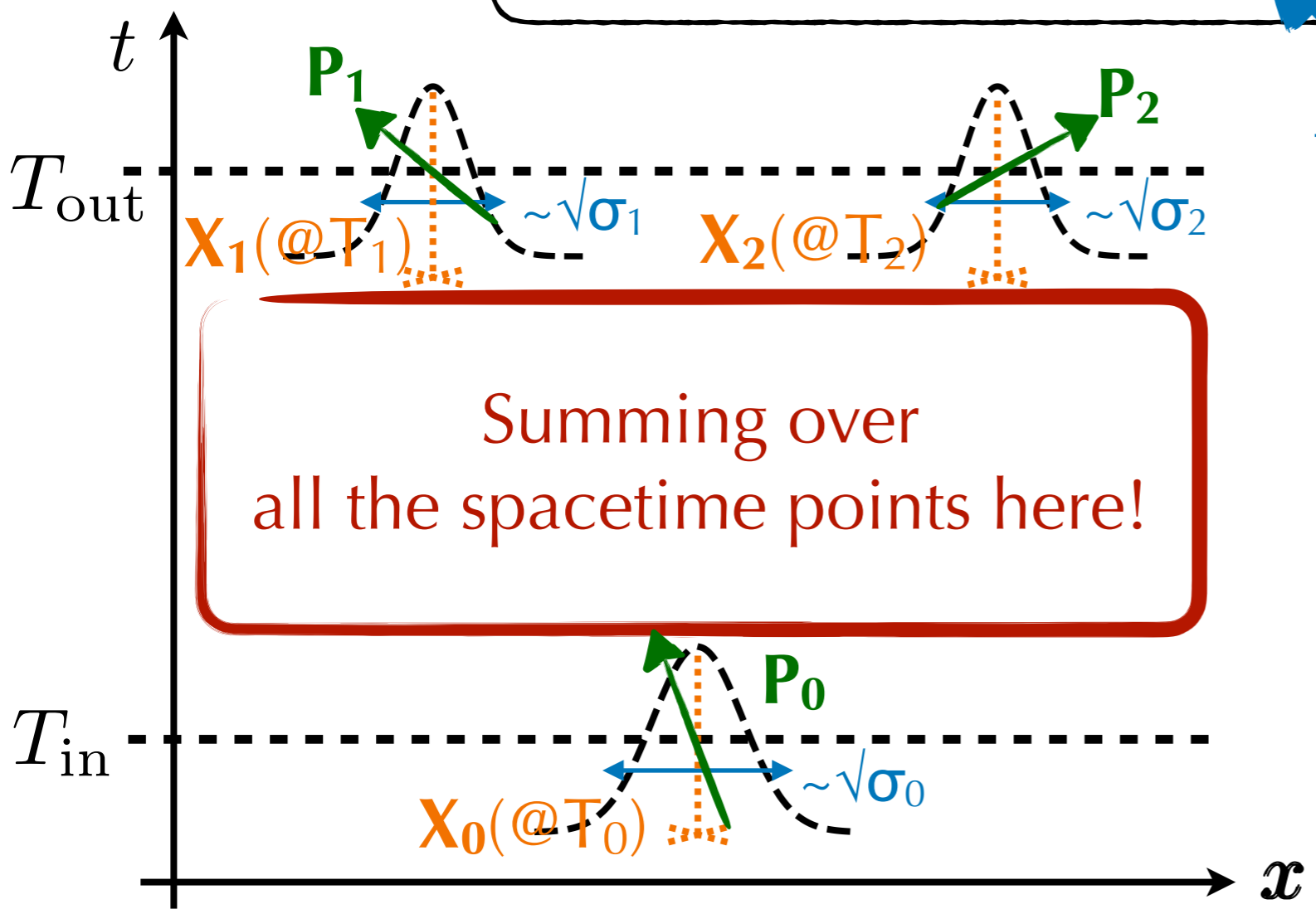
free out-state
free in-state

$(\Pi_i := \{X_i, P_i\})$

Wick's theorem  
for A and A<sup>+</sup> (@LO)

$$-\frac{i\kappa}{\sqrt{2}} \int_{T_{\text{in}}}^{T_{\text{out}}} dt \int d^3\mathbf{x} f_{\phi, \sigma_1; \Pi_1}^*(x) f_{\phi, \sigma_2; \Pi_2}^*(x) f_{\Phi, \sigma_0; \Pi_0}(x)$$

"Wave-packet Feynman Rule"



**(SKIPPABLE)**  
**DETAILS**

# (Wick contraction for on-shell part)

[Ishikawa, Oda (1809.04285)]

$$\begin{aligned} \circ \hat{A}_{\sigma_3}(\Pi_3) \hat{\phi}(x) &= \int d^6 \mathbf{\Pi} f_{\sigma; \Pi}^*(x) \left[ \hat{A}_{\sigma_3}(\Pi_3), \hat{A}_{\sigma}^{\dagger}(\Pi) \right] \left( \Pi_i = \underbrace{\{X_i^0, \mathbf{X}_i, \mathbf{P}_i\}}_{X_i} \right) \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{for a final state} \\ &= \int d^6 \mathbf{\Pi} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{\sqrt{2E_{\phi}(\mathbf{p})}} \langle \sigma; \Pi | \phi, \mathbf{p} \rangle \langle \phi, \mathbf{p} | \phi, x \rangle \langle \sigma_3; \Pi_3 | \phi, \sigma; \Pi \rangle \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{\sqrt{2E_{\phi}(\mathbf{p})}} \langle \sigma_3; \Pi_3 | \phi, \mathbf{p} \rangle \langle \phi, \mathbf{p} | \phi, x \rangle \\ &= f_{\sigma_3; \Pi_3}^*(x) \end{aligned}$$

**(SKIPPABLE)**  
**DETAILS**

# S-matrix of the simplest 1→2: $\Phi \rightarrow \phi\phi$

[Ishikawa, Oda (1809.04285)]

□ When  $\hat{H}_{\text{int}}(t) = \int d^3\mathbf{x} \frac{\kappa}{2} (\hat{\Phi}\hat{\phi}\hat{\phi})$ , for finite  $T_{\text{in}}$  &  $T_{\text{out}}$ ,  $S$  becomes

$$S := \langle \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 | \mathbb{T} e^{-i \int_{T_{\text{in}}}^{T_{\text{out}}} dt \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)} | \mathcal{P}_0 \rangle$$

free out-state
free in-state

$(\Pi_i := \{X_i, P_i\})$

→  
Wick's theorem  
for  $A$  and  $A^\dagger$  (@LO)

$$-\frac{i\kappa}{\sqrt{2}} \int_{T_{\text{in}}}^{T_{\text{out}}} dt \int d^3\mathbf{x} f_{\phi, \sigma_1; \Pi_1}^*(x) f_{\phi, \sigma_2; \Pi_2}^*(x) f_{\Phi, \sigma_0; \Pi_0}(x)$$

## [Reminder]

[Details of **Gaussian (on-shell) wave functions**]

$$f_{\Psi, \sigma; \Pi}(x) = \left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^{3/4} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{2p^0} (2\pi)^{3/2}} e^{ip \cdot (x-X) - \frac{\sigma}{2} (\mathbf{p}-\mathbf{P})^2} \Big|_{p^0 = E_\Psi(\mathbf{p})}$$

saddle-point approx. for a large  $\sigma$



$$\left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^{3/4} \left(\frac{2\pi}{\sigma}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{2P^0} (2\pi)^{3/2}} e^{iP \cdot (x-X) - \frac{(x-\Xi(t))^2}{2\sigma}} \Big|_{P^0 = E_\Psi(\mathbf{P})}$$

**(SKIPPABLE)**  
**DETAILS**

# S-matrix of the simplest 1→2: $\Phi \rightarrow \phi\phi$

[Ishikawa, Oda (1809.04285)]

□ When  $\hat{H}_{\text{int}}(t) = \int d^3\mathbf{x} \frac{\kappa}{2} (\hat{\Phi}\hat{\phi}\hat{\phi})$ , for finite  $T_{\text{in}}$  &  $T_{\text{out}}$ ,  $S$  becomes

$$S := \langle \overset{\text{free out-state}}{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2} | \text{T}e^{-i \int_{T_{\text{in}}}^{T_{\text{out}}} dt \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)} | \overset{\text{free in-state}}{\mathcal{P}_0} \rangle$$

( $\Pi_i := \{X_i, P_i\}$ )

→  
Wick's theorem  
for  $A$  and  $A^\dagger$  (@LO)

$$-\frac{i\kappa}{\sqrt{2}} \int_{T_{\text{in}}}^{T_{\text{out}}} dt \int d^3\mathbf{x} f_{\phi, \sigma_1; \Pi_1}^*(x) f_{\phi, \sigma_2; \Pi_2}^*(x) f_{\Phi, \sigma_0; \Pi_0}(x)$$

[Reminder]

$$\Xi(t) := X + V_\Psi(P)(t - T)$$

Uniform linear motion  
of the centre (= Peak!)

$$V_\Psi(P) := P/E_\Psi(P)$$

$$E_\Psi(P) := \sqrt{P^2 + m_\psi^2}$$

$f_{\Psi, \sigma; \Pi}(x) \simeq$

$$\left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^{3/4} \left(\frac{2\pi}{\sigma}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{2P^0} (2\pi)^{3/2}} e^{iP \cdot (x - X) - \frac{(x - \Xi(t))^2}{2\sigma}} \Bigg|_{P^0 = E_\Psi(P)}$$

**(SKIPPABLE)**  
**DETAILS**

# S-matrix of the simplest 1→2: $\Phi \rightarrow \phi\phi$

[Ishikawa, Oda (1809.04285)]

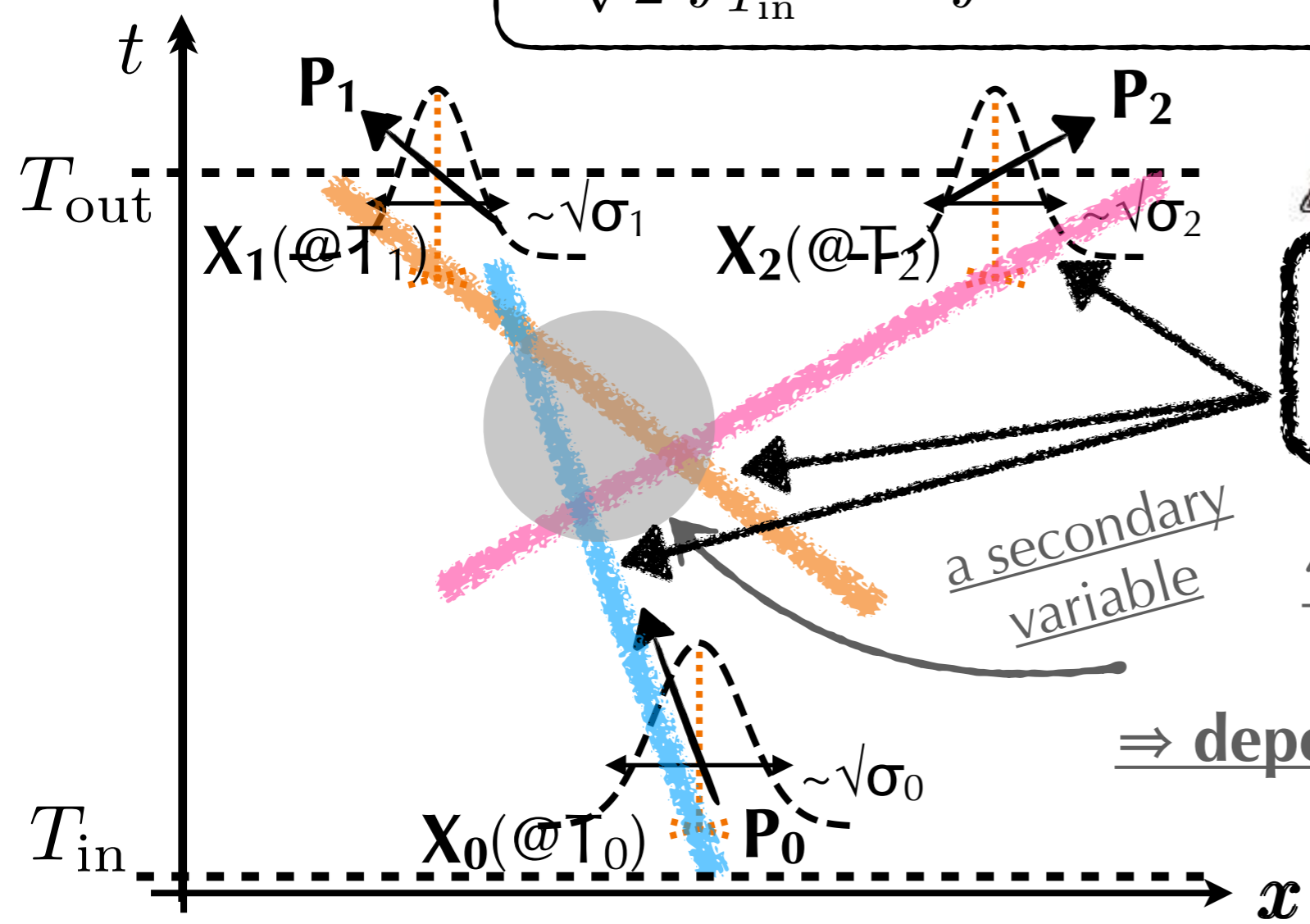
□ When  $\hat{H}_{\text{int}}(t) = \int d^3\mathbf{x} \frac{\kappa}{2} (\hat{\Phi}\hat{\phi}\hat{\phi})$ , for finite  $T_{\text{in}}$  &  $T_{\text{out}}$ ,  $S$  becomes

$$S := \langle \overset{\text{free out-state}}{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2} | \text{T}e^{-i \int_{T_{\text{in}}}^{T_{\text{out}}} dt \hat{H}_{\text{int}}^{(I)}(t)} | \overset{\text{free in-state}}{\mathcal{P}_0} \rangle$$

$(\Pi_i := \{X_i, P_i\})$

Wick's theorem  
for  $A$  and  $A^\dagger$  (@LO)

$$-\frac{i\kappa}{\sqrt{2}} \int_{T_{\text{in}}}^{T_{\text{out}}} dt \int d^3\mathbf{x} f_{\phi, \sigma_1; \Pi_1}^*(x) f_{\phi, \sigma_2; \Pi_2}^*(x) f_{\Phi, \sigma_0; \Pi_0}(x)$$



**“(classical) trajectories”  
⇒ charactering the S-matrix**

“overlap domain of  
the wave packets”

⇒ depending on the trajectories

# Result of $S(\Phi \rightarrow \phi\phi)$

$$S = -\frac{i\kappa}{\sqrt{2}} \left( \prod_{A(=0,1,2)} (\pi\sigma_A)^{-3/4} \frac{1}{\sqrt{2E_A}} \right) e^{-\frac{\sigma_t}{2}(\delta\omega)^2 - \frac{\sigma_s}{2}(\delta\mathbf{P})^2 - \frac{\mathcal{R}}{2}} (2\pi\sigma_s)^{3/2} \sqrt{2\pi\sigma_t} G(\mathcal{T})$$

*an exact form*

normalisation factors  
of Gaussians

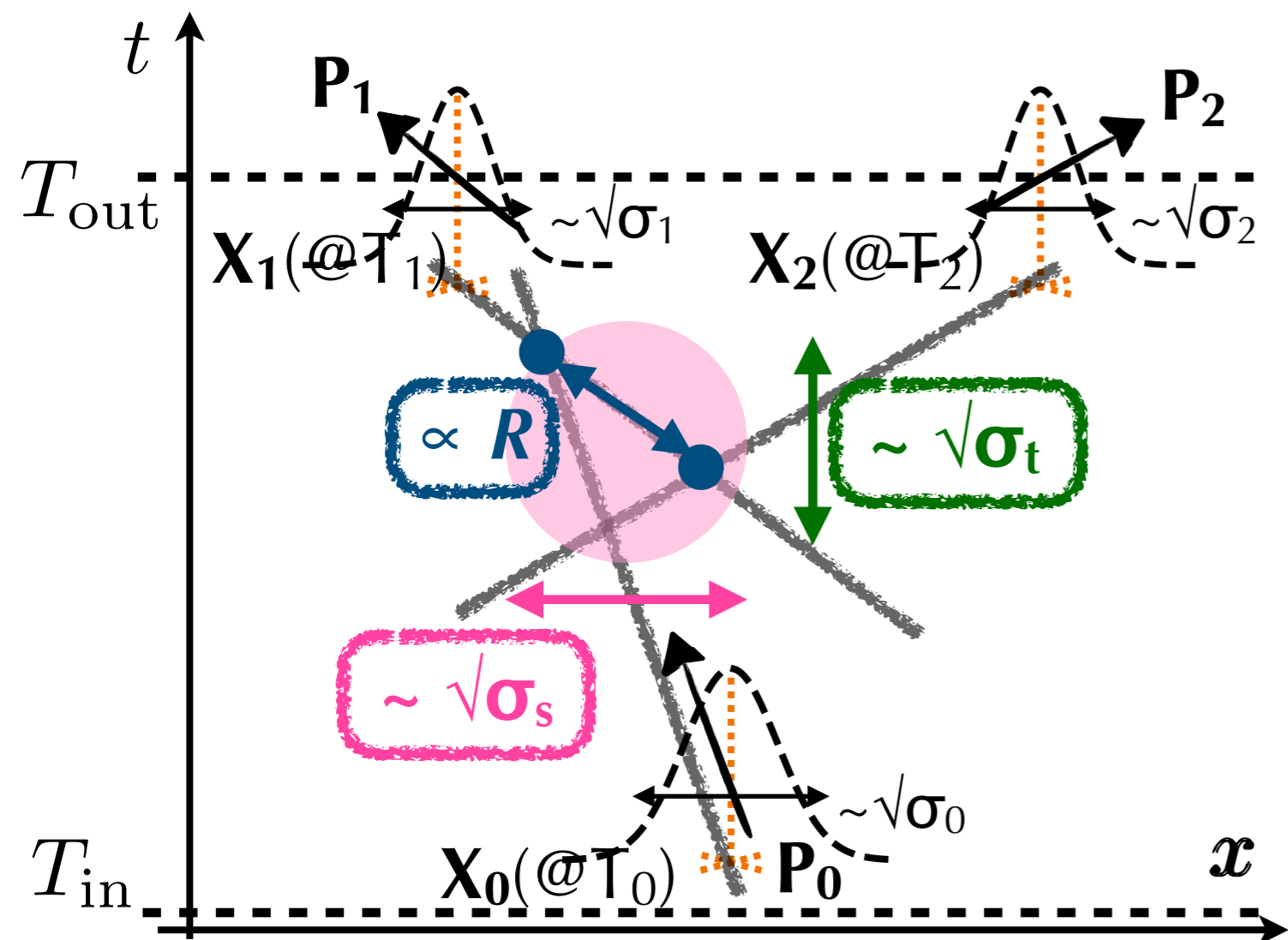
overlaps of the wave packets  
(including approximated  
Energy-Momentum conservation)

# Result of $S(\Phi \rightarrow \phi\phi)$

$$S = -\frac{i\kappa}{\sqrt{2}} \left( \prod_{A(=0,1,2)} (\pi\sigma_A)^{-3/4} \frac{1}{\sqrt{2E_A}} \right) e^{-\frac{\sigma_t}{z}(\delta\omega)^2 - \frac{\sigma_s}{z}(\delta P)^2 - \frac{\mathcal{R}}{z}} (2\pi\sigma_s)^{3/2} \sqrt{2\pi\sigma_t} G(\mathcal{Z})$$

- Feature **①**: Geometrical variables characterise  $S$ .

$$(\delta\omega \sim \delta E := E_{\text{out}} - E_{\text{in}}, \delta P := P_{\text{out}} - P_{\text{in}})$$



# Result of $S(\Phi \rightarrow \phi\phi)$

$$S = -\frac{i\kappa}{\sqrt{2}} \left( \prod_{A(=0,1,2)} (\pi\sigma_A)^{-3/4} \frac{1}{\sqrt{2E_A}} \right) e^{-\frac{\sigma_t}{2}(\delta\omega)^2 - \frac{\sigma_s}{2}(\delta P)^2} \frac{\mathcal{R}}{2} (2\pi\sigma_s)^{3/2} \sqrt{2\pi\sigma_t} G(\mathcal{T})$$

• **Feature ①**: Geometrical variables characterise  $S$ .

$(\delta\omega \sim \delta E := E_{\text{out}} - E_{\text{in}}, \delta P := P_{\text{out}} - P_{\text{in}})$

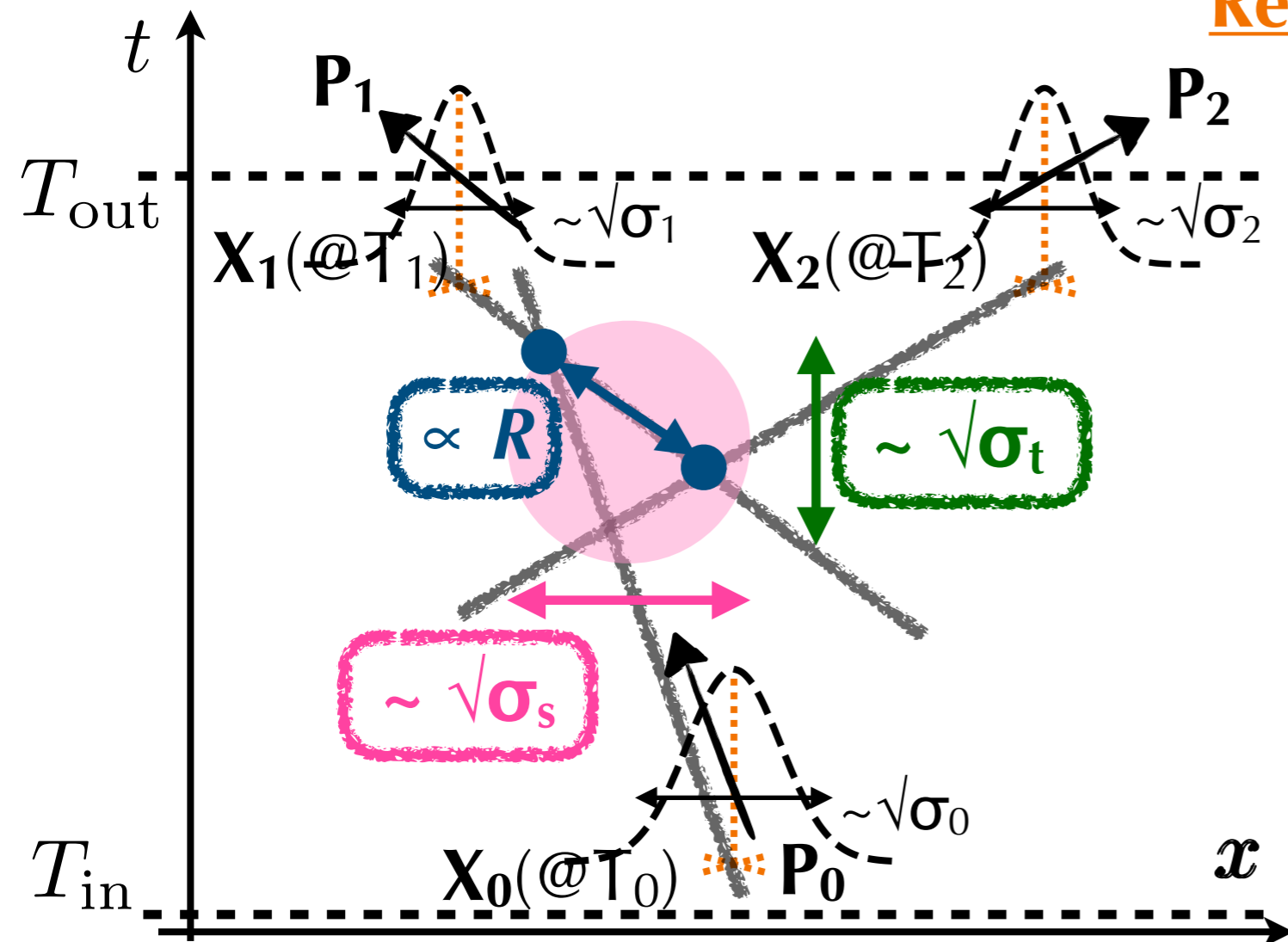
• **Feature ②**:

The limit  $(\sigma_s \rightarrow \infty$  and  $\sigma_t \rightarrow \infty) \Rightarrow$

Recovery of the energy-momentum conservation

Note:

$$\left( \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} e^{-\frac{\sigma}{2}(p-p_0)^2} \xrightarrow{\sigma \rightarrow \infty} \delta(p-p_0) \right)$$



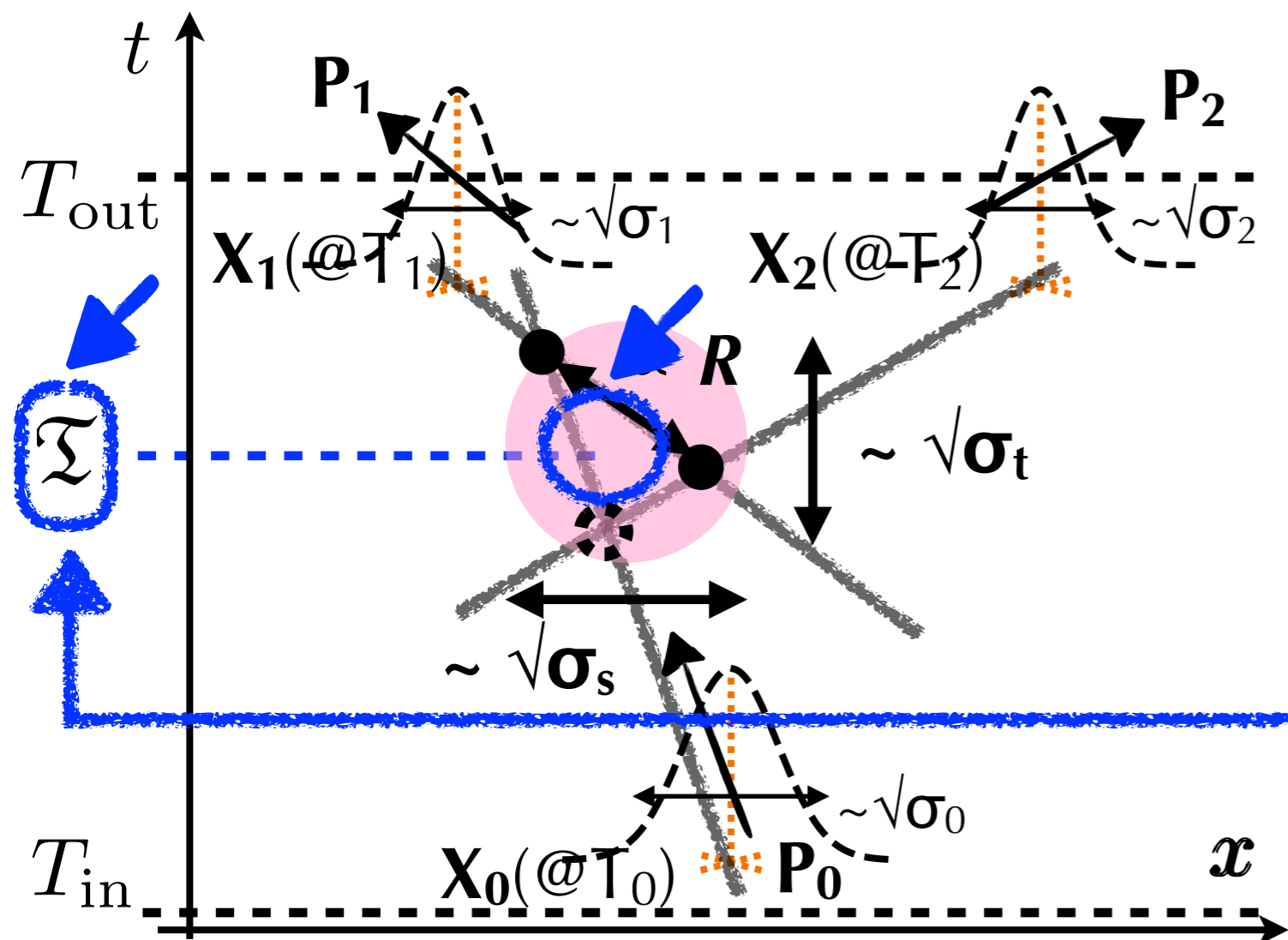
# Result of $S(\Phi \rightarrow \phi\phi)$

$$S = -\frac{i\kappa}{\sqrt{2}} \left( \prod_{A(=0,1,2)} (\pi\sigma_A)^{-3/4} \frac{1}{\sqrt{2E_A}} \right) e^{-\frac{\sigma_t}{2}(\delta\omega)^2 - \frac{\sigma_s}{2}(\delta\mathbf{P})^2 - \frac{\mathcal{R}}{2}} (2\pi\sigma_s)^{3/2} \sqrt{2\pi\sigma_t} G(\mathfrak{T})$$

- **Feature ③**: Terms are classified into “bulk” and “boundary”.

$\mathfrak{T}$ : time of overlap (around which three wave packets overlap).

“window function”



determined by the trajectories  
(configurations of  
external particles)

# Bulk & Boundary terms

$$S = -\frac{i\kappa}{\sqrt{2}} \left( \prod_{A(=0,1,2)} (\pi\sigma_A)^{-3/4} \frac{1}{\sqrt{2E_A}} \right) e^{-\frac{\sigma_t}{2}(\delta\omega)^2 - \frac{\sigma_s}{2}(\delta\mathbf{P})^2 - \frac{\mathcal{R}}{2}} (2\pi\sigma_s)^{3/2} \sqrt{2\pi\sigma_t} G(\mathfrak{T})$$

- **Significant Feature:** Terms are classified into “bulk” and “boundary”

$\mathfrak{T}$ : time of overlap (around which three wave packets overlap).

approximately

$$G(\mathfrak{T}) \approx \frac{1}{2} \left[ \text{sgn} \left( \frac{\mathfrak{T} - T_{\text{in}} + i\sigma_t\delta\omega}{\sqrt{2\sigma_t}} \right) - \text{sgn} \left( \frac{\mathfrak{T} - T_{\text{out}} + i\sigma_t\delta\omega}{\sqrt{2\sigma_t}} \right) \right] \triangle!$$

$$\frac{e^{-\frac{(\mathfrak{T} - T_{\text{in}})^2}{2\sigma_t} + \frac{\sigma_t}{2}(\delta\omega)^2 - i\delta\omega(\mathfrak{T} - T_{\text{in}})}}{i\sqrt{2\pi\sigma_t} [\delta\omega - i(\mathfrak{T} - T_{\text{in}})/\sigma_t]}$$

$$+ \frac{e^{-\frac{(\mathfrak{T} - T_{\text{out}})^2}{2\sigma_t} + \frac{\sigma_t}{2}(\delta\omega)^2 - i\delta\omega(\mathfrak{T} - T_{\text{out}})}}{i\sqrt{2\pi\sigma_t} [\delta\omega - i(\mathfrak{T} - T_{\text{out}})/\sigma_t]}$$

# Bulk & Boundary terms

$$S = -\frac{i\kappa}{\sqrt{2}} \left( \prod_{A(=0,1,2)} (\pi\sigma_A)^{-3/4} \frac{1}{\sqrt{2E_A}} \right) e^{-\frac{\sigma_t}{2}(\delta\omega)^2 - \frac{\sigma_s}{2}(\delta\mathbf{P})^2 - \frac{\mathcal{R}}{2}} (2\pi\sigma_s)^{3/2} \sqrt{2\pi\sigma_t} G(\mathfrak{T})$$

- **Significant Feature:** Terms are classified into **“bulk”** and **“boundary”**

$\mathfrak{T}$ : time of overlap (around which three wave packets overlap).

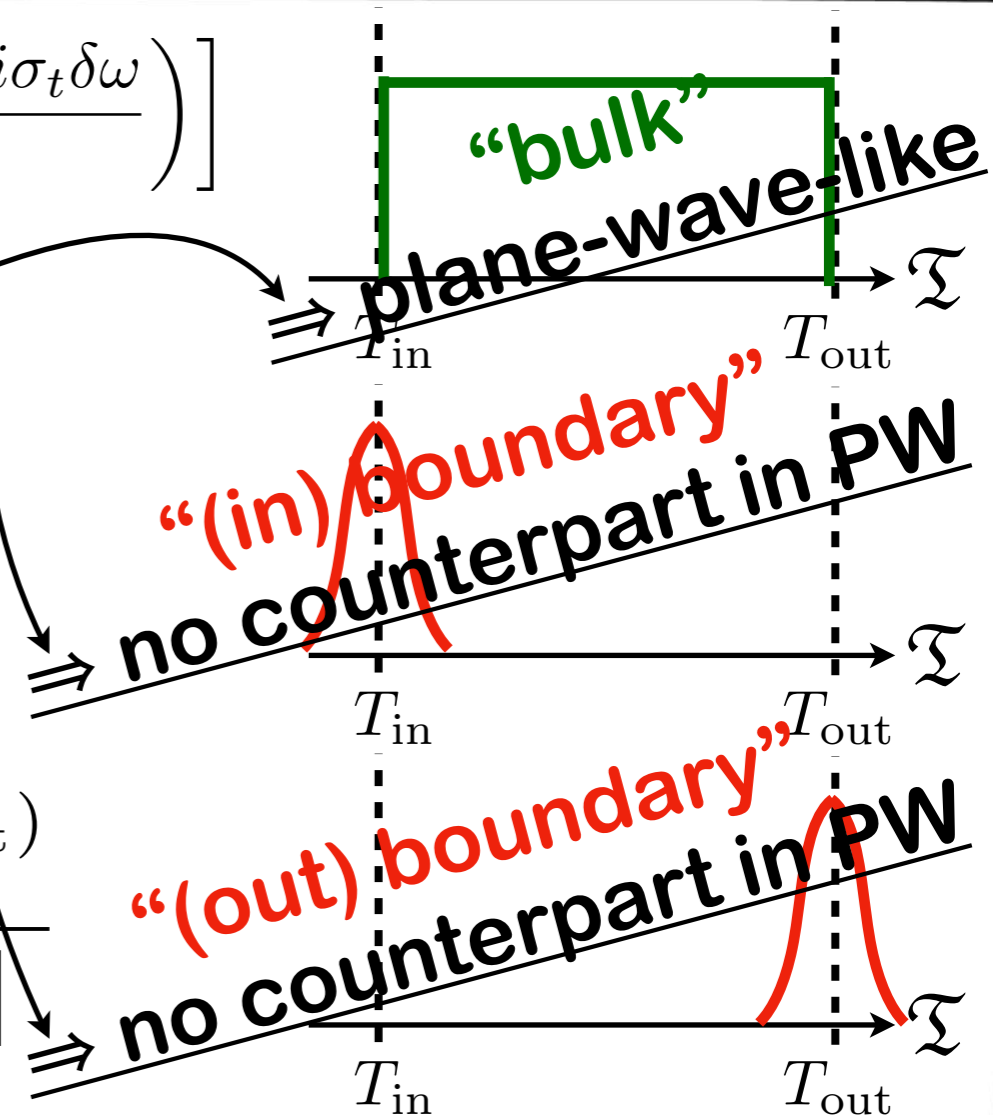
approximately

$$G(\mathfrak{T}) \simeq \frac{1}{2} \left[ \text{sgn} \left( \frac{\mathfrak{T} - T_{\text{in}} + i\sigma_t\delta\omega}{\sqrt{2\sigma_t}} \right) - \text{sgn} \left( \frac{\mathfrak{T} - T_{\text{out}} + i\sigma_t\delta\omega}{\sqrt{2\sigma_t}} \right) \right]$$

[in the causality point of view]

$$\frac{e^{-\frac{(\mathfrak{T} - T_{\text{in}})^2}{2\sigma_t} + \frac{\sigma_t}{2}(\delta\omega)^2 - i\delta\omega(\mathfrak{T} - T_{\text{in}})}}{i\sqrt{2\pi\sigma_t} [\delta\omega - i(\mathfrak{T} - T_{\text{in}})/\sigma_t]}$$

$$+ \frac{e^{-\frac{(\mathfrak{T} - T_{\text{out}})^2}{2\sigma_t} + \frac{\sigma_t}{2}(\delta\omega)^2 - i\delta\omega(\mathfrak{T} - T_{\text{out}})}}{i\sqrt{2\pi\sigma_t} [\delta\omega - i(\mathfrak{T} - T_{\text{out}})/\sigma_t]}$$



# Result of $S(\Phi \rightarrow \phi\phi)$

$$S = -\frac{i\kappa}{\sqrt{2}} \left( \prod_{A(=0,1,2)} (\pi\sigma_A)^{-3/4} \frac{1}{\sqrt{2E_A}} \right) e^{-\frac{\sigma_t}{2}(\delta\omega)^2 - \frac{\sigma_s}{2}(\delta\mathbf{P})^2 - \frac{\mathcal{R}}{2}} (2\pi\sigma_s)^{3/2} \sqrt{2\pi\sigma_t} G(\mathcal{T})$$

☑ In "1→2",

- Bulk part is "time-universal". As expected, we can show

[Marginalised rate  
per (Volume) & (Time),  
from  $S_{\text{bulk}} @ \mathbf{P}_0 \rightarrow \mathbf{0}$ ]

$$= \left[ \frac{\int d^3 \mathbf{X}_{0(=\text{in})}}{V(T_{\text{out}} - T_{\text{in}})} \int \prod_{j=1,2} \frac{d^3 \mathbf{X}_j d^3 \mathbf{P}_j}{(2\pi)^3} |S_{\text{bulk}}|^2 \right]_{\mathbf{P}_0 \rightarrow \mathbf{0}}$$

$(\sigma_s \rightarrow \infty \text{ and } \sigma_t \rightarrow \infty: \text{"plane-wave limit"})$

$\Gamma_{\Phi \rightarrow \phi\phi}^{(\text{plane-wave})}$  (the decay width from  $S_{\text{plane-wave}}$ )

$$G(\mathcal{T}) \supset \frac{1}{2} \left[ \text{sgn} \left( \frac{\mathcal{T} - T_{\text{in}} + i\sigma_t \delta\omega}{\sqrt{2\sigma_t}} \right) - \text{sgn} \left( \frac{\mathcal{T} - T_{\text{out}} + i\sigma_t \delta\omega}{\sqrt{2\sigma_t}} \right) \right]$$



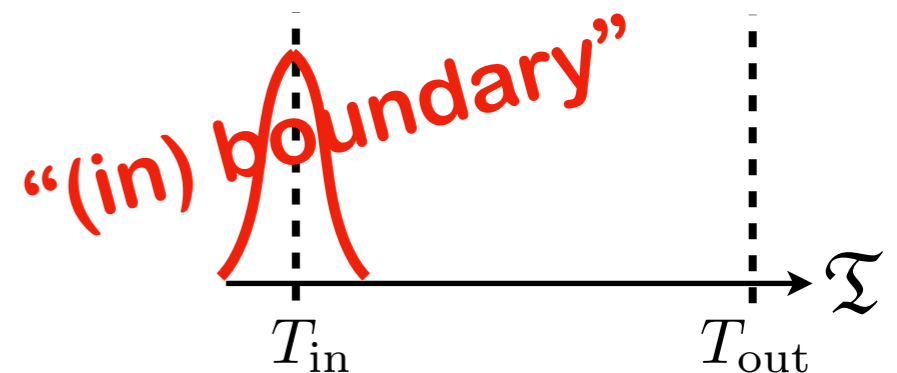
# Result of $S(\Phi \rightarrow \phi\phi)$

$$S = -\frac{i\kappa}{\sqrt{2}} \left( \prod_{A(=0,1,2)} (\pi\sigma_A)^{-3/4} \frac{1}{\sqrt{2E_A}} \right) e^{-\frac{\sigma_t}{2}(\delta\omega)^2 - \frac{\sigma_s}{2}(\delta P)^2 - \frac{\mathcal{R}}{2}} (2\pi\sigma_s)^{3/2} \sqrt{2\pi\sigma_t} G(\mathcal{T})$$

☑ In “1→2”,

- No counterpart of **boundary** terms exists in  $S_{\text{plane-wave}}$ .
- Suppression via energy-non-conservation is **relaxed** as “Exponential” → “Power” [∴ Enhancement].

$$G(\mathcal{T}) \supset \frac{e^{-\frac{(\mathcal{T}-T_{\text{in}})^2}{2\sigma_t} + \frac{\sigma_t}{2}(\delta\omega)^2 - i\delta\omega(\mathcal{T}-T_{\text{in}})}}{i\sqrt{2\pi\sigma_t} [\delta\omega - i(\mathcal{T}-T_{\text{in}})/\sigma_t]}$$

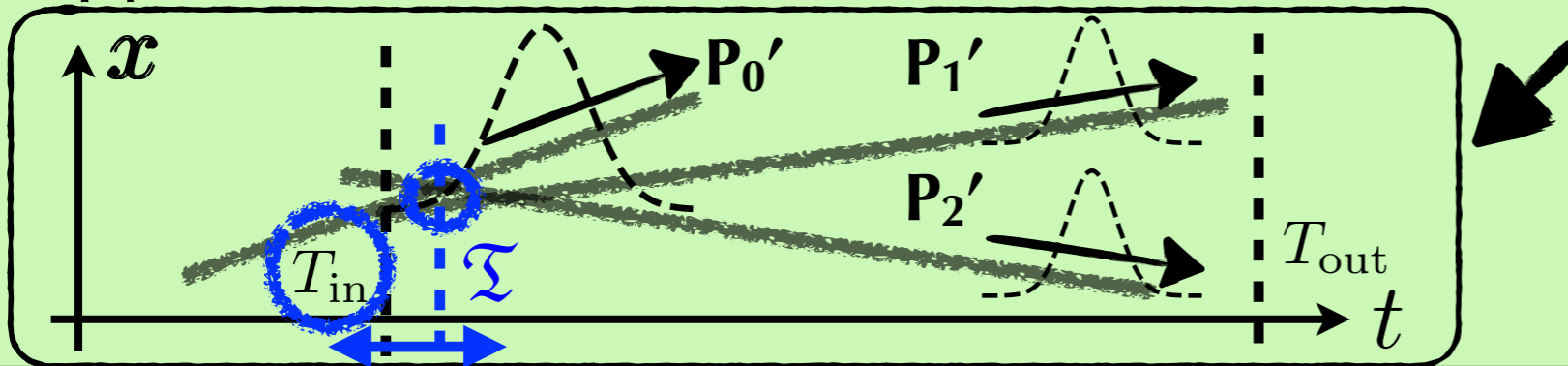


# Result of $S(\Phi \rightarrow \phi\phi)$

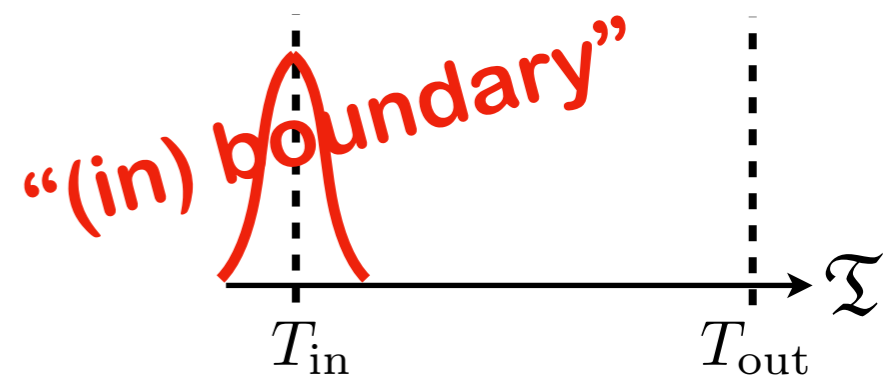
$$S = -\frac{i\kappa}{\sqrt{2}} \left( \prod_{A(=0,1,2)} (\pi\sigma_A)^{-3/4} \frac{1}{\sqrt{2E_A}} \right) e^{-\frac{\sigma_t}{2}(\delta\omega)^2 - \frac{\sigma_s}{2}(\delta\mathbf{P})^2 - \frac{\mathcal{R}}{2}} (2\pi\sigma_s)^{3/2} \sqrt{2\pi\sigma_t} G(\mathcal{T})$$

☑ In “1→2”,

- No counterpart of **boundary** terms exists in  $S_{\text{plane-wave}}$ .
- Suppression via energy-non-conservation is **relaxed** as “Exponential” → “Power” [.:Enhancement].
- Suppression via distances between time domains is **relaxed e.g., in**



$$G(\mathcal{T}) \supset \frac{e^{-\frac{(\mathcal{T}-T_{\text{in}})^2}{2\sigma_t} + \frac{\sigma_t}{2}(\delta\omega)^2 - i\delta\omega(\mathcal{T}-T_{\text{in}})}}{i\sqrt{2\pi\sigma_t} [\delta\omega - i(\mathcal{T}-T_{\text{in}})/\sigma_t]}$$



**(SKIPPABLE)**  
**DETAILS**

# More on Window function

[Ishikawa, Oda (1809.04285)]

$$\text{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx$$

$$\begin{aligned} \circ G(\mathfrak{T}) &:= \int_{T_{\text{in}}}^{T_{\text{out}}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi\sigma_t}} e^{-\frac{1}{2\sigma_t}(t-\mathfrak{T}-i\sigma_t\delta\omega)^2} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \text{erf}\left(\frac{\mathfrak{T} - T_{\text{in}} + i\sigma_t\delta\omega}{\sqrt{2\sigma_t}}\right) - \text{erf}\left(\frac{\mathfrak{T} - T_{\text{out}} + i\sigma_t\delta\omega}{\sqrt{2\sigma_t}}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\circ G(\mathfrak{T}) = G_{\text{bulk}}(\mathfrak{T}) + G_{\text{in-bdry}}(\mathfrak{T}) + G_{\text{out-bdry}}(\mathfrak{T})$$

$$G_{\text{bdry}}(z) \left( z := \frac{\mathfrak{T} - T_{\text{in}} + i\sigma_t\delta\omega}{\sqrt{2\sigma_t}} \right)$$

$$G_{\text{bulk}}(\mathfrak{T}) = \begin{cases} 1 & (T_{\text{in}} < \mathfrak{T} < T_{\text{out}}), \\ 0 & (\mathfrak{T} < T_{\text{in}} \text{ or } T_{\text{out}} < \mathfrak{T}), \\ \theta(\delta\omega) & (\mathfrak{T} = T_{\text{in}}), \\ \theta(-\delta\omega) & (\mathfrak{T} = T_{\text{out}}), \end{cases}$$

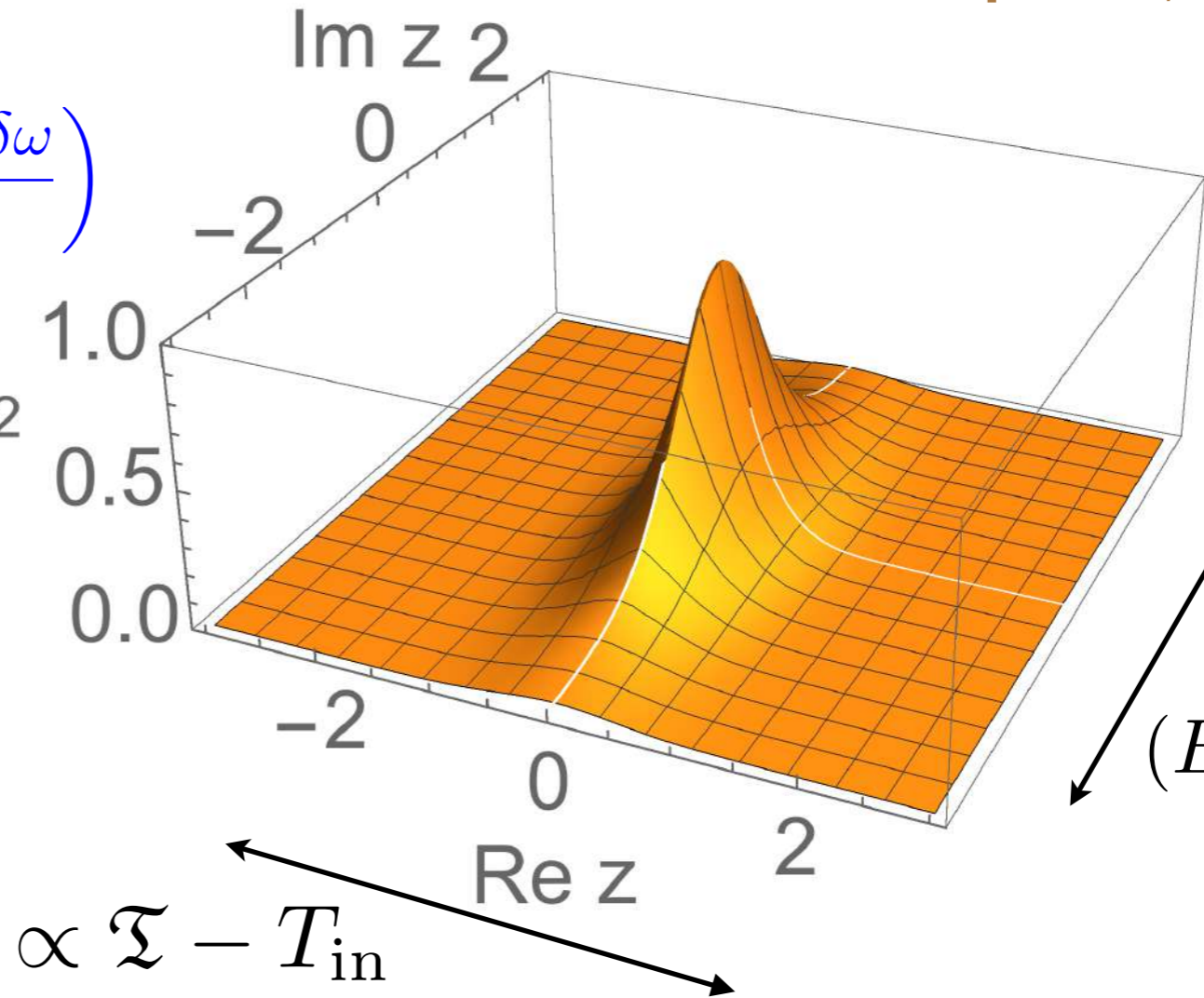
$$\left. \begin{aligned} G_{\text{bulk}}(\mathfrak{T}) &:= \frac{1}{2} \left[ \text{sgn}\left(\frac{\mathfrak{T} - T_{\text{in}} + i\sigma_t\delta\omega}{\sqrt{2\sigma_t}}\right) - \text{sgn}\left(\frac{\mathfrak{T} - T_{\text{out}} + i\sigma_t\delta\omega}{\sqrt{2\sigma_t}}\right) \right], \\ G_{\text{in-bdry}}(\mathfrak{T}) &:= \frac{1}{2} \left[ \text{erf}\left(\frac{\mathfrak{T} - T_{\text{in}} + i\sigma_t\delta\omega}{\sqrt{2\sigma_t}}\right) - \text{sgn}\left(\frac{\mathfrak{T} - T_{\text{in}} + i\sigma_t\delta\omega}{\sqrt{2\sigma_t}}\right) \right], \\ G_{\text{out-bdry}}(\mathfrak{T}) &:= \frac{1}{2} \left[ \text{sgn}\left(\frac{\mathfrak{T} - T_{\text{out}} + i\sigma_t\delta\omega}{\sqrt{2\sigma_t}}\right) - \text{erf}\left(\frac{\mathfrak{T} - T_{\text{out}} + i\sigma_t\delta\omega}{\sqrt{2\sigma_t}}\right) \right]. \end{aligned} \right\}$$

**(SKIPPABLE)  
DETAILS**

[Ishikawa, Oda (1809.04285)]

○  $G_{\text{bdry}}(z) \left( z := \frac{\mathfrak{T} - T_{\text{in}} + i\sigma_t\delta\omega}{\sqrt{2\sigma_t}} \right)$

$|e^{-(\text{Im } z)^2} G_{\text{bdry}}(z)|^2$



○  $\text{erf}(z) \underset{|z| \gg 1}{\sim} \text{sgn}(z) + e^{-z^2} \left( -\frac{1}{\sqrt{\pi}z} \right)$

(We utilised this approximation in the main part.)

□ どのような物理過程でこの“平均からのズレ”を見るか?

○ boundary効果が支配的 ← “平均的”にあまり崩壊しない過程

○ resonant production & decay ← 崩壊部分に集中できる

+

○ 平面波計算で実験値が説明できない ← すぐに実験との比較が可能!

# □ どのような物理過程でこの“平均からのズレ”を見るか?

○ boundary効果が支配的 ← “平均的”にあまり崩壊しない過程

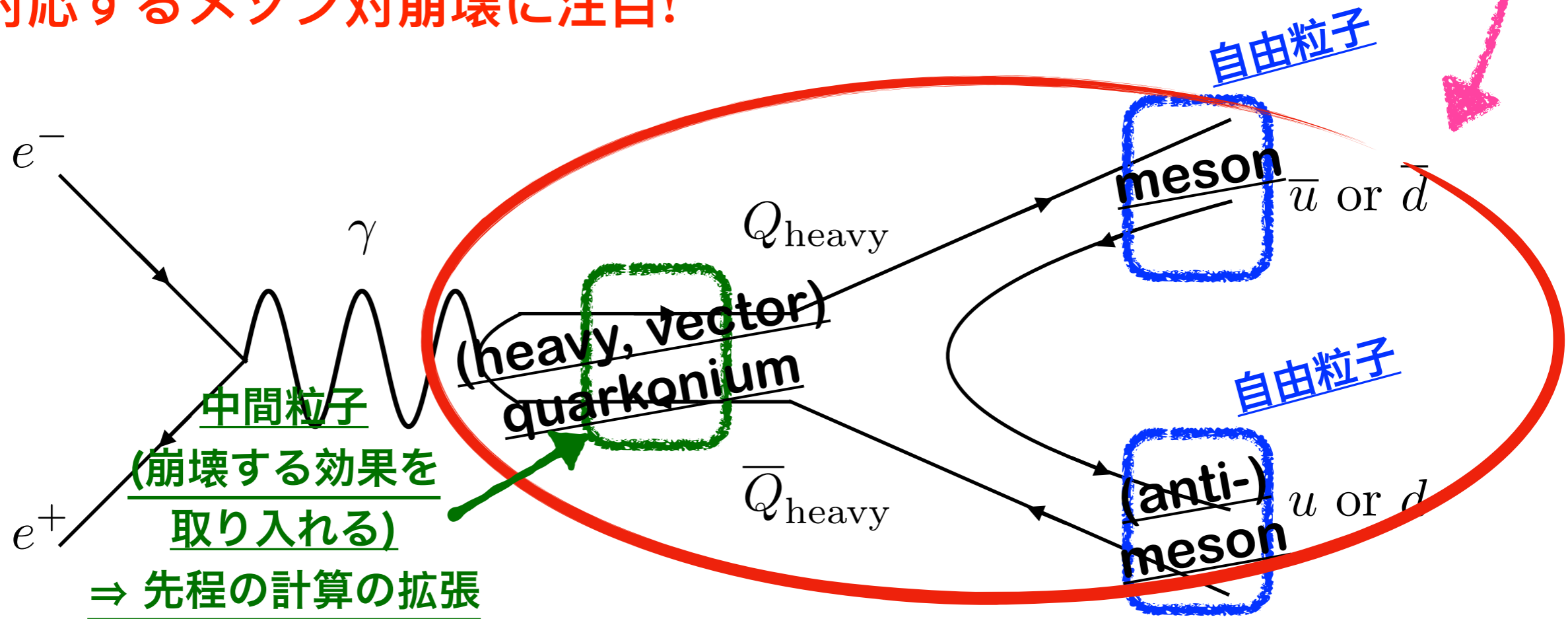
○ resonant production & decay ← 崩壊部分に集中できる

OK!

+

○ 平面波計算で実験値が説明できない ← すぐに実験との比較が可能!

強い相互作用による、重たいクォーコニウム(束縛状態)から  
対応するメソン対崩壊に注目!



# クォーコニウム崩壊アノマリーの詳細

□ 重たい(ベクター)クォーコニウム ( $V$ ), 二種類の終状態メソン対:  
“ $V \rightarrow P^+ P^-$ ” & “ $V \rightarrow P^0 \bar{P}^0$ ”.

○  $P^+$  は電荷 +1 ; ( $P^+$  の反粒子) =  $P^-$

○  $P^0$  は電荷ゼロ; ( $P^0$  の反粒子) =  $\bar{P}^0$

□ 以下が報告されている:

🔍 for  $Q_{\text{heavy}} = s$  (strange quark)      ( $\phi \sim s\bar{s}$ ,  $K^+ \sim u\bar{s}$ ,  $K^0 \sim d\bar{s}$ )       $\phi \leftrightarrow \phi(1020)$

$$R(\phi) := \frac{\text{Br}(\phi \rightarrow K^+ K^-)}{\text{Br}(\phi \rightarrow K^0 \bar{K}^0)} = 1.44928 \pm 0.031506 \quad (\text{PDG global fit})$$

実験結果

$$R(\phi)_{\text{PW}} = \frac{\Gamma(\phi \rightarrow K^+ K^-)}{\Gamma(\phi \rightarrow K^0 \bar{K}^0)} = 1.51558 \pm 0.00330 \quad (\text{via PDG results})$$

平面波での理論値

🔍 for  $Q_{\text{heavy}} = c$  (charm quark)      ( $\psi \sim c\bar{c}$ ,  $D^+ \sim c\bar{d}$ ,  $D^0 \sim c\bar{u}$ )       $\psi \leftrightarrow \psi(3770)$

$$R(\psi) := \frac{\text{Br}(\psi \rightarrow D^+ D^-)}{\text{Br}(\psi \rightarrow D^0 \bar{D}^0)} = 0.798085 \pm 0.010191 \quad (\text{PDG global fit})$$

実験結果

$$R(\psi)_{\text{PW}} = \frac{\Gamma(\psi \rightarrow D^+ D^-)}{\Gamma(\psi \rightarrow D^0 \bar{D}^0)} = 0.691545 \pm 0.004636 \quad (\text{via PDG results})$$

平面波での理論値

# クォーコニウム崩壊アノマリーの詳細

□ 重たい(ベクター)クォーコニウム ( $V$ ), 二種類の終状態メソン対:  
“ $V \rightarrow P^+P^-$ ” & “ $V \rightarrow P^0\bar{P}^0$ ”.

○  $P^+$  は電荷 +1 ; ( $P^+$  の反粒子) =  $P^-$

○  $P^0$  は電荷ゼロ; ( $P^0$  の反粒子) =  $\bar{P}^0$

□ 以下が報告されている:

🔍 for  $Q_{\text{heavy}} = s$  (strange quark)      ( $\phi \sim s\bar{s}$ ,  $K^+ \sim u\bar{s}$ ,  $K^0 \sim d\bar{s}$ )       $\phi \leftrightarrow \phi(1020)$

$$R(\phi) := \frac{\text{Br}(\phi \rightarrow K^+K^-)}{\text{Br}(\phi \rightarrow K^0\bar{K}^0)} = 1.44928 \pm 0.031506 \text{ (PDG global fit)}$$

実験結果

$$R(\phi)_{\text{PW}} = \frac{\Gamma(\phi \rightarrow K^+K^-)}{\Gamma(\phi \rightarrow K^0\bar{K}^0)} = 1.51558 \pm 0.00330 \text{ (via PDG results)}$$

平面波での理論値

↕  $\sim 2\sigma$   
偶々起きる確率は、  
 $\sim 4.5\%$

🔍 for  $Q_{\text{heavy}} = c$  (charm quark)      ( $\psi \sim c\bar{c}$ ,  $D^+ \sim c\bar{d}$ ,  $D^0 \sim c\bar{u}$ )       $\psi \leftrightarrow \psi(3770)$

$$R(\psi) := \frac{\text{Br}(\psi \rightarrow D^+D^-)}{\text{Br}(\psi \rightarrow D^0\bar{D}^0)} = 0.798085 \pm 0.010191 \text{ (PDG global fit)}$$

実験結果

$$R(\psi)_{\text{PW}} = \frac{\Gamma(\psi \rightarrow D^+D^-)}{\Gamma(\psi \rightarrow D^0\bar{D}^0)} = 0.691545 \pm 0.004636 \text{ (via PDG results)}$$

平面波での理論値

↕  $\sim 9\sigma!!!$   
偶々起きる確率は、  
 $\sim 10^{-17}\%$

○ boundary効果が支配的 ← “平均的”にあまり崩壊しない過程

○ resonant production & decay ← 崩壊部分に集中できる

+

○ 平面波計算で実験値が説明できない ← **すぐに実験との比較が可能!**

OK!

以下が報告されている:

for  $Q_{\text{heavy}} = s$  (strange quark)      ( $\phi \sim s\bar{s}$ ,  $K^+ \sim u\bar{s}$ ,  $K^0 \sim d\bar{s}$ )       $\phi \leftrightarrow \phi(1020)$

$$R(\phi) := \frac{\text{Br}(\phi \rightarrow K^+ K^-)}{\text{Br}(\phi \rightarrow K^0 \bar{K}^0)} = 1.44928 \pm 0.031506 \quad (\text{PDG global fit})$$

実験結果

$$R(\phi)_{\text{PW}} := \frac{\Gamma(\phi \rightarrow K^+ K^-)}{\Gamma(\phi \rightarrow K^0 \bar{K}^0)} = 1.51558 \pm 0.00330 \quad (\text{via PDG results})$$

平面波での理論値



$\sim 2\sigma$

時々起きる確率は、

$\sim 4.5\%$

for  $Q_{\text{heavy}} = c$  (charm quark)      ( $\psi \sim c\bar{c}$ ,  $D^+ \sim c\bar{d}$ ,  $D^0 \sim c\bar{u}$ )       $\psi \leftrightarrow \psi(3770)$

$$R(\psi) := \frac{\text{Br}(\psi \rightarrow D^+ D^-)}{\text{Br}(\psi \rightarrow D^0 \bar{D}^0)} = 0.798085 \pm 0.010191 \quad (\text{PDG global fit})$$

実験結果

$$R(\psi)_{\text{PW}} := \frac{\Gamma(\psi \rightarrow D^+ D^-)}{\Gamma(\psi \rightarrow D^0 \bar{D}^0)} = 0.691545 \pm 0.004636 \quad (\text{via PDG results})$$

平面波での理論値



$\sim 9\sigma!!!$

時々起きる確率は、

$\sim 10^{-17}\%$

# アイソスピン極限 (u と d の質量差なし $\Rightarrow g_+ = g_0$ )だと

平面波の理論値は粒子の質量のみに依存する



It should be good since  $m_u \sim m_d \sim O(1)$  MeV, while  $m_s \sim O(10^2)$  MeV and  $m_c \sim O(1)$  GeV.

[Branon, Escribano, Lucio, Pancheri, hep-ph/0003273]

R( $\Phi$ )の実験値とのずれは、(平面波での)アイソスピンの破れ、QED高次効果では説明不可。

$$\begin{aligned} \circ \Gamma(\phi \rightarrow K^+ K^-) &= \frac{2}{3} \left( \frac{g_+^2}{4\pi} \right) \frac{|\mathbf{k}|^3}{m_\phi^2}, \\ |\mathbf{k}| &= \frac{1}{2} (m_\phi^2 - 4m_{K^+}^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \circ R_{\text{th}} &:= \frac{\Gamma(\phi \rightarrow K^+ K^-)}{\Gamma(\phi \rightarrow K^0 \bar{K}^0)} \Big|_{\text{th}} =: \left( \frac{g_+^2}{g_0^2} \right) R_{\text{FGR2}} \\ &= \left( \frac{g_+^2}{g_0^2} \right) \left( \frac{m_\phi^2 - 4m_{K^+}^2}{m_\phi^2 - 4m_{K^0}^2} \right)^{3/2}. \end{aligned}$$

- $\circ m_\phi = 1019.461 \pm 0.016 \text{ MeV}$
- $\circ \Gamma_\phi = 4.249 \pm 0.013 \text{ MeV}$   $\left( \frac{m_\phi - 2m_{K^+} \sim 32 \text{ MeV}}{m_\phi - 2m_{K^0} \sim 24 \text{ MeV}} \right)$
- $\circ m_{K^+} = 493.677 \pm 0.016 \text{ MeV}$
- $\circ m_{K^0} = 497.611 \pm 0.013 \text{ MeV}$
- $\circ (\text{Br}(\phi \rightarrow K^+ K^-) = 49.1 \pm 0.5\%)$
- $\circ (\text{Br}(\phi \rightarrow K_S^0 K_L^0) \simeq \text{Br}(\phi \rightarrow K^0 \bar{K}^0) = 33.9 \pm 0.4\%)$
- $\circ m_\psi = 3773.7 \pm 0.4 \text{ MeV}$   $\left( \frac{m_\psi - 2m_{D^+} \sim 34 \text{ MeV}}{m_\psi - 2m_{D^0} \sim 44 \text{ MeV}} \right)$
- $\circ \Gamma_\psi = 27.2 \pm 1.0 \text{ MeV}$
- $\circ m_{D^+} = 1869.66 \pm 0.05 \text{ MeV}$
- $\circ m_{D^0} = 1864.84 \pm 0.05 \text{ MeV}$
- $\circ (\text{Br}(\psi \rightarrow D^+ D^-) = 41 \pm 4\%)$
- $\circ (\text{Br}(\psi \rightarrow D^0 \bar{D}^0) = 52_{-5}^{+4}\%)$

○ boundary効果が支配的 ← “平均的”にあまり崩壊しない過程

○ resonant production & decay ← 崩壊部分に集中できる

+

○ 平面波計算で実験値が説明できない ← すぐに実験との比較が可能!

OK!

[3273]

不可.

$$\Gamma(\phi \rightarrow K^+ K^-) = \frac{2}{3} \left( \frac{g_+^2}{4\pi} \right) \frac{|\mathbf{k}|^3}{m_\phi^2},$$

$$|\mathbf{k}| = \frac{1}{2} (m_\phi^2 - 4m_{K^+}^2)^{1/2},$$

$$R_{\text{th}} := \frac{\Gamma(\phi \rightarrow K^+ K^-)}{\Gamma(\phi \rightarrow K^0 \bar{K}^0)} \Bigg|_{\text{th}} =: \left( \frac{g_+^2}{g_0^2} \right) R_{\text{FGR2}}$$

$$= \left( \frac{g_+^2}{g_0^2} \right) \left( \frac{m_\phi^2 - 4m_{K^+}^2}{m_\phi^2 - 4m_{K^0}^2} \right)^{3/2}.$$

$$m_\phi = 1019.461 \pm 0.016 \text{ MeV}$$

$$\Gamma_\phi = 4.249 \pm 0.013 \text{ MeV}$$

$$\frac{m_\phi - 2m_{K^+} \sim 32 \text{ MeV}}{m_\phi - 2m_{K^0} \sim 24 \text{ MeV}}$$

$$m_{K^+} = 493.677 \pm 0.016 \text{ MeV}$$

$$m_{K^0} = 497.611 \pm 0.013 \text{ MeV}$$

$$\text{Br}(\phi \rightarrow K^+ K^-) = 49.1 \pm 0.5\%$$

$$\text{Br}(\phi \rightarrow K_S^0 K_L^0) \simeq \text{Br}(\phi \rightarrow K^0 \bar{K}^0) = 33.9 \pm 0.4\%$$

$$m_\psi = 3773.7 \pm 0.4 \text{ MeV}$$

$$\Gamma_\psi = 27.2 \pm 1.0 \text{ MeV}$$

$$\frac{m_\psi - 2m_{D^+} \sim 34 \text{ MeV}}{m_\psi - 2m_{D^0} \sim 44 \text{ MeV}}$$

$$m_{D^+} = 1869.66 \pm 0.05 \text{ MeV}$$

$$m_{D^0} = 1864.84 \pm 0.05 \text{ MeV}$$

$$\text{Br}(\psi \rightarrow D^+ D^-) = 41 \pm 4\%$$

$$\text{Br}(\psi \rightarrow D^0 \bar{D}^0) = 52_{-5}^{+4}\%$$

# 波束計算の結果

□ For  $\phi \rightarrow K^+ K^-$  and  $\phi \rightarrow K^0 \bar{K}^0$

Parameters:  $m_\phi, m_{K^+} (= m_{K^-}), m_{K^0} (= m_{\bar{K}^0}), \tau_\phi (= \Gamma_\phi^{-1}); R_0, \sigma_K, \sigma_\phi; N_d$



実験データから決まってる

クォーク束縛状態を  
特徴づける量 [長さ]

終状態の  
波束の大きさ  
[[長さ]<sup>2</sup>]

初状態の  
波束の大きさ  
[[長さ]<sup>2</sup>]

初状態の  
再規格化定数

# 波束計算の結果

□ For  $\phi \rightarrow K^+ K^-$  and  $\phi \rightarrow K^0 \bar{K}^0$

Parameters:  $m_\phi, m_{K^+} (= m_{K^-}), m_{K^0} (= m_{\bar{K}^0}), \tau_\phi (= \Gamma_\phi^{-1}); R_0, \sigma_K, \sigma_\phi; N_d$

二つで共通( $\Rightarrow$  fit で決める)

$R(\Phi)$ には効かない



実験データから決まってる

有効なパラメーター

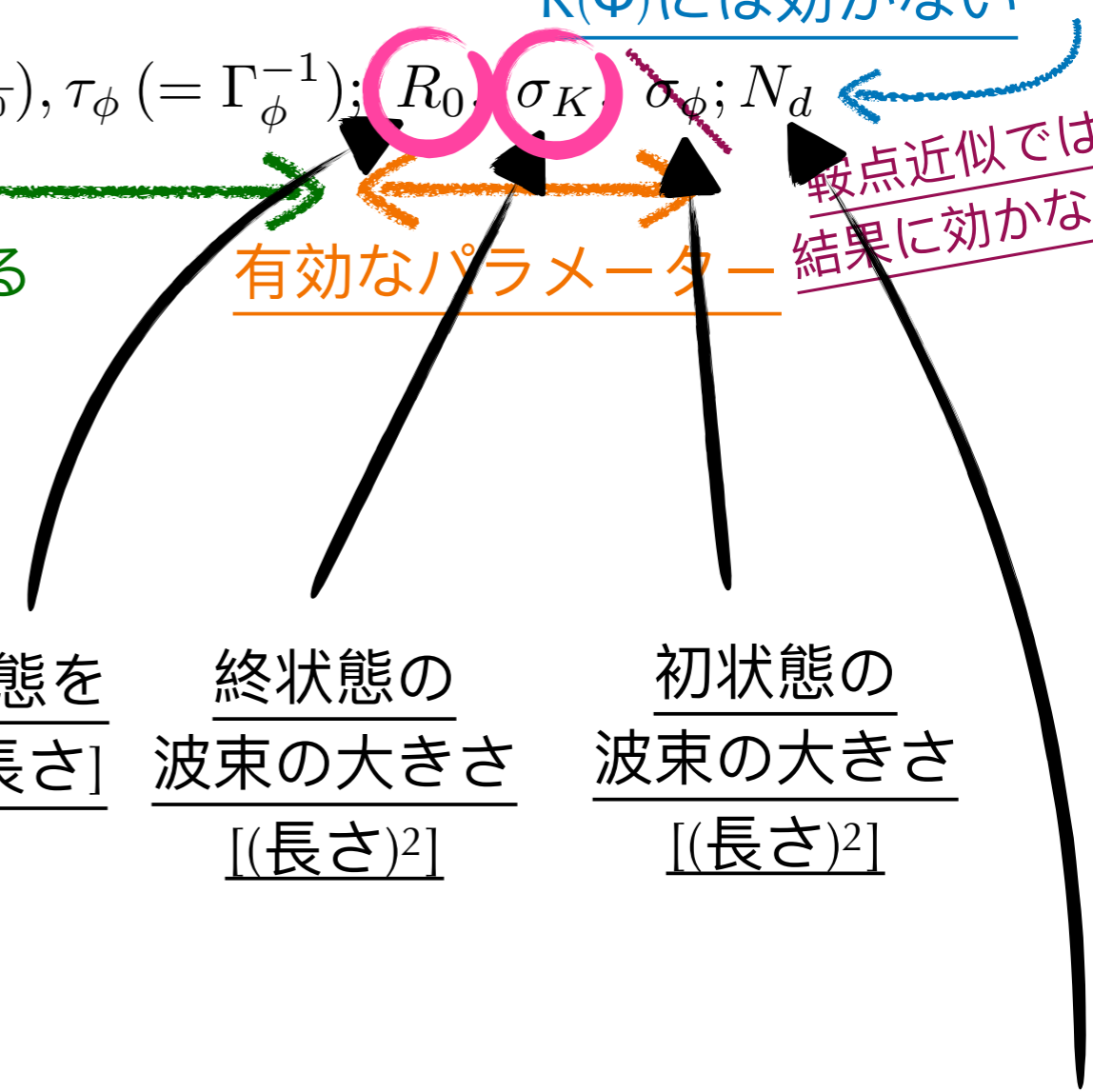
鞍点近似では結果に効かない

クォーク束縛状態を特徴づける量 [長さ]

終状態の波束の大きさ  
[[長さ]<sup>2</sup>]

初状態の波束の大きさ  
[[長さ]<sup>2</sup>]

初状態の再規格化定数



# 波束計算の結果

**PRELIMINARY**

□ For  $\phi \rightarrow K^+ K^-$  and  $\phi \rightarrow K^0 \bar{K}^0$

Parameters:  $m_\phi, m_{K^+} (= m_{K^-}), m_{K^0} (= m_{\bar{K}^0}), \tau_\phi (= \Gamma_\phi^{-1}); R_0, \sigma_K, \sigma_\phi; N_d$

二つで共通( $\Rightarrow$  fit で決める)

$R(\Phi)$ には効かない

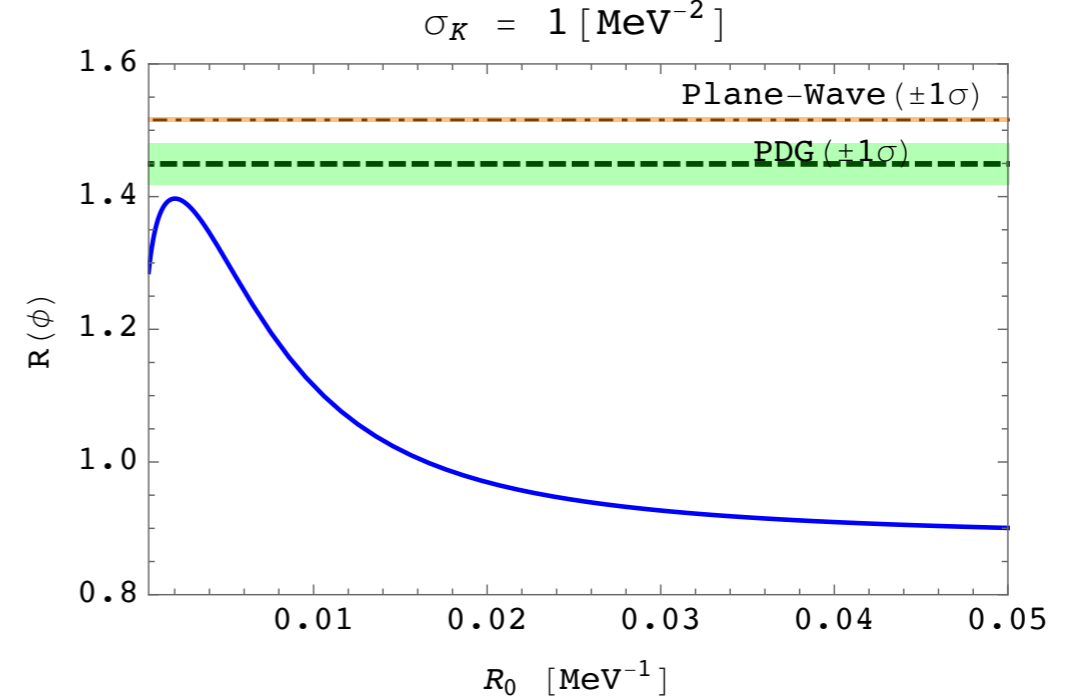
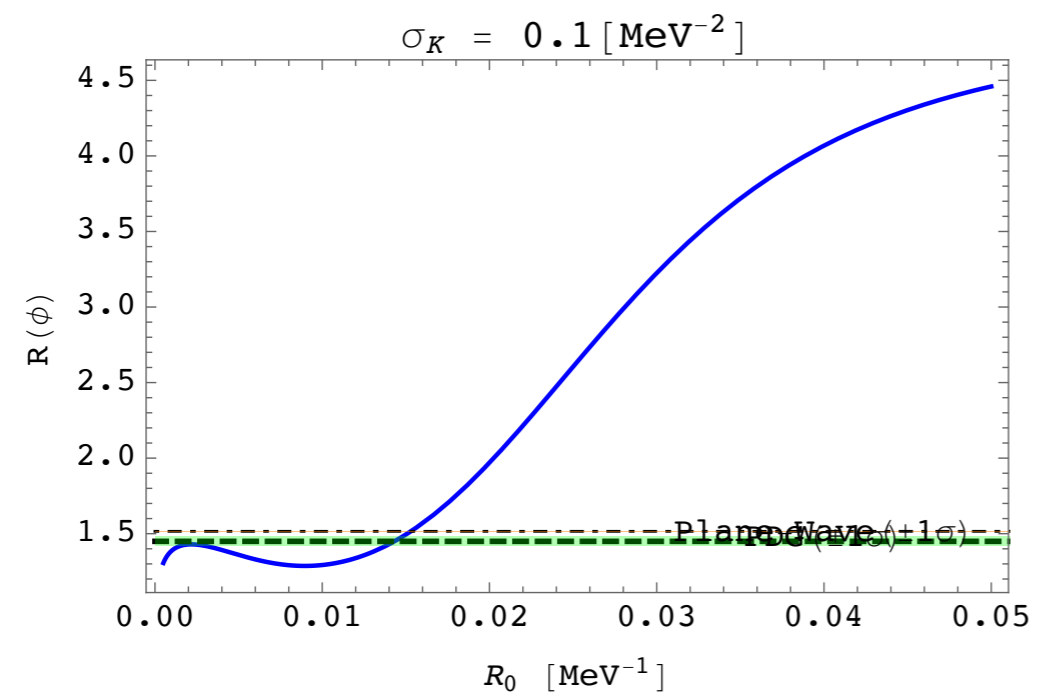
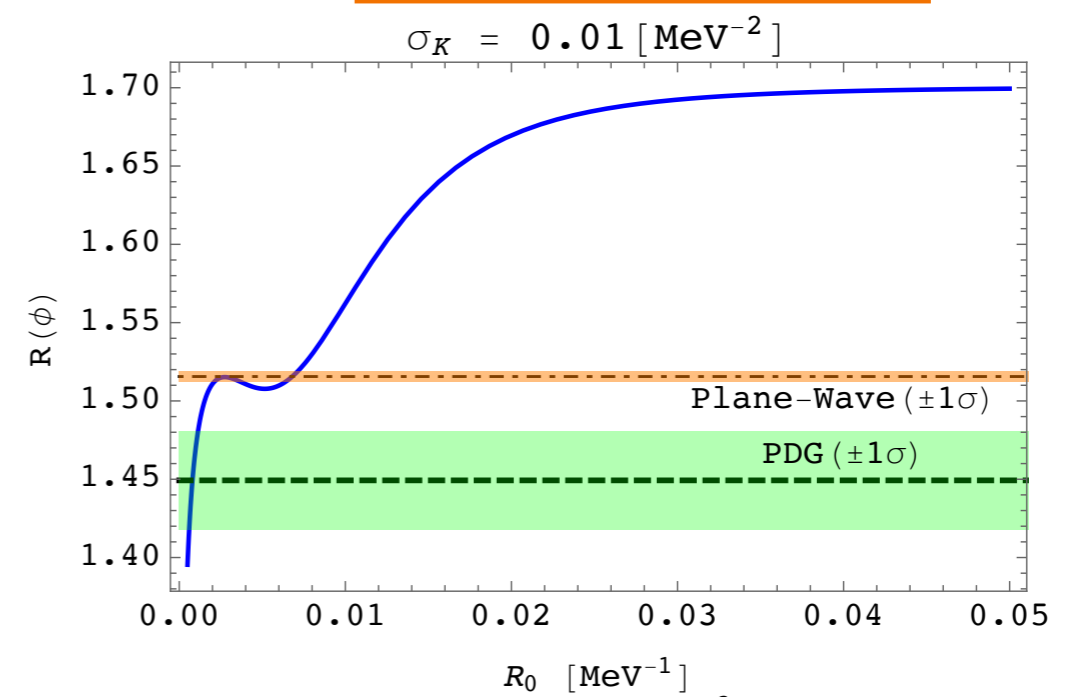
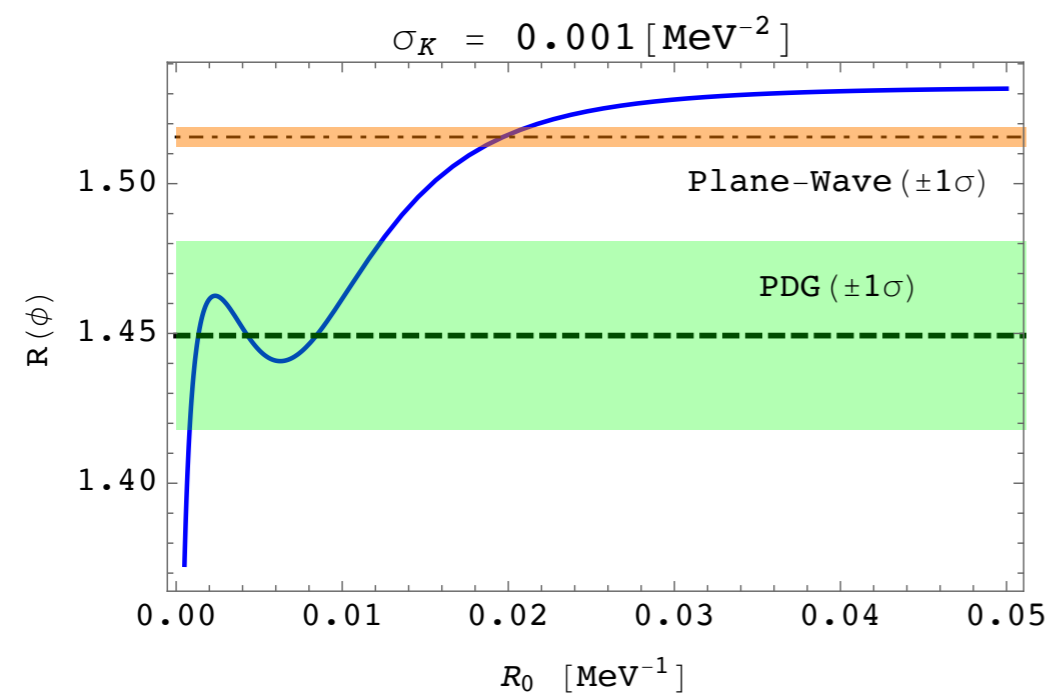


実験データから決まってる



有効なパラメーター

鞍点近似では結果に効かない



# 波束計算の結果

**PRELIMINARY**

□ For  $\phi \rightarrow K^+ K^-$  and  $\phi \rightarrow K^0 \bar{K}^0$

Parameters:  $m_\phi, m_{K^+} (= m_{K^-}), m_{K^0} (= m_{\bar{K}^0}), \tau_\phi (= \Gamma_\phi^{-1}); R_0, \sigma_K, \sigma_\phi; N_d$

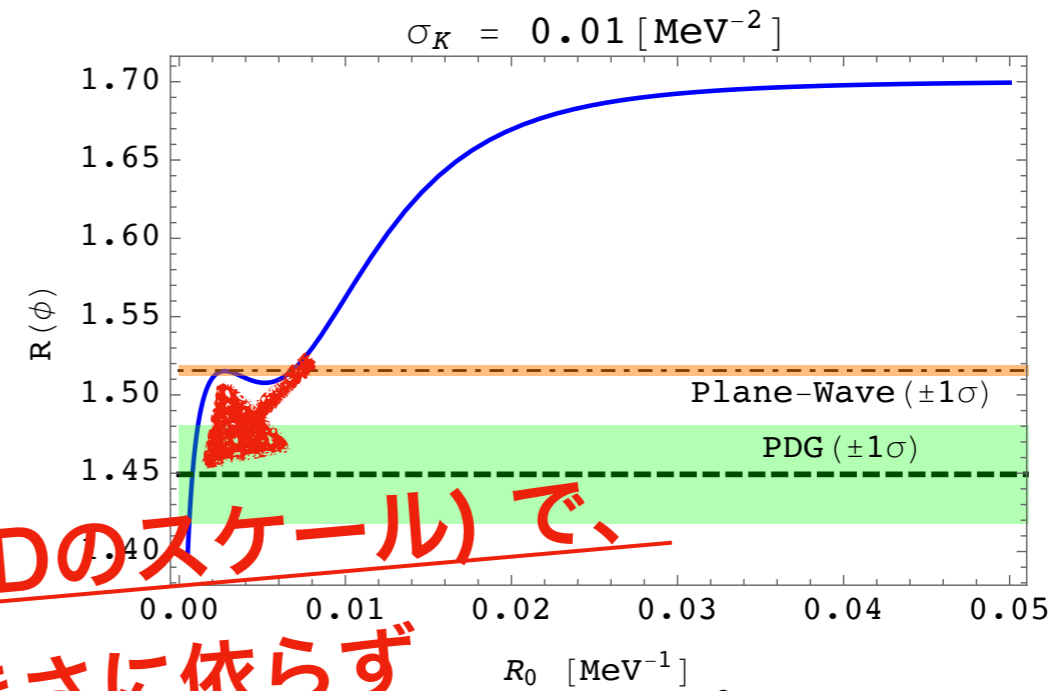
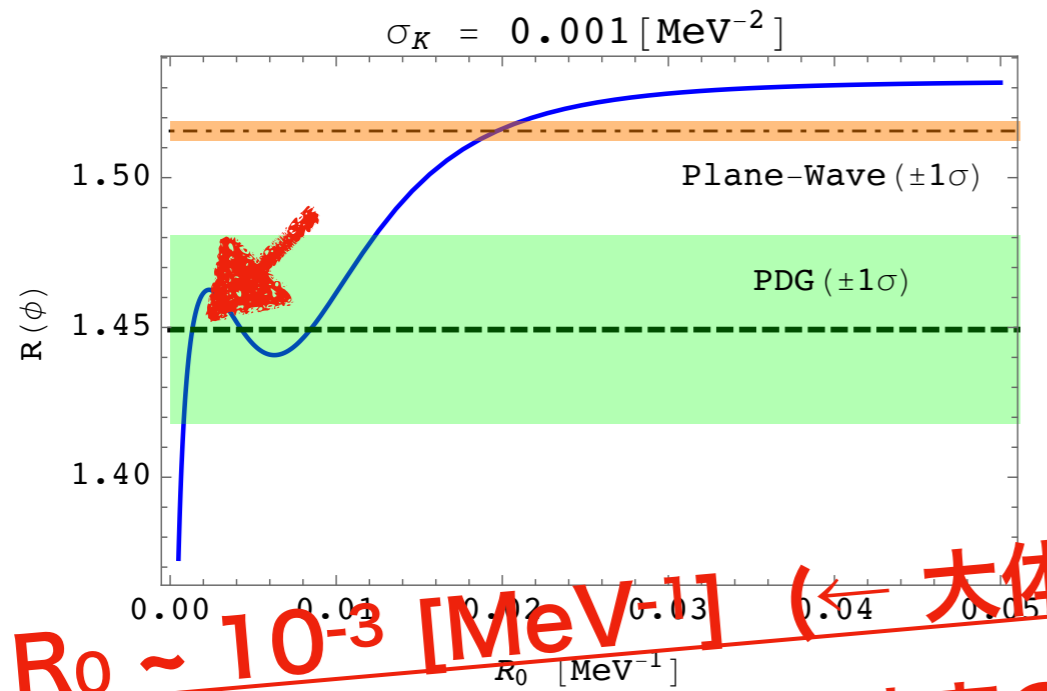
二つで共通( $\Rightarrow$  fit で決める)

$R(\phi)$ には効かない

← 実験データから決まってる

→ 有効なパラメーター

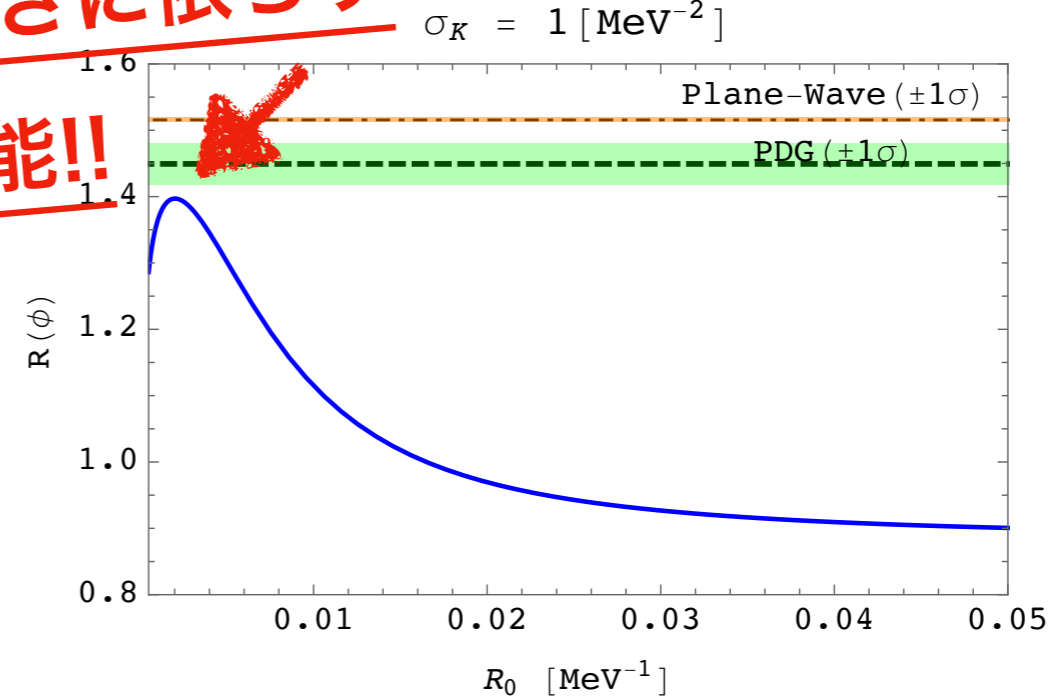
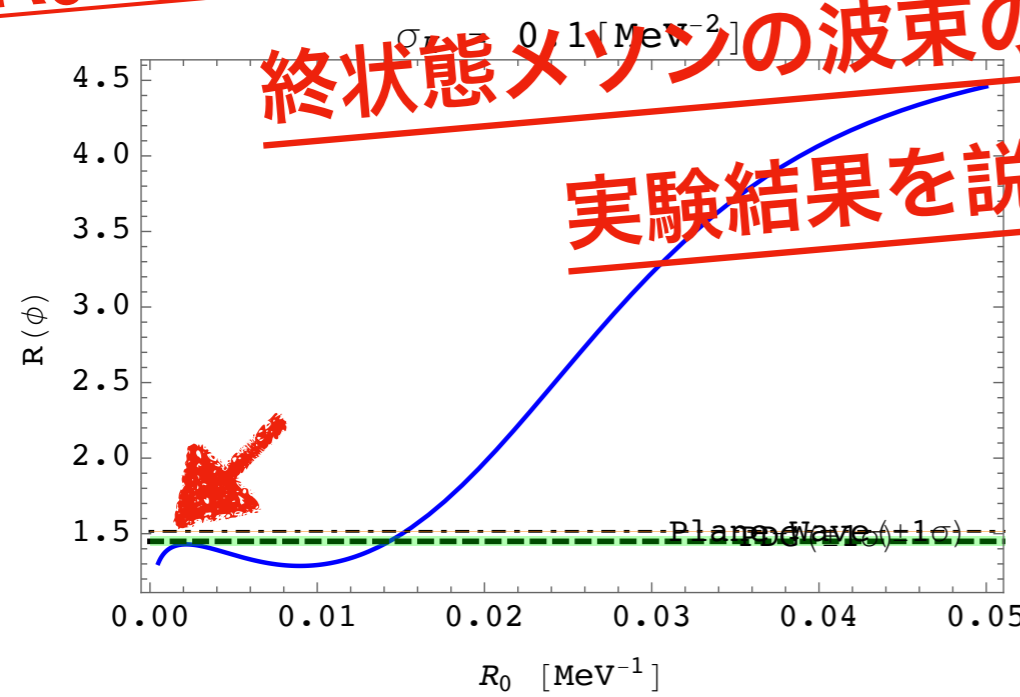
鞍点近似では結果に効かない



$R_0 \sim 10^{-3} [\text{MeV}^{-1}]$  (← 大体QCDのスケール) で、

終状態メソンの波束の大きさに依らず

実験結果を説明可能!!



# 波束計算の結果

**PRELIMINARY**

□ For  $\psi \rightarrow D^+ D^-$  and  $\psi \rightarrow D^0 \bar{D}^0$

Parameters:  $m_\psi, m_{D^+} (= m_{D^-}), m_{D^0} (= m_{\bar{D}^0}), \tau_\psi (= \Gamma_\psi^{-1}); R_0, \sigma_D, \sigma_\psi; N_d$

二つで共通( $\Rightarrow$  fit で決める)

$R(\psi)$ には効かない

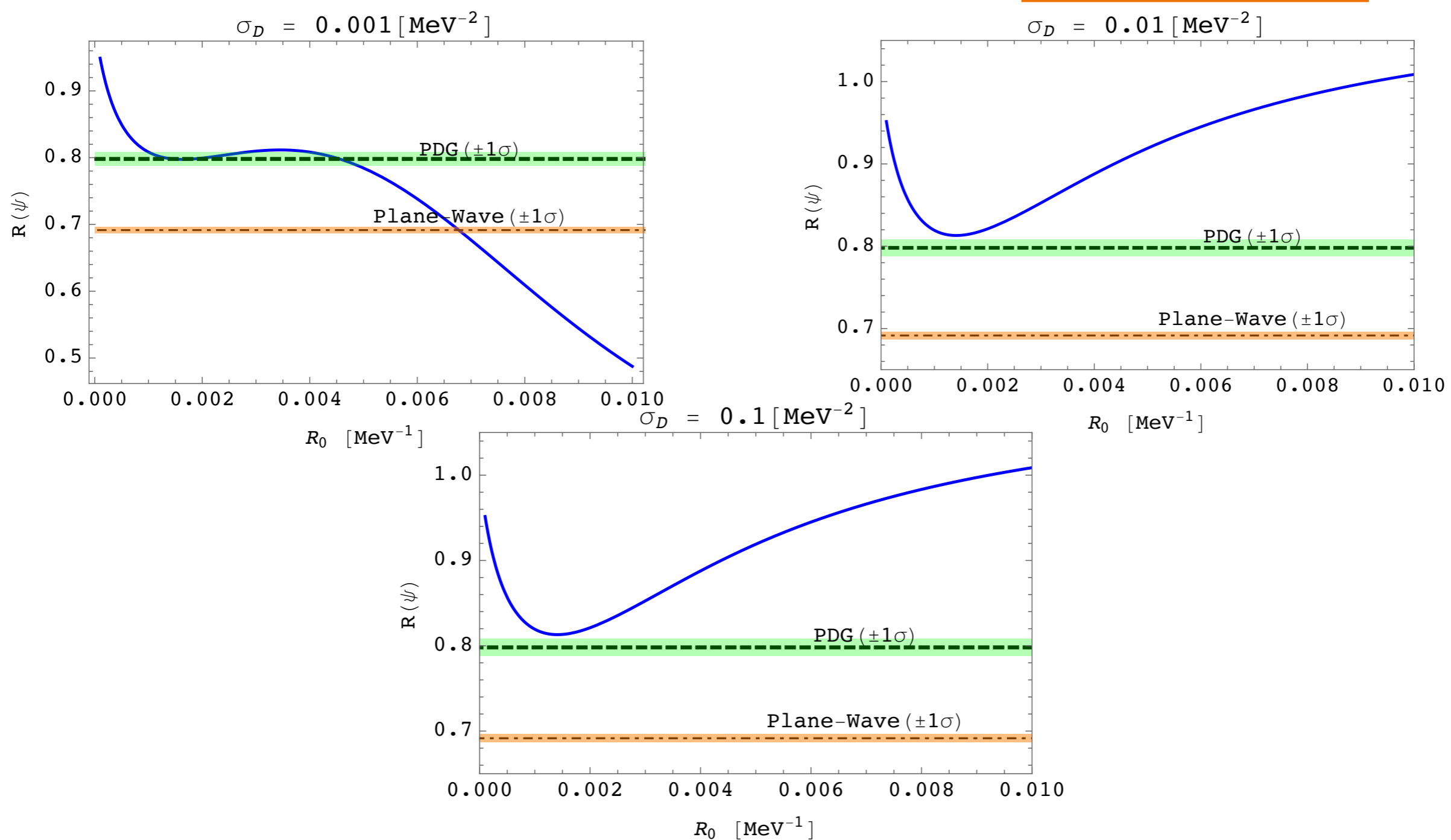


実験データから決まってる



有効なパラメーター

鞍点近似では結果に効かない



# 波束計算の結果

PRELIMINARY

□ For  $\psi \rightarrow D^+ D^-$  and  $\psi \rightarrow D^0 \bar{D}^0$

Parameters:  $m_\psi, m_{D^+} (= m_{D^-}), m_{D^0} (= m_{\bar{D}^0}), \tau_\psi (= \Gamma_\psi^{-1}); R_0, \sigma_D, \sigma_\psi; N_d$

二つで共通( $\Rightarrow$  fit で決める)

$R(\psi)$ には効かない

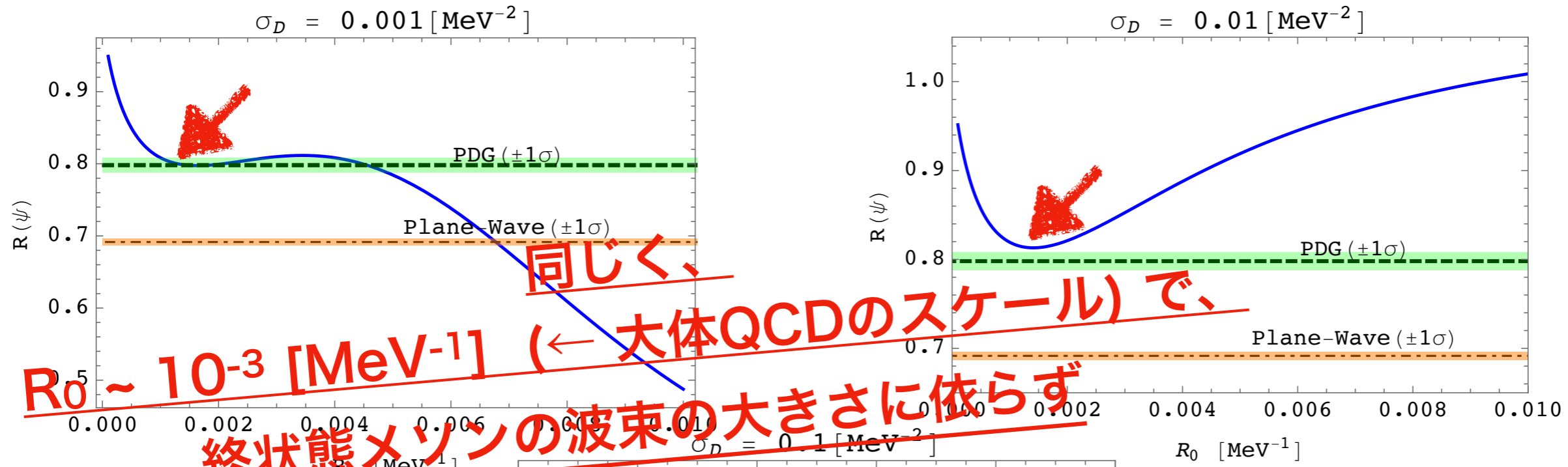


実験データから決まってる



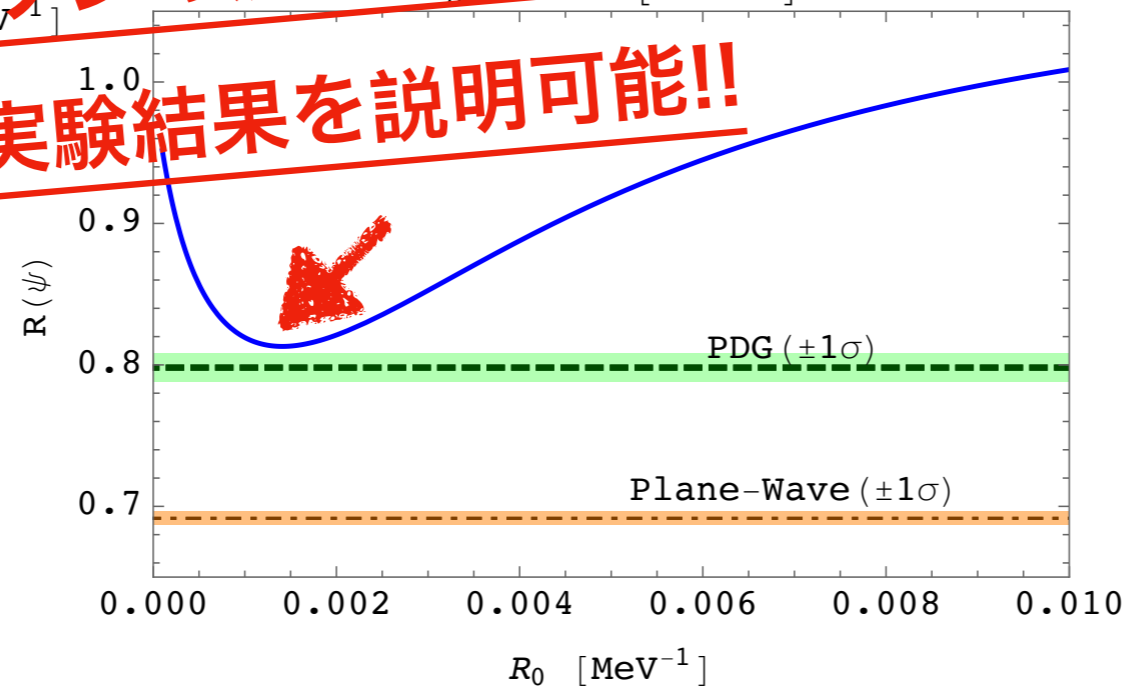
有効なパラメーター

鞍点近似では結果に効かない



**$R_0 \sim 10^{-3} [\text{MeV}^{-1}]$  (← 大体QCDのスケール) で、  
終状態メソンの波束の大きさに依らず**

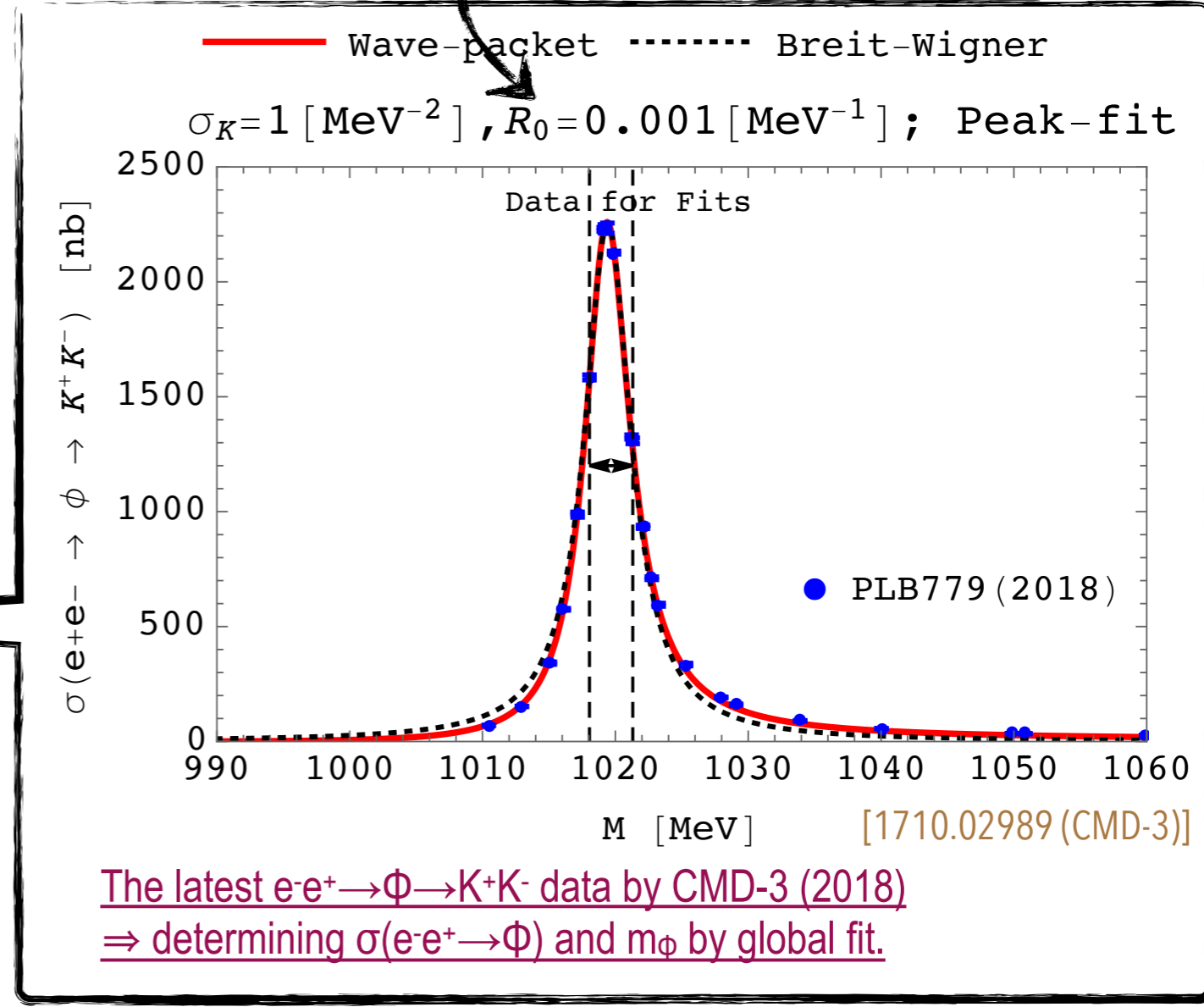
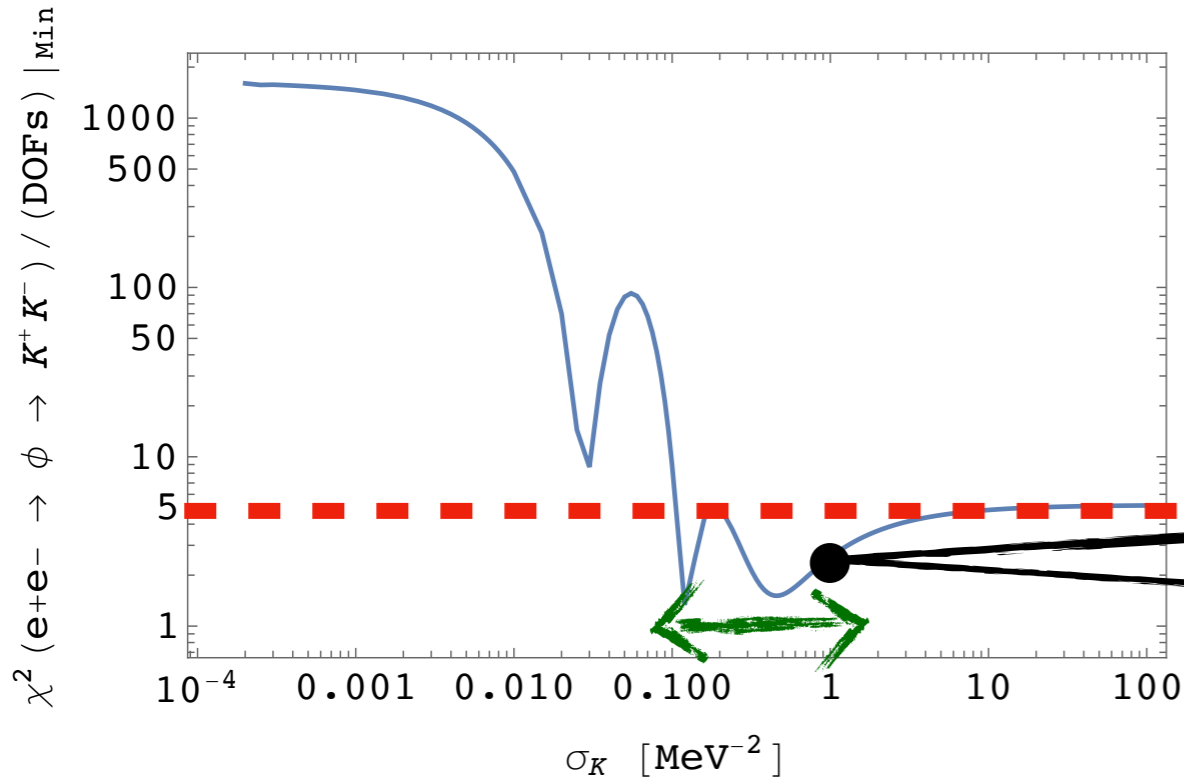
**実験結果を説明可能!!**



# 実験でのレゾナンス形状からの制限 PRELIMINARY

□ For  $\phi \rightarrow K^+ K^-$  and  $\phi \rightarrow K^0 \bar{K}^0$

( $R_0=0.001\text{MeV}^{-1}$ ; PLB779 (2018))



The latest  $e-e^+ \rightarrow \phi \rightarrow K^+ K^-$  data by CMD-3 (2018)  
 $\Rightarrow$  determining  $\sigma(e-e^+ \rightarrow \phi)$  and  $m_\phi$  by global fit.

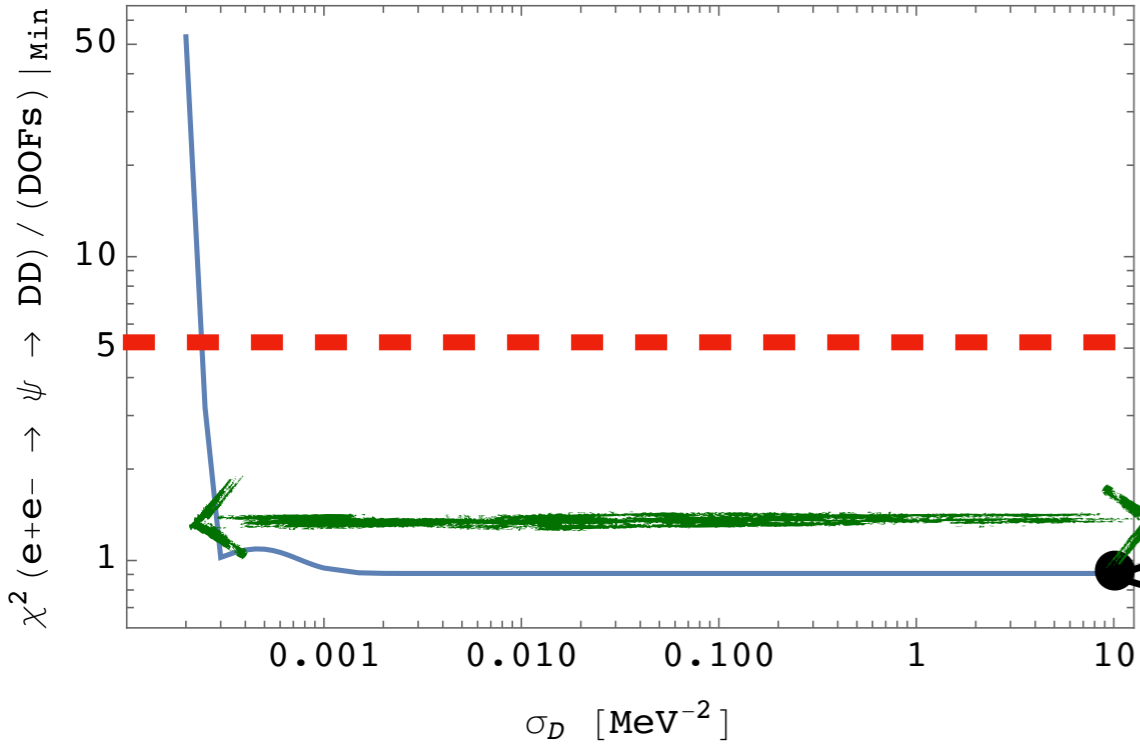
$\sigma_K$  (メソン波束) の大きさが  
この領域なら実験と矛盾しない。  
実験データが既に精密のため  
制限が強い。

# 実験でのレゾナンス形状からの制限 PRELIMINARY

□ For  $\psi \rightarrow D^+ D^-$  and  $\psi \rightarrow D^0 \bar{D}^0$

suggested as in  $R(\psi)$

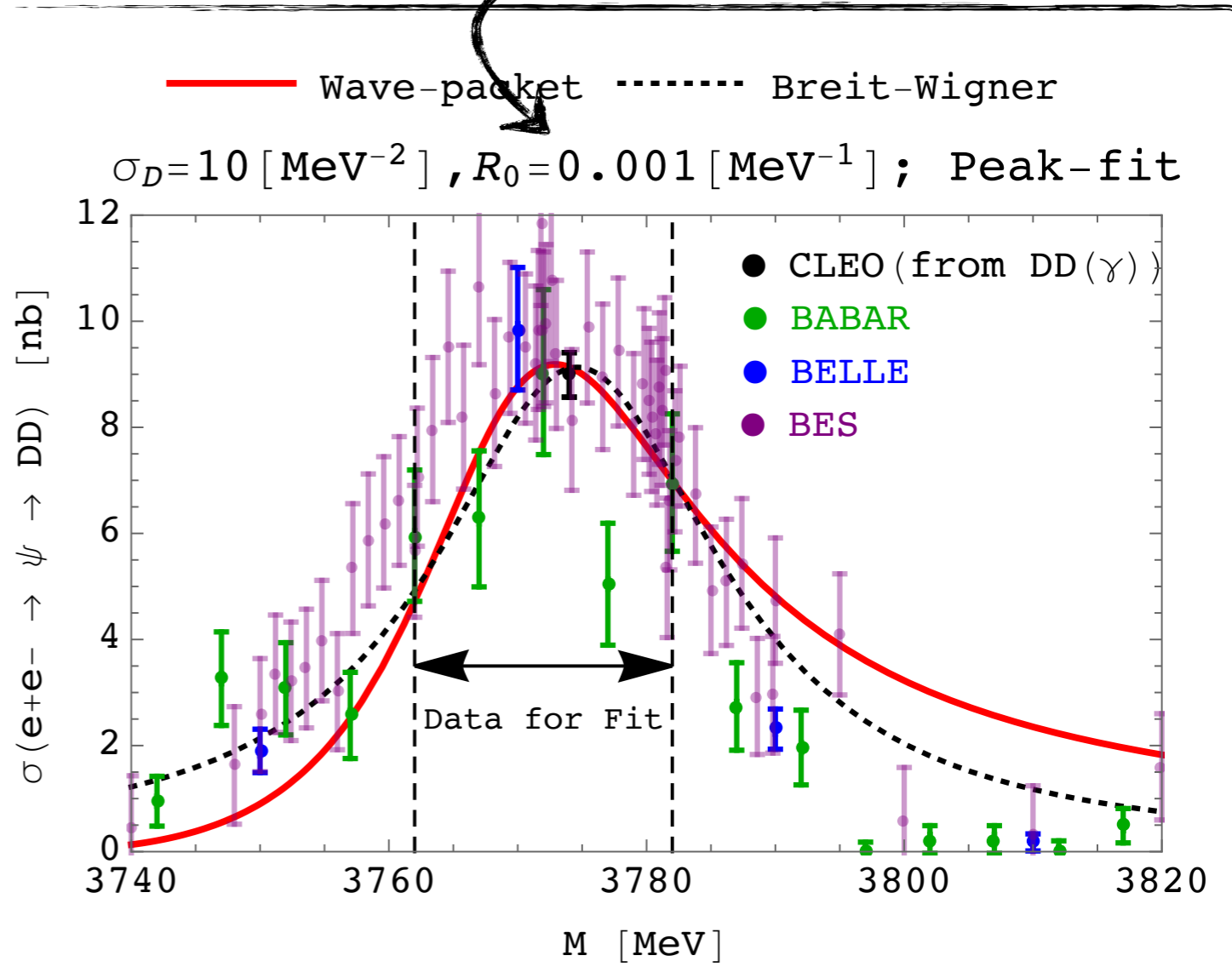
( $R_0 = 0.001 \text{ MeV}^{-1}$ ; BaBar+Belle+BES+CLEO)



$\sigma_K$  (メソン波束) の大きさが

この領域なら実験と矛盾しない。

まだ広い領域が許されている。



[Shamov, Yu, Todyshev, PLB 769 (2017) 187]

$e^+e^- \rightarrow \psi \rightarrow D^+D^-$  and  $D^0\bar{D}^0$  data by CLEO, Babar, Belle, BES  
 $\Rightarrow$  determining  $\sigma(e^+e^- \rightarrow \psi)$  and  $m_\psi$  by global fit.

# まとめ

1. 平面波の計算は、“平均的な確率的振る舞い”しか表せない。
2. 波束で計算するなら、理論的にどんな物理過程に関しても、“平均値を超えた”絶対確率が得られる。
3. 波束でしか見えない物理は、どうもありそうだ。

# まとめ

1. 平面波の計算は、“平均的な確率的振る舞い”しか表せない。
2. 波束で計算するなら、理論的にどんな物理過程に関しても、“平均値を超えた”絶対確率が得られる。
3. 波束でしか見えない物理は、どうもありそうだ。



より一般の物理過程(及び観測)に適応するには、  
更なる一般論の議論が必要 (future works)。

# まとめ

1. 平面波の計算は、“平均的な確率的振る舞い”しか表せない。
2. 波束で計算するなら、理論的にどんな物理過程に関しても、“平均値を超えた”絶対確率が得られる。
3. 波束でしか見えない物理は、どうもありそうだ。



より一般の物理過程(及び観測)に適応するには、  
更なる一般論の議論が必要 (future works)。



**THANK YOU!**

# BACKUP SLIDES

# Beyond the simplest calculation


- We examined the simplest  $1 \rightarrow 2$  case in wave-packet formalism.  
Now, we will be interested in
  1. When the wave-packet effect becomes significant?
  2. How about the  $2 \rightarrow 2$  full scattering, including the production part?

# 1. When the wave-packet effect becomes **significant**?

Let me remind you that:

 The plane-wave calculation includes only the pure bulk part.

➔ **Configurations where the boundary parts are dominant.**

 In the S-matrix, when we focus on momentum-non-conserving (off-shell) part, the difference between the bulk and boundary becomes significant.

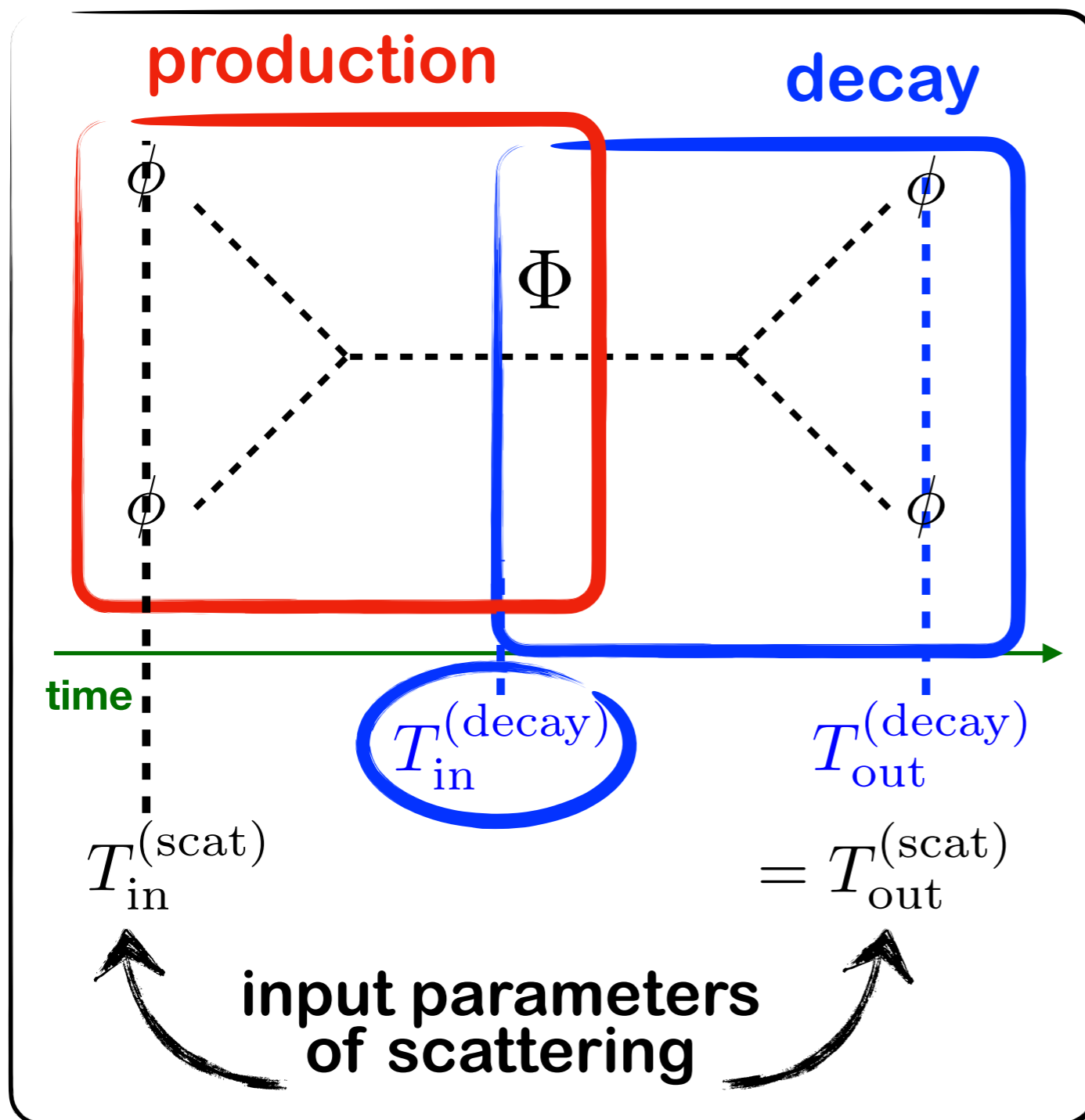
➔ **A valid phase space is narrow, near kinetic threshold.**

## 2. How about the $2 \rightarrow 2$ full scattering, including the production part?

The full format of  $S$  for the resonant process ( $\phi\phi \rightarrow \Phi \rightarrow \phi\phi$ ) is available.

[Ishiwaka,KN,Oda

(2006.14159, 2102.12032)]

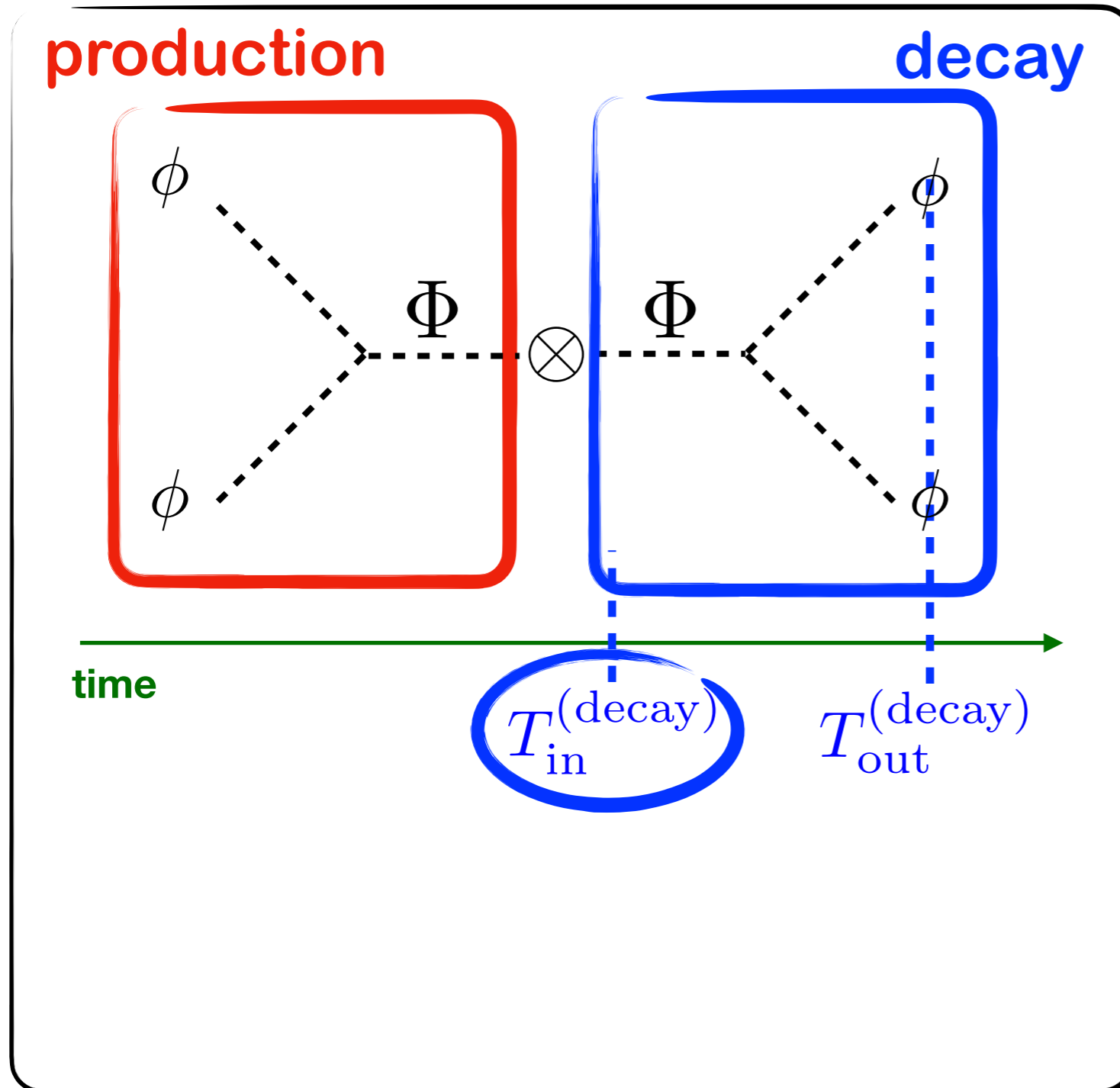


- It is necessary for full analyses.
- More knowledge on  $T_{in}^{(decay)}$   
(Note: within " $1 \rightarrow 2$ ", this is a parameter.)
- Full analysis of  $P(\phi\phi \rightarrow \Phi \rightarrow \phi\phi)$  is not yet due to the complicated phase space..

## 2. How about the $2 \rightarrow 2$ full scattering, including the production part?

We consider the scheme of approximation for “ $\phi\phi \rightarrow \Phi \rightarrow \phi\phi$ ”.

[Ishiwaka, Jinnouchi, KN, Oda  
(ongoing)]



- We assume the factorisation (for a resonance, it will work.)
- The final-state profile is determined in the decay part.
- The intermediate  $\Phi$  state is **NOT a free asymptotic state**. We take account of this nature by

$$E_0(\mathbf{P}_0) \rightarrow \tilde{E}_0(\mathbf{P}_0)$$

$$= \sqrt{\mathbf{P}_0^2 + m_\Phi^2 - i\Gamma_\Phi m_\phi}$$

$$\simeq E_0(\mathbf{P}_0) - i \frac{m_\Phi}{2E_0(\mathbf{P}_0)} \Gamma_\phi$$

(Weisskopf-Wigner Approximation)

# Details on $S(\Phi \rightarrow \phi\phi)$

[Ishikawa, Oda (1809.04285)]

- $$S = \frac{i\kappa}{\sqrt{2}} \left( \prod_A (\pi\sigma_A)^{-3/4} \frac{1}{\sqrt{2E_A}} \right) e^{-\frac{\sigma_t}{2}(\delta\omega)^2 - \frac{\sigma_s}{2}(\delta\mathbf{P})^2 - \frac{\mathcal{R}}{2}} (2\pi\sigma_s)^{3/2} \sqrt{2\pi\sigma_t} G(\mathfrak{Z})$$

- $$G(\mathfrak{Z}) := \int_{T_{\text{in}}}^{T_{\text{out}}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi\sigma_t}} e^{-\frac{1}{2\sigma_t}(t-\mathfrak{Z}-i\sigma_t\delta\omega)^2}$$

$$\text{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \text{erf} \left( \frac{\mathfrak{Z} - T_{\text{in}} + i\sigma_t\delta\omega}{\sqrt{2\sigma_t}} \right) - \text{erf} \left( \frac{\mathfrak{Z} - T_{\text{out}} + i\sigma_t\delta\omega}{\sqrt{2\sigma_t}} \right) \right]$$

- $$E_A := \sqrt{m_A^2 + \mathbf{P}_A^2}$$

- $$\mathbf{V}_A := \frac{\mathbf{P}_A}{E_A}$$

- $$\sigma_s := \left( \sum_{A=0}^2 \frac{1}{\sigma_A} \right)^{-1}$$

- $$\sigma_t := \frac{\sigma_s}{\Delta V^2}$$

- $$\mathfrak{Z} := \sigma_t \frac{\overline{\mathbf{V}} \cdot \overline{\mathfrak{X}} - \overline{\mathbf{V}} \cdot \mathfrak{X}}{\sigma_s} = \frac{\overline{\mathbf{V}} \cdot \overline{\mathfrak{X}} - \overline{\mathbf{V}} \cdot \mathfrak{X}}{\Delta V^2}$$

- $$\mathcal{R} := \frac{\Delta \mathfrak{X}^2}{\sigma_s} - \frac{\mathfrak{Z}^2}{\sigma_t}$$

$$\overline{Q} := \sigma_s \sum_A \frac{Q_A}{\sigma_A}, \quad \Delta Q^2 := \overline{Q^2} - \overline{Q}^2$$

$$\mathfrak{X}_A := \mathbf{X}_A - \mathbf{V}_A T_A \quad [\mathfrak{X}_A = \Xi_A(0)]$$

$$\delta \mathbf{P} := \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0$$

$$\delta E := E_1 + E_2 - E_0$$

$$\delta \omega := \delta E - \overline{\mathbf{V}} \cdot \delta \mathbf{P}$$

# Details on $S(\Phi \rightarrow \phi\phi)$

[Ishikawa, Oda (1809.04285)]

- $\sigma_t = \frac{1}{\sigma_s} \left[ \frac{(\delta \mathbf{V}_1)^2}{\sigma_0 \sigma_1} + \frac{(\delta \mathbf{V}_2)^2}{\sigma_0 \sigma_2} + \frac{(\delta \mathbf{V}_1 - \delta \mathbf{V}_2)^2}{\sigma_1 \sigma_2} \right]^{-1},$   $\delta Q_a := Q_a - Q_0$
- $\mathfrak{I} = -\sigma_s \sigma_t \left[ \frac{\delta \mathfrak{X}_1 \cdot \delta \mathbf{V}_1}{\sigma_0 \sigma_1} + \frac{\delta \mathfrak{X}_2 \cdot \delta \mathbf{V}_2}{\sigma_0 \sigma_2} + \frac{(\delta \mathfrak{X}_1 - \delta \mathfrak{X}_2) \cdot (\delta \mathbf{V}_1 - \delta \mathbf{V}_2)}{\sigma_1 \sigma_2} \right],$
- $\mathcal{R} = \sigma_s \left\{ \frac{(\delta \mathfrak{X}_1)^2}{\sigma_0 \sigma_1} + \frac{(\delta \mathfrak{X}_2)^2}{\sigma_0 \sigma_2} + \frac{(\delta \mathfrak{X}_1 - \delta \mathfrak{X}_2)^2}{\sigma_1 \sigma_2} - \sigma_s \sigma_t \left[ \frac{\delta \mathfrak{X}_1 \cdot \delta \mathbf{V}_1}{\sigma_0 \sigma_1} + \frac{\delta \mathfrak{X}_2 \cdot \delta \mathbf{V}_2}{\sigma_0 \sigma_2} + \frac{(\delta \mathfrak{X}_1 - \delta \mathfrak{X}_2) \cdot (\delta \mathbf{V}_1 - \delta \mathbf{V}_2)}{\sigma_1 \sigma_2} \right]^2 \right\}.$