場の量子論と因子化代数

繁村 知宏
京都大学 素粒子論研究室

東京女子大学セミナー
2025 年 6 月 25 日
川平 将志氏 (神戸大学) との研究 arXiv:2412.08183 に基づく

本研究の概要

- 因子化代数は場の量子論の定式化の一種
- 赤外発散を「発散」無しで取り扱うことができる

本研究の動機

元々は量子重力に興味があった
→ 勉強しているうちに量子化とは何かがよくわからなくなった
→ まずは量子化について勉強するべき

- 量子化には様々な手法がある
- 因子化代数は場の理論の量子化の手法の１つ
- 数学が好きで物理がやりたい私には相性が良かった

本研究の最終目標

因子化代数を通じて量子化とは何かを理解し、重力の量子化について自分なりの答えを得ること

量子化とは

古典力学に基づいて量子力学を構築すること

なぜ量子化が必要なのか

古典力学では説明できない物理現象があるから

- 固体の低温での比熱
- 光電効果
- 黒体放射のスペクトル

などなど

以下では黒体放射のスペクトルについて考えてみる

黒体放射のスペクトル

古典的には温度 T の黒体から放射される振動数 ν の電磁波のエネルギー密度は

$$u_{\mathrm{RJ}}(\nu, T) = \frac{8\pi k_{\mathrm{B}} T}{c^3}\nu^2 \quad \text{(レイリー・ジーンズの法則)}.$$

c: 光速、k_{B}: ボルツマン定数

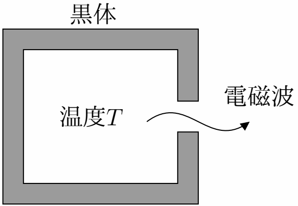

Figure: 黒体で覆われた空洞から電磁波が出る

レイリー・ジーンズの法則

- 空洞内では様々な波数ベクトル $\mathbf{k}$ の電磁波 (定常波) が存在する
- 波数ベクトル $\mathbf{k}$ の電磁波は振動数 $\nu = \frac{c}{2\pi}|\mathbf{k}|$ の調和振動子とみなせる
- 古典力学では調和振動子 1 個あたりの平均エネルギーは $k_\mathrm{B}T$
- 空洞全体の電磁場の平均エネルギーは $E = 2\sum_\mathbf{k} k_\mathrm{B}T$

レイリー・ジーンズの法則

- 空洞として大きさ L の立方体を考える
- ここで $\mathbf{k}$ は「空洞の壁は電磁波を通さないという条件から $\mathbf{k} = \frac{\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$. ただし n_x, n_y, n_z は 0 以上の整数
- $\nu = \frac{c}{2\pi}|\mathbf{k}|$ より

$$\frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k}} = \frac{1}{L^3}\sum_{n_x=0}^{\infty}\sum_{n_y=0}^{\infty}\sum_{n_z=0}^{\infty} \xrightarrow{L\to\infty} \frac{4\pi}{c^3}\int_0^{\infty}\nu^2 \mathrm{d}\nu$$

よってエネルギー密度は

$$\frac{E}{L^3} = \frac{2}{L^3}\sum_{\mathbf{k}} k_{\mathrm{B}}T \xrightarrow{L\to\infty} \int_0^{\infty}\frac{8\pi k_{\mathrm{B}}T}{c^3}\nu^2$$

古典論からのずれ

レイリー・ジーンズの法則は実測値と一致しない

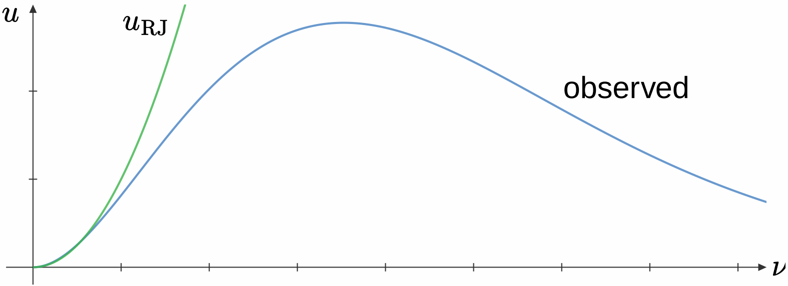

Figure: ν が大きい領域でずれている

古典論では黒体放射のスペクトルを説明できない

エネルギー量子

古典力学で調和振動子のエネルギー $E = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}kq^2$ は 0 から ∞ までの任意の値をとることができるが、以下の仮定をしてみる

> E はある量 $\epsilon > 0$ を単位として離散的な値のみをとる

プランクの公式

この仮定の下で温度 T の調和振動子の平均エネルギーは $E = \frac{\epsilon}{e^{\epsilon/T}-1}$
黒体放射のスペクトル分布は

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\epsilon(\nu)}{e^{\epsilon(\nu)/T} - 1} \nu^2$$

h を定数として $\epsilon(\nu) = h\nu$ と選べば実測値とよく一致する

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/(k_\mathrm{B}T)} - 1} \quad \text{(プランクの公式)}$$

なぜエネルギーは量子化されるのか

プランクの公式を出す際にエネルギーは離散的と仮定
したが、なぜこれでうまくいったのだろうか

調和振動子

- ばね定数 k のばねに繋がれた質量 m の質点を調和振動子という
- ばねの基準位置からの変位を q, 質点の運動量を p とすればエネルギーは $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2$
- $H(q,p)$ をハミルトニアンという

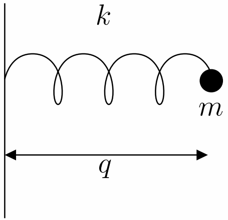

Figure: 調和振動子

正準量子化

- 古典的にはq, pは実数
- 量子力学ではq, pは「行列」であり、$qp - pq = i\hbar \quad (\hbar = \frac{h}{2\pi})$が成り立つ(ただし右辺は単位行列の定数倍)
- この式を正準交換関係といい、q, pに正準交換関係を課して量子化することを正準量子化という
- 正準量子化された調和振動子のエネルギーは$k = m(2\pi\nu)^2$として$E = h\nu n$

エネルギー量子化は調和振動子を量子化した結果出てきた

まとめ

- 黒体放射のスペクトルは古典力学では説明できないが、量子力学では説明できる
- 調和振動子のエネルギーは古典力学では連続的だが、量子力学では離散的
- 調和振動子は正準交換関係を課すことで量子化できた

1. イントロダクション
2. 量子化
3. 場の理論の量子化
   - 経路積分の読み替え
   - 有限次元の場合
   - 一般の次元の場合
4. 因子化代数と赤外発散

経路積分

- 場の理論を量子化する方法はいくつかある
- 経路積分は直感的にわかりやすいが、数学的には定義するのが一般に難しい
- 経路積分のアイディアを別の形に読み替えて量子化を考えたい

$\rightarrow$ コホモロジー (商空間) を利用した量子化

有限次元の場の理論

- 以下ではユークリッド時空を考える
- まずは簡単のため時空が n 個の点からなる場合の実スカラー場の理論 (の類似物) を考える

時空	$\{1, \ldots, n\}$ という集合
スカラー場	$\mathbb{R}^n$ の元
作用	$\mathbb{R}^n$ 上の関数
経路積分	$\mathbb{R}^n$ 上の積分

有限次元の経路積分

- スカラー場は $\mathbb{R}^n$ の元なので $(x_1, \ldots, x_n)$ と表す
- $A_{i,j}$ を正定値行列として作用が $-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} x_i A_{i,j} x_j$ と書ける場合を考えてみる
- 物理量として $x_1, \ldots, x_n$ の多項式で表される量 $p(x)$ を考える (例：$p(x) = (x_1)^2 + x_2 + 2x_3$)

$p(x)$ の経路積分による期待値は

$$\langle p(x) \rangle = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} p(x) \exp(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} x_i A_{i,j} x_j) \mathrm{d}x^n}{\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} x_i A_{i,j} x_j) \mathrm{d}x^n}$$

ベクトル場の発散

- $p(x)$ の期待値は直接計算できるが、以下ではあえて別の見方をしてみる
- まずは $\mathbb{R}^n$ 上の体積形式として $\omega \equiv \exp(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n x_i A_{i,j} x_j)\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$ を考える

$\mathbb{R}^n$ 上のベクトル場 $\sum_{i=1}^n v_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ に対して体積形式 ω に関する発散を以下で定義する

$$\mathrm{div}_\omega\left(\sum_{i=1}^n v_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \equiv -\sum_{i,j=1}^n x_i A_{i,j} v_j(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(x)$$

発散は $\mathbb{R}^n$ 上ベクトル場から $\mathbb{R}^n$ 上の関数への写像

発散の性質

$\mathbb{R}^n$ 上の任意の関数 f と任意のベクトル場 X に対して以下が成り立つ

$$\int_{\mathbb{R}^n} X(f)\omega = \int_{\mathbb{R}^n} f \operatorname{div}_\omega(X)\omega$$

- 特に $f \equiv 1$ とすれば任意のベクトル場 X に対して $\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}_\omega(X)\omega = 0$
- よってある多項式係数のベクトル場 $p_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ の発散として表せる多項式の経路積分による期待値はゼロ：$\langle \operatorname{div}_\omega(p_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i})\rangle = 0$

商空間

- $\mathbb{R}^n$ 上の多項式の空間 $P(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とみなすと、$\mathrm{im}(\mathrm{div}_\omega)$ はその部分ベクトル空間
- $\mathrm{im}(\mathrm{div}_\omega)$ に属する多項式の経路積分による期待値はゼロなので、物理量の期待値をとる操作は以下のように分解する

$$P(\mathbb{R}^n) \to P(\mathbb{R}^n)/\,\mathrm{im}(\mathrm{div}_\omega) \to \mathbb{R}$$

- 実は $P(\mathbb{R}^n)/\,\mathrm{im}(\mathrm{div}_\omega)$ と $\mathbb{R}$ はベクトル空間として同型
- $P(\mathbb{R}^n)/\,\mathrm{im}(\mathrm{div}_\omega)$ において $[1] \neq [0]$ であり、$[1]$ を基底としてとれる

商空間による経路積分

$p(x) \in P(\mathbb{R}^n)$ を $P(\mathbb{R}^n)/\operatorname{im}(\operatorname{div}_\omega)$ に射影して基底 $[1]$ で表したときの係数を $\tilde{p}$ とする：$[p(x)] = \tilde{p}[1]$

$\tilde{p}$ は $p(x)$ の経路積分による期待値と一致する：

$$\tilde{p} = \langle p(x) \rangle$$

よって経路積分の測度 (体積形式) に関する商空間を考えることで経路積分を実行できる

まとめ

- 経路積分の測度に関して発散が定義できる
- 発散の像の上では経路積分の期待値がゼロなので、観測量の空間を発散の像で割った商空間の上で期待値を考えられる
- 商空間は $\mathbb{R}$ と同型であり、適切な基底を選ぶことで経路積分が実行できる

一般の次元の場合

先述の方法を n 次元ユークリッド時空の場合に拡張する

- 時空：n 個の点 $\to n$ 次元ユークリッド時空 $\mathcal{M}$
- スカラー場：$\mathbb{R}^n$ の元 $\to \mathcal{M}$ 上の関数 $\phi(x)$
- 作用：$\mathbb{R}^n$ 上の関数 $\to \mathcal{M}$ 上の汎関数 $S[\phi]$

経路積分の測度 $\exp(-S[\phi])\mathcal{D}\phi$ は数学的に定義するのが難しいが、発散は定義できるので先述の方法で経路積分を定義できる。

さらに一般の理論の場合

- 一般の理論では先述の

$$\text{ベクトル場} \to \text{物理量}$$

  という写像の列はバタリン・ビルコビスキー微分鎖複体に置き換わる
- 物理量の空間から微分鎖複体の 0 次のコホモロジーへの写像が定義でき、期待値は 0 次のコホモロジーを見ることに相当する
- この考え方を発展させて、くりこみや演算子積の概念も取り入れたものが因子化代数

1. イントロダクション
2. 量子化
3. 場の理論の量子化
4. 因子化代数と赤外発散
    - 因子化代数のイントロダクション
    - 経路積分
    - 状態
    - まとめと今後の展望

因子化代数とは?

場の量子論を数学的に定式化するための１つの手段

因子化代数の例

QFT	因子化代数	
2 次元 CFT	頂点代数	[R. E. Borcherd 1986]
TQFT	E_n 代数	[J. Lurie 2009]
摂動的 QFT	導来観測量代数	[K. Costello, O. Gwilliam 2016]
非摂動的 QFT	発展途上	[L Alfonsi, C. A. C. Young 2023]
		[K. Costello, O. Gwilliam 2023]

今回の話は主に導来観測量代数に関するもの

(大まかな) 定義

$\mathcal{M}$:Euclid 時空
$U, U_1, U_2, W \subset \mathcal{M}$: 開集合

$\mathcal{M}$ 上の因子化代数 $\mathcal{F}$

$\mathcal{M}$ の開集合 U からベクトル空間 $\mathcal{F}(U)$ への写像で以下の条件を満たすもの：
(条件 1) 開集合 $U_1, U_2, \cdots \subset W$ で各 U_i が違いに交わらないものに対してベクトル空間の線型写像

$$\mathcal{F}(U_1) \otimes \mathcal{F}(U_2) \otimes \cdots \to \mathcal{F}(W)$$

が存在する。**ベクトル空間 $\mathcal{F}(U)$ を U 上の観測量の集合と思えばこれは OPE.**

(大まかな) 定義 続き

(条件 2) 開集合 $W \subset \mathcal{M}$ の開被覆 $\{U_i | i \in I\}$ に対して線型写像の列

$$\bigoplus_{i,j \in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \xrightarrow{f} \bigoplus_{k \in I} \mathcal{F}(U_k) \xrightarrow{g} \mathcal{F}(W) \to 0$$

が存在して完全列 ($\mathrm{im}\, f = \ker g$ かつ g は全射) になる。
$\Rightarrow$ **W 上の観測量の情報は U_i から得られる。**

因子化代数でどのように物理を記述する？

経路積分に対応する概念を
因子化代数で考えたい

経路積分

時空 $\mathcal{M}$ の開集合 U に対して $\mathcal{F}(U)$ を U 上の観測量の集合とする。以後 $\mathcal{F}(U)$ を $\mathrm{Obs}(U)$ と記し観測量代数とよぶ (定義は次スライド)。

経路積分は写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Obs}(\mathcal{M}) &\to \mathbb{R}[[\hbar]] \\ \mathcal{O} &\mapsto \langle \mathcal{O} \rangle \end{aligned}$$

で適切な条件 (後述) を満たすものとする。

観測量代数

以後は例として自由スカラー場を考える。

観測量代数

$C_c^\infty(\mathcal{M})$:$\mathcal{M}$ 上のコンパクト台をもつ関数の集合
$\mathrm{Sym}(V)$: ベクトル空間 V に形式的対称積 $*$ を導入した空間
$\mathcal{M}$ 上の観測量代数 $\mathrm{Obs}(\mathcal{M})$ を以下のように定義する。

$$\mathrm{Obs}(\mathcal{M}) := \mathrm{Sym}(C_c^\infty(\mathcal{M}))$$

$\mathcal{O} \in \mathrm{Obs}(\mathcal{M})$ を観測量とよび、
$c \in \mathbb{R}, f, f_1, f_2 \in C_c^\infty(\mathcal{M})$ を用いて以下のように表す。

$$\mathcal{O} = c + f + f_1 * f_2 + \cdots$$

観測量と場

場の配位空間

(Euclidean) 時空 $\mathcal{M}$ 上の場の配位空間を $C^\infty(\mathcal{M})$ とする。

観測量と場のペアリング

観測量 $\mathcal{O} = c + f + f_1 * f_2 + \cdots$ と場 Φ のペアリングを以下のように定める。

$$\mathcal{O}(\Phi) := c + \int_{\mathcal{M}} f(x)\Phi(x)\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{M}} f_1(x)\Phi(x)\mathrm{d}x \int_{\mathcal{M}} f_2(x)\Phi(x)\mathrm{d}x$$

$\mathcal{O}$ は場 Φ から数 $\mathcal{O}(\Phi)$ への写像 (汎関数) とみなせるので、(普通の意味で) 経路積分形式での観測量である。

経路積分(再掲)

経路積分は写像

$$\begin{aligned} \mathrm{Obs}(\mathcal{M}) &\to \mathbb{R}[[\hbar]] \\ \mathcal{O} &\mapsto \langle \mathcal{O} \rangle \end{aligned}$$

で**適切な条件**を満たすものとする。

経路積分には**シュウィンガー・ダイソン方程式**に基づいた条件を課す。

シュウィンガー・ダイソン方程式

シュウィンガー・ダイソン方程式

$$
\int \mathcal{D}\Phi \frac{\delta}{\delta\Phi}\left(\mathcal{O}(\Phi)e^{-\frac{1}{\hbar}S(\Phi)}\right) = 0
$$

$$
\Rightarrow \int \mathcal{D}\Phi \left(\frac{\delta\mathcal{O}}{\delta\Phi} - \frac{1}{\hbar}\frac{\delta S}{\delta\phi}\mathcal{O}\right) e^{-\frac{1}{\hbar}S} = 0
$$

$$
\Rightarrow \left\langle \frac{\delta\mathcal{O}}{\delta\Phi} - \frac{1}{\hbar}\frac{\delta S}{\delta\phi}\mathcal{O} \right\rangle = 0
$$

経路積分に課す条件

物理量 $\mathcal{O} \in \mathrm{Obs}(\mathcal{M})$ に対して経路積分による期待値 $\langle \mathcal{O} \rangle$ を定義したい。

条件

$\mathcal{O}$ はシュウィンガー・ダイソン方程式 $\left\langle \frac{\delta \mathcal{O}}{\delta \Phi} - \frac{1}{\hbar}\frac{\delta S}{\delta \phi}\mathcal{O} \right\rangle = 0$ を満たすとする。

この条件より $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathrm{Obs}(\mathcal{M})$ に対してある $\widetilde{\mathcal{O}} \in \mathrm{Obs}(\mathcal{M})$ が存在して $\mathcal{O}_1 - \mathcal{O}_2 = \frac{\delta \widetilde{\mathcal{O}}}{\delta \Phi} - \frac{1}{\hbar}\frac{\delta S}{\delta \phi}\widetilde{\mathcal{O}}$ となるならば $\langle \mathcal{O}_1 \rangle = \langle \mathcal{O}_2 \rangle$ となる。このような $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ の関係を $\mathcal{O}_1 \sim \mathcal{O}_2$ と表せばこれは同値関係である。

同値関係による商

$\mathrm{Obs}(\mathcal{M})$ は大きな空間なので取り扱いが難しい。直接 $\mathrm{Obs}(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}[[\hbar]]$ を定義するより

$$\mathrm{Obs}(\mathcal{M}) \to (\text{より小さな空間}) \to \mathbb{R}[[\hbar]]$$

とした方が取り扱いやすい。そこで先述の同値関係 $\sim$ を用いて

$$\mathrm{Obs}(\mathcal{M}) \to (\mathrm{Obs}(\mathcal{M})/\sim) \to \mathbb{R}[[\hbar]]$$

とすることを考える。

経路積分の構成

経路積分 $\mathrm{Obs}(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}[[\hbar]]$ をどのように定義する？

先述のアイディアに基づいて以下のようにコホモロジーを利用して経路積分を定義する。

$$\mathrm{Obs}(\mathcal{M}) \to H^0(\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(\mathcal{M})) \to \mathbb{R}[[\hbar]]$$
$$\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(\mathcal{M}) : \text{余鎖複体}$$

シュウィンガー・ダイソン方程式の情報は余鎖複体の構成に入っている。
$H^0(\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(\mathcal{M}))$ が先述の $(\mathrm{Obs}(\mathcal{M})/\sim)$ に相当する。

$\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(\mathcal{M})$ を導来観測量代数という。

状態の定義

経路積分を

$$\mathrm{Obs}(\mathcal{M}) \to H^0(\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(\mathcal{M})) \to \mathbb{R}[[\hbar]]$$

で定義した。$H^0(\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(\mathcal{M})) \simeq \mathbb{R}[[\hbar]]$ ならばこれで問題なく定義できているが、一般には $H^0(\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(\mathcal{M})) \simeq \mathbb{R}[[\hbar, X, Y]]$ などになり得る。よって物理的に妥当な写像 $H^0(\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(\mathcal{M})) \to \mathbb{R}$ を定義する必要がある。この写像を**状態**という。

augmentation 状態

以下では真空に対応する状態を考える。

定理

数学的な自然さから定まる augmentation 状態という状態を用いると、物理の摂動論の結果を再現する。

計算手法としてはこれで良いが、物理的な解釈がより明瞭な別の等価な定義があると嬉しい。

物理的解釈が明瞭な状態 [川平, 繁村 2024]

定理

$\mathbb{R}^d$ 上の有質量及び無質量自由スカラー場理論において以下の 3 つの状態は等価である。

Augmentation 状態

Schwartz 状態

Compactification 状態

Schwartz 状態と compactification 状態は物理的解釈が明瞭な状態。
Schwartz 状態:Green 関数の解析的性質から定まる。
compactification 状態: 時空のコンパクト化から定まる。

状態は何をしている？

状態は写像 $H^0(\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(\mathcal{M})) \to \mathbb{R}[[\hbar]]$ であり、典型的には $H^0(\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(\mathcal{M})) \simeq \mathbb{R}[[\hbar, X, Y]]$.
X, Y は **IR 発散の生成子**と考えられて、状態は X, Y にゼロを代入する操作として実現される。

(普通の) 演算子形式の意味での解釈

物理的な状態 $|\mathrm{phys}\rangle$ に対して IR 発散の生成子 X, Y が $X|\mathrm{phys}\rangle = Y|\mathrm{phys}\rangle = 0$ と作用することを要請している。

まとめ

- 因子化代数は場の量子論の数学的定式化の一種
- 経路積分をシュウィンガー・ダイソン方程式を指針としてコホモロジーから計算できる
- その際には状態を定義する必要がある
- **状態には数学的に自然なものと物理的な自然なものがあり、それは等価である**
- 状態を定義する際には **IR 発散の除去が明示的に行われる**

今後の展望

ヴィラソロ代数の導出 (ongoing work)

IR 発散の生成子をゼロに送ることは真空の不変性を要請していることに相当すると期待される。2 次元無質量系からヴィラソロ代数が導出できるだろうか？

コシュール双対性とホログラフィー

因子化代数とコシュール双対という概念を合わせるとホログラフィーの数学的定式化ができると期待されている。特に近年の量子情報的なホログラフィーの議論を数学的に統一的に定式化できるかもしれない。

ご清聴ありがとうございました

導来観測量代数の例

0 次元の場合を考える。時空 $\mathcal{M}$ は有限個の点の集合 $\mathcal{M} = \{1, 2, \ldots, N\}$ として $C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathcal{M}) = C^\infty(\mathcal{M}) = \mathbb{R}^N$. この場合は $\mathcal{O}^i(\Phi)\frac{\partial}{\partial \Phi^i} \in (\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(\mathcal{M}))^{-1}$ に対して cochain complex の微分 Δ^{q} は

$$\Delta^{\mathrm{q}}\left(\mathcal{O}^i(\Phi)\frac{\partial}{\partial \Phi^i}\right) = \hbar \frac{\partial \mathcal{O}^i(\Phi)}{\partial \Phi^i} - \frac{\partial S(\Phi)}{\partial \Phi^i}\mathcal{O}^i(\Phi)$$

となる。この式の右辺はシュウィンガー・ダイソン方程式に他ならない。

IR Divergence in $d = 1$

Definition

A Schwartz state $\langle - \rangle_{\mathrm{Sch}}$ is a smooth map:

$$\langle - \rangle_{\mathrm{Sch}} : H^0\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}(\mathbb{R}^d) \to H^0\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}.$$

Theorem

In massless and $d = 1$ case

$$H^n\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{C}[q, p] & (n = 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

There are two generators q, p of IR divergence.

In Schwartz state, we define $H^0\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ as setting $q = 0, p = 0$.

IR Divergence in $d \geq 2$

Theorem

In massless and higher dimensional case we have a map π:

$$H^n \mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\pi} \begin{cases} \mathrm{Sym}(V) & (n = 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

and $|\operatorname{im} \pi^0| \geq |\mathbb{Z}|$.

This means there is possibly uncountable number of IR divergence generators.