

Knotted cosmic strings in early universe

濱田 佑 (DESY)

共同研究者：

衛藤稔氏(山形大), 新田宗土氏(慶應大)

[arXiv: 2407.11731]に基づく



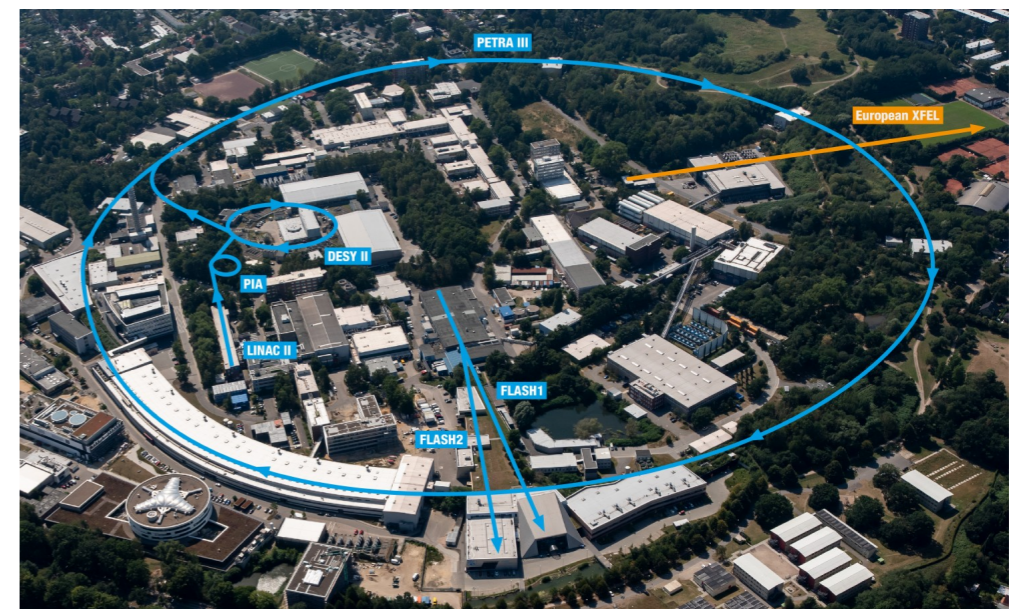
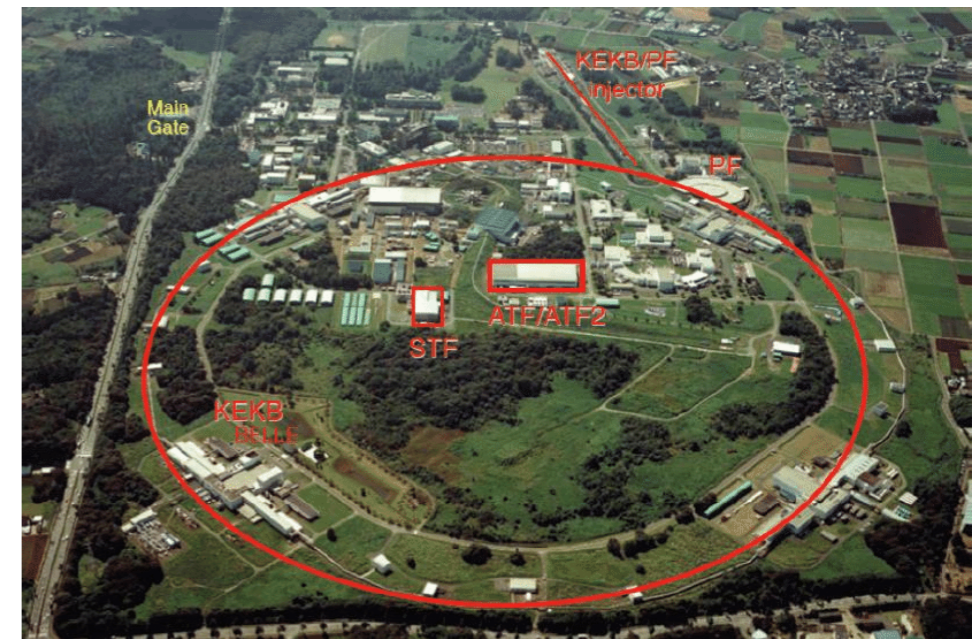
自己紹介

- 2021年3月 博士号取得(京都大学)
- 2021-2023 ポスドク@KEK (つくば)
- 2023- ポスドク@DESY (ハンブルク, ドイツ)



<https://kegenpress.com/football-samurai-city-9/>

KEK



DESY

Hamburg



Knotted cosmic strings in early universe

濱田 佑 (DESY)

共同研究者：

衛藤稔氏(山形大), 新田宗土氏(慶應大)

[arXiv: 2407.11731]に基づく



Knotted cosmic strings in early universe

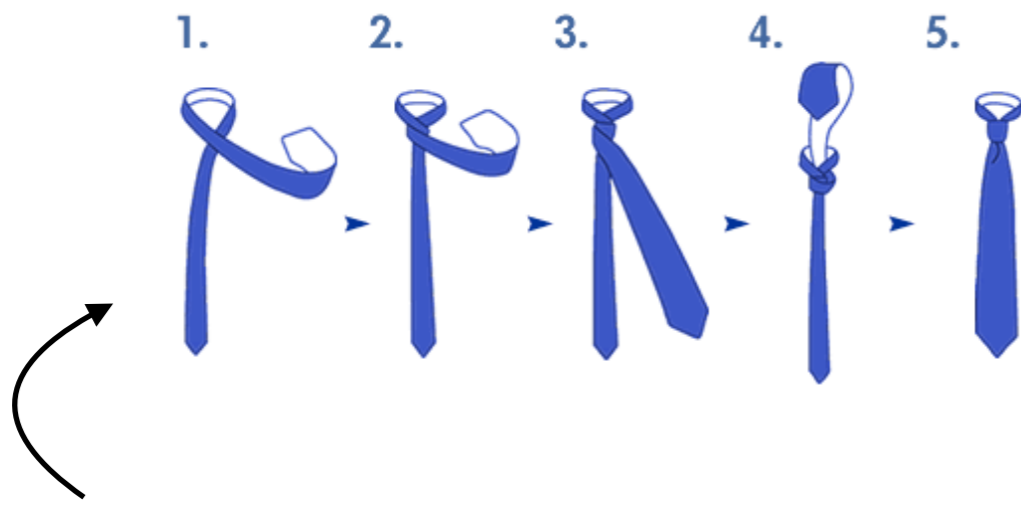
濱田 佑 (DESY)

共同研究者：

衛藤稔氏(山形大), 新田宗土氏(慶應大)

[arXiv: 2407.11731]に基づく





Knotted cosmic strings in early universe

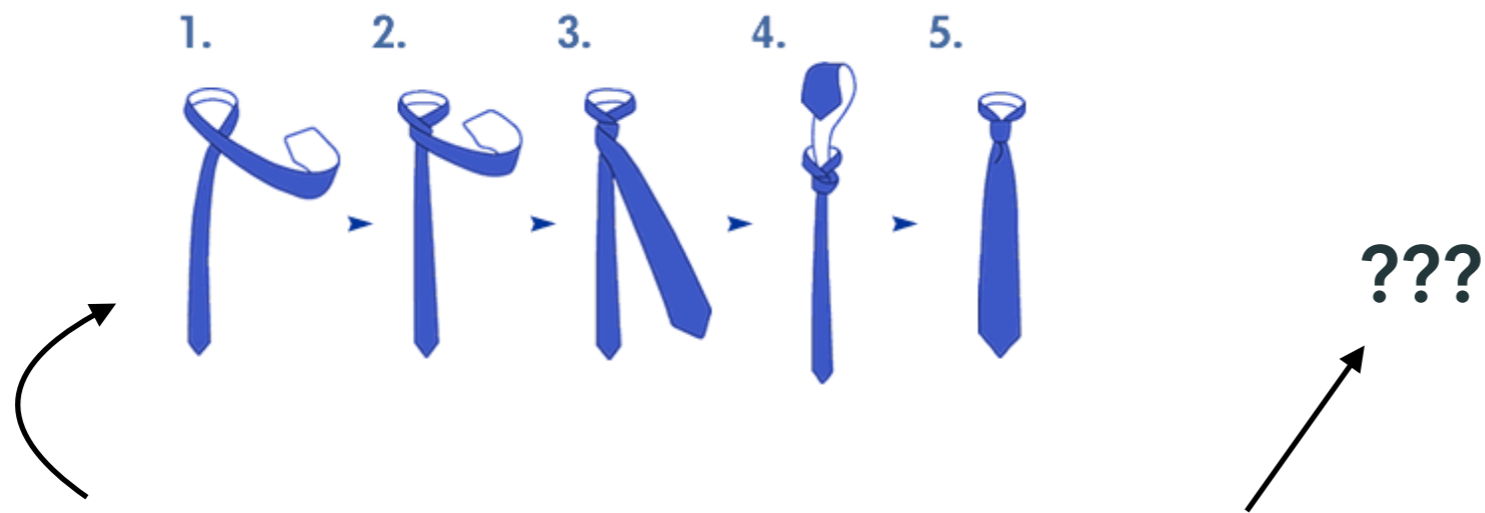
濱田 佑 (DESY)

共同研究者：

衛藤稔氏(山形大), 新田宗土氏(慶應大)

[arXiv: 2407.11731]に基づく





Knotted cosmic strings in early universe

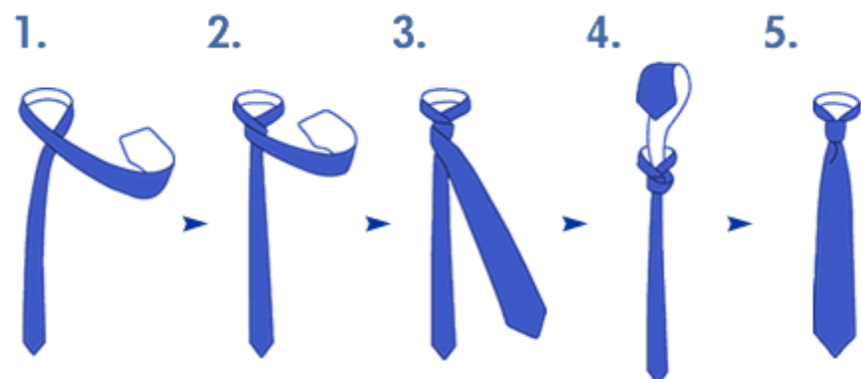
濱田 佑 (DESY)

共同研究者：

衛藤稔氏(山形大), 新田宗土氏(慶應大)

[arXiv: 2407.11731]に基づく





??? ← 場の理論が必要

Knotted cosmic strings in early universe

濱田 佑 (DESY)

共同研究者：
衛藤稔氏(山形大), 新田宗土氏(慶應大)

[arXiv: 2407.11731]に基づく



目次

- 古典的場の理論 (学部生向け)
- トポロジカルソリトン (大学院生向け)
- Cosmic stringとknot (自分の研究の話)
- まとめ

古典的場の理論

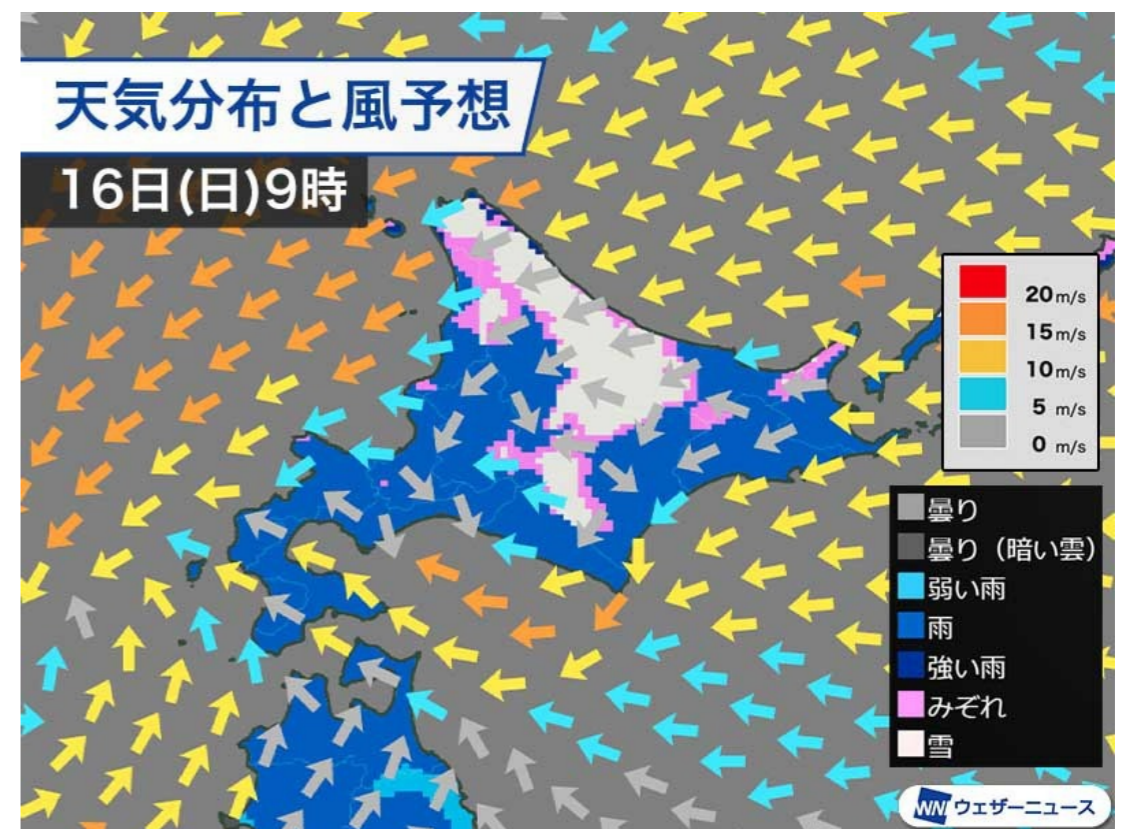
場とは

- 場 = 空間の各点上に定義された関数

スカラー関数 (スカラー場)



ベクトル関数 (ベクトル場)



- 数式で言うと

$$\phi(x, y, z) \equiv \phi(x)$$

$$\vec{A}(x, y, z) \equiv \vec{A}(x)$$

場とは

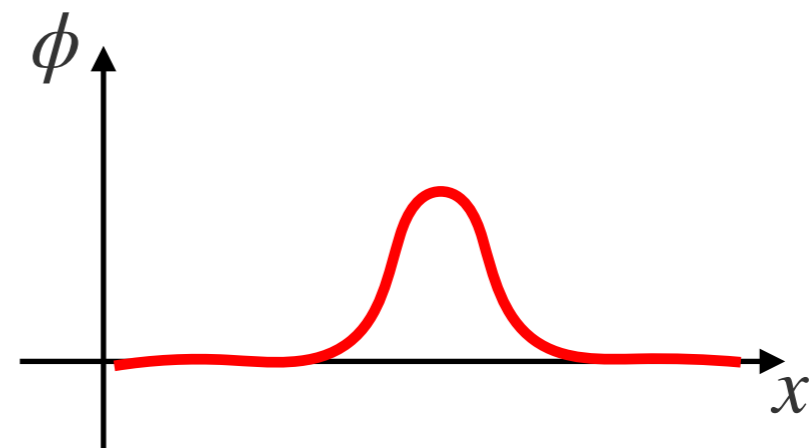
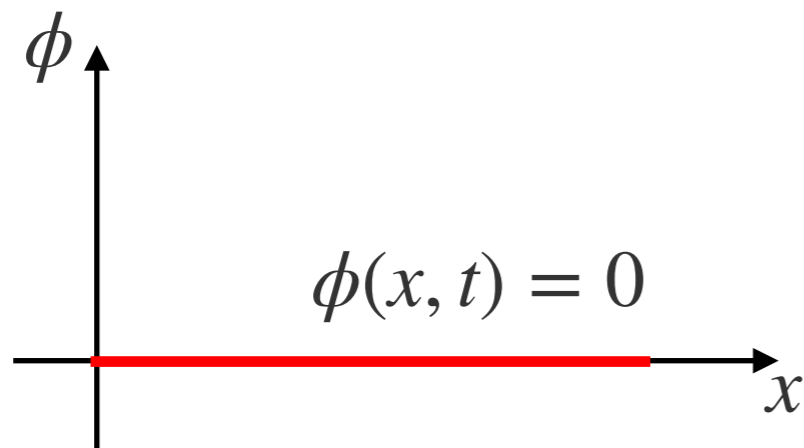
- 時刻 t に依存しててもいい： $\phi(x, y, z, t) \equiv \phi(x, t)$



場の励起と粒子

- 場が励起してない(真空)

- 場が局所的に励起してる



場の励起と粒子

- 励起の伝搬は相対論的波動方程式(運動方程式)で記述される
- スカラー場のLagrangianは

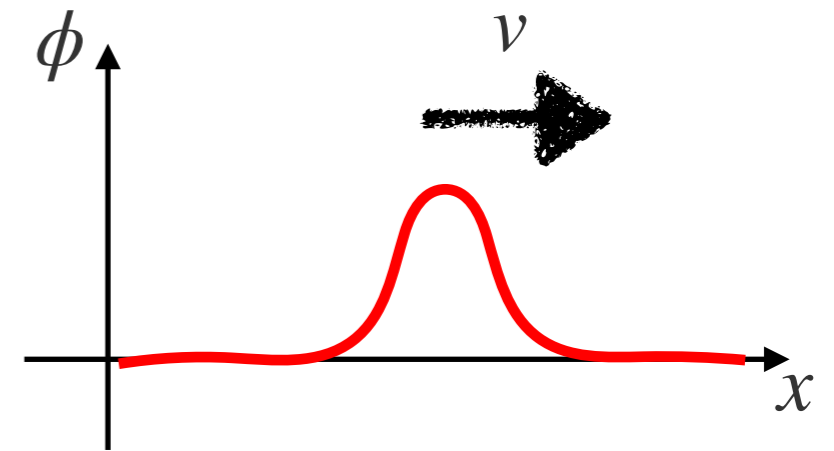
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 + \mathcal{O}(\phi^3)$$

→ Euler-Lagrange方程式 (運動方程式) :

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x, t) + m^2 \phi(x, t) = \mathcal{O}(\phi^2)$$

ほんとはnon-zeroの項があるけど、
 ϕ が十分小さいとして無視する

≒ 摂動的な励起 (自由場近似ともいう)



$$\partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \partial_i \partial_i$$

場の励起と粒子

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi(x, t) + m^2\phi(x, t) = 0$$

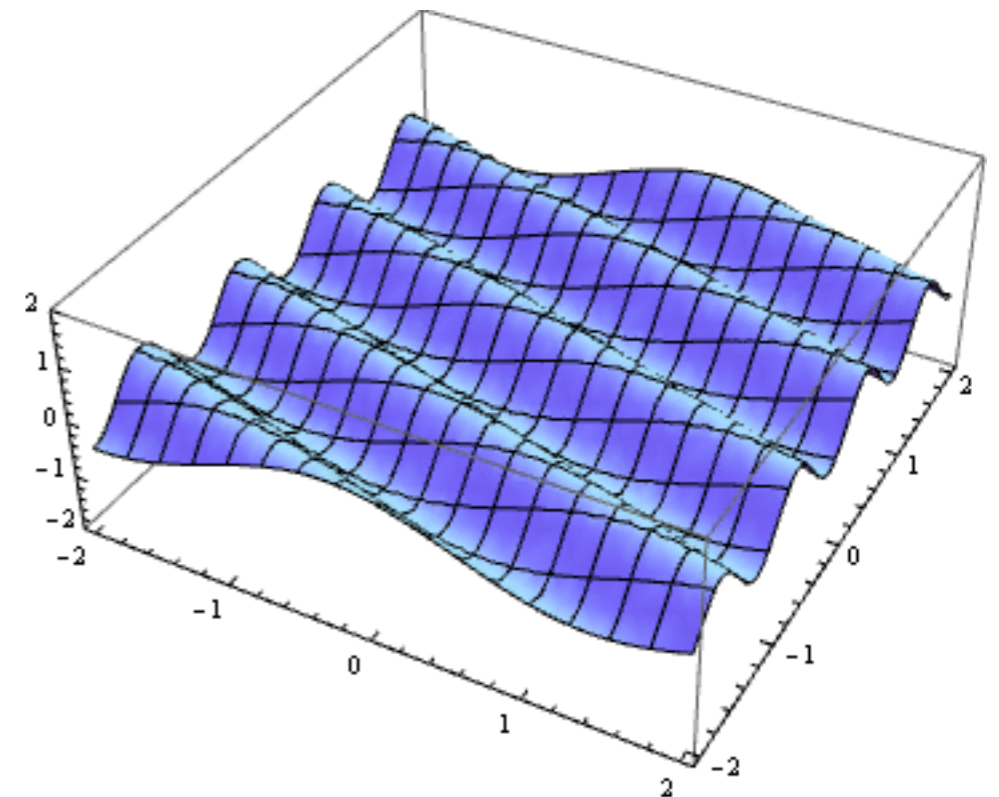
$$\partial_{\mu}\partial^{\mu} = \partial_t^2 - \partial_i\partial_i$$

- 解いてみると

$$\phi(x, t) \sim e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad \omega \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

さっきの絵よりは↓みたいな感じ

\vec{k} 方向に伝搬する平面波



場の励起と粒子

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi(x, t) + m^2\phi(x, t) = 0$$

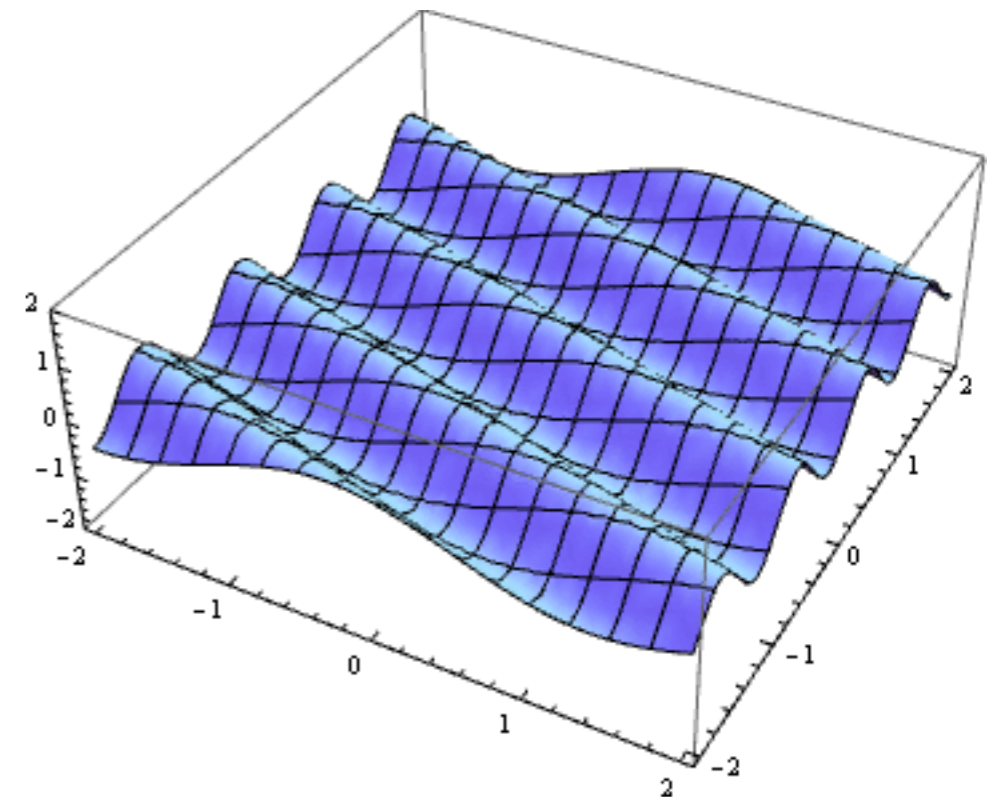
$$\partial_{\mu}\partial^{\mu} = \partial_t^2 - \partial_i\partial_i$$

- 解いてみると

$$\phi(x, t) \sim e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad \omega \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

さっきの絵よりは↓みたいな感じ

\vec{k} 方向に伝搬する平面波



場の励起と粒子

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x, t) + m^2 \phi(x, t) = 0$$

$$\partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \partial_i \partial_i$$

- 解いてみると

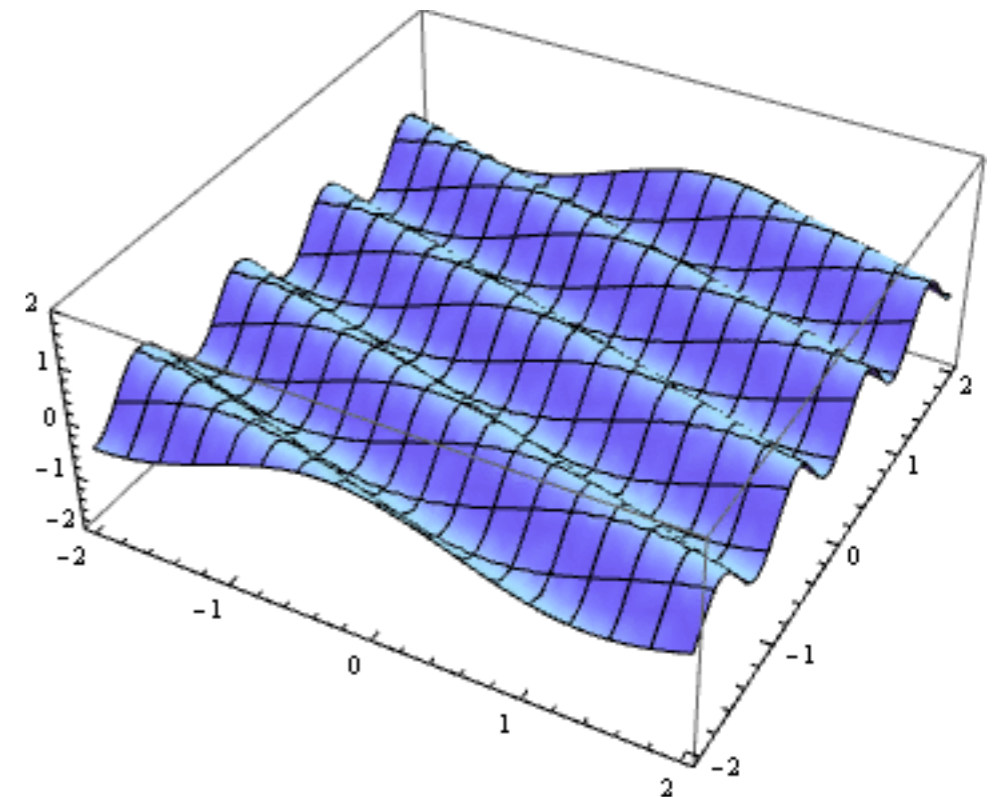
$$\phi(x, t) \sim e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \quad \omega \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

さっきの絵よりは↓みたいな感じ

\vec{k} 方向に伝搬する平面波

- 場の理論では、このような励起の伝搬を粒子の運動とみなす！

量子力学の波動関数みたいだけどちょっと違う
(まだ量子化していない)



粒子とソリトン

- ソリトンと呼ばれる、別のタイプの励起もある

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi(x, t) + m^2\phi(x, t) = \mathcal{O}(\phi^2)$$

さっきはこの部分(非線形項)を無視してたが、ここが重要になって安定な励起が存在することがある

粒子とソリトン

- ソリトンと呼ばれる、別のタイプの励起もある

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x, t) + m^2 \phi(x, t) = \mathcal{O}(\phi^2)$$

さっきはこの部分(非線形項)を無視してたが、ここが重要になって安定な励起が存在することがある

- 違う方程式での例

KdV方程式： $(\alpha, \beta: \text{係数})$

$$\partial_t u + \alpha u \partial_x u + \beta \partial_x^3 u = 0$$

非線形

粒子とソリトン

- ソリトンと呼ばれる、別のタイプの励起もある

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x, t) + m^2 \phi(x, t) = \mathcal{O}(\phi^2)$$

さっきはこの部分(非線形項)を無視してたが、ここが重要になって安定な励起が存在することがある

- 違う方程式での例

KdV方程式： $(\alpha, \beta: \text{係数})$

$$\partial_t u + \alpha u \partial_x u + \beta \partial_x^3 u = 0$$

非線形

粒子とソリトン

- ソリトンと呼ばれる、別のタイプの励起もある

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi(x,t) + m^2\phi(x,t) = \mathcal{O}(\phi^2)$$

さっきはこの部分(非線形項)を無視してたが、ここが重要になって安定な励起が存在することがある

- 例2, 津波 (数式無し)



非線形性が重要な、非摂動的な励起
(大きい波)

ここまでのまとめ

- 場の理論(古典論)における粒子：

非線形項を無視した波動方程式で記述される摂動的な励起

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi(x, t) + m^2\phi(x, t) = 0 \quad \rightarrow \phi(x, t) \sim e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$$

- ソリトン：

非線形性が重要な、非摂動的な励起

(大きい波)

$$\partial_t u + \alpha u \partial_x u + \beta \partial_x^3 u = 0$$

非線形



目次

- 古典的場の理論 (学部生向け)
- トポロジカルソリトン (大学院生向け)
- Cosmic stringとknot (自分の研究の話)
- まとめ

トポロジカルソリトン

トポロジカルソリトン

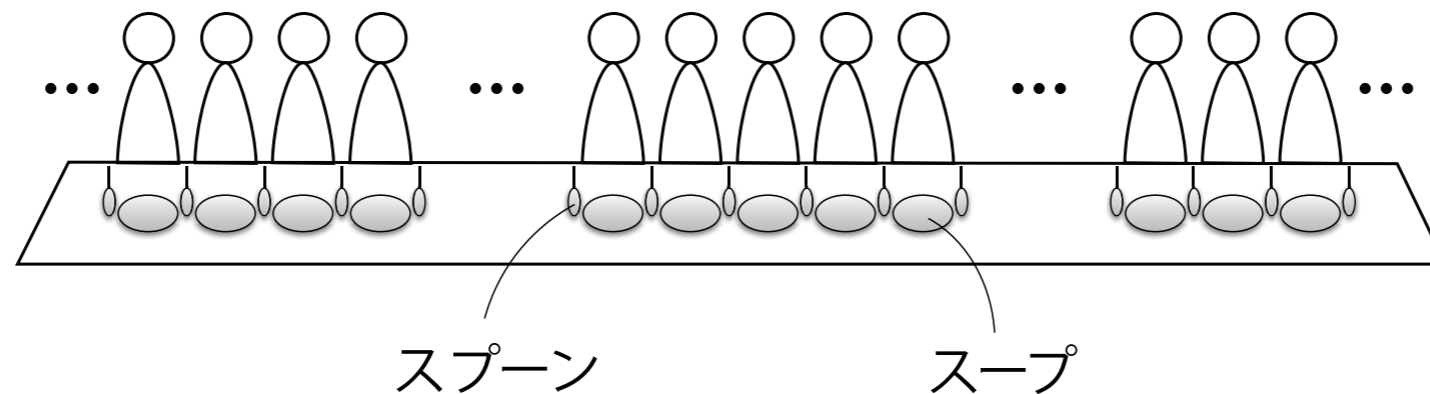
- ソリトンが安定に存在するかどうかは、考えてる模型(≒ラグランジアン≒運動方程式)によって違う
- 特に模型の持つトポロジー的な性質によって安定性が保証されるソリトンをトポロジカルソリトンと呼ぶ

トポロジー = 連続変形しても変わらない構造



トポロジカルソリトンの例1

- 非常に長いテーブルに人が座っていて、それぞれの前にスプーンとスープが置いてある

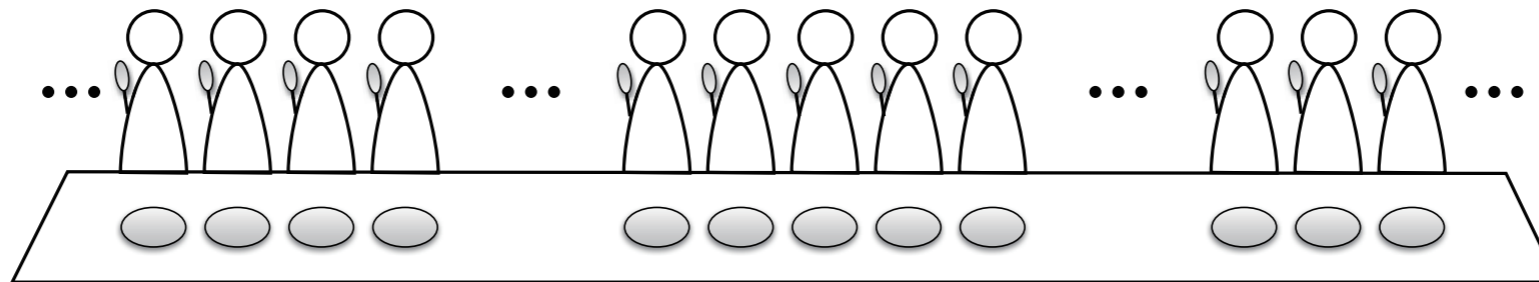


- 左右を反転させる変換のもとで不変 $\rightarrow \mathbb{Z}_2$ 対称性を持つ
- みんな早くスープを飲みたくてイライラしている。エネルギーが高い状態である。

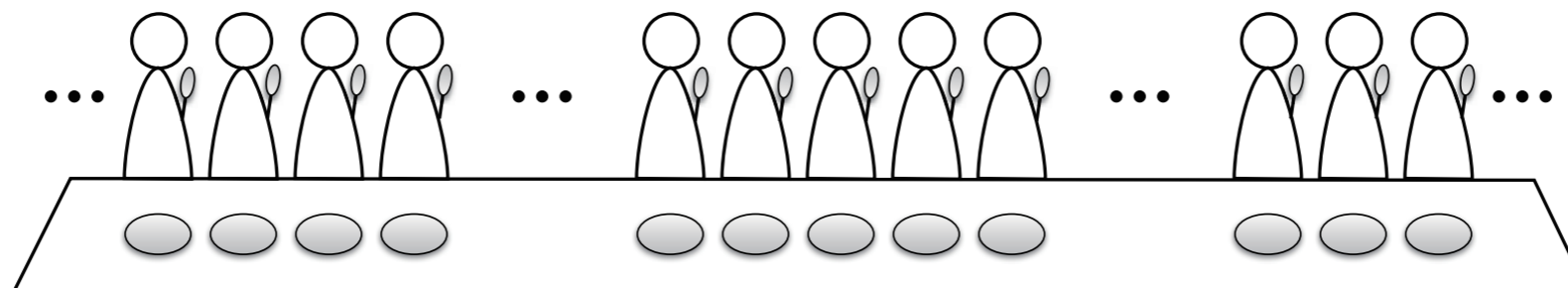
トポロジカルソリトンの例1

- 皆お腹が空いてきた。平和にスプーンを取るには次の2通りがある

全員が右手でスプーンを取った場合



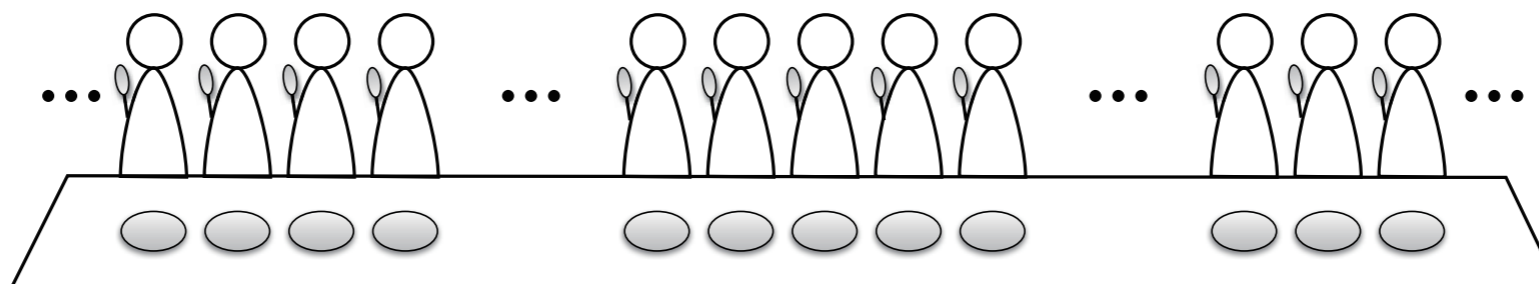
全員が左手でスプーンを取った場合



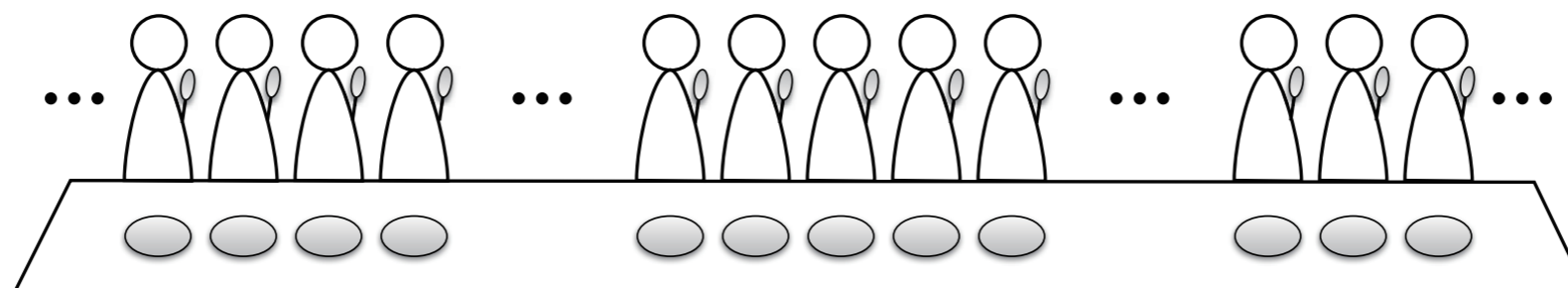
トポロジカルソリトンの例1

- 皆お腹が空いてきた。平和にスプーンを取るには次の2通りがある

全員が右手でスプーンを取った場合



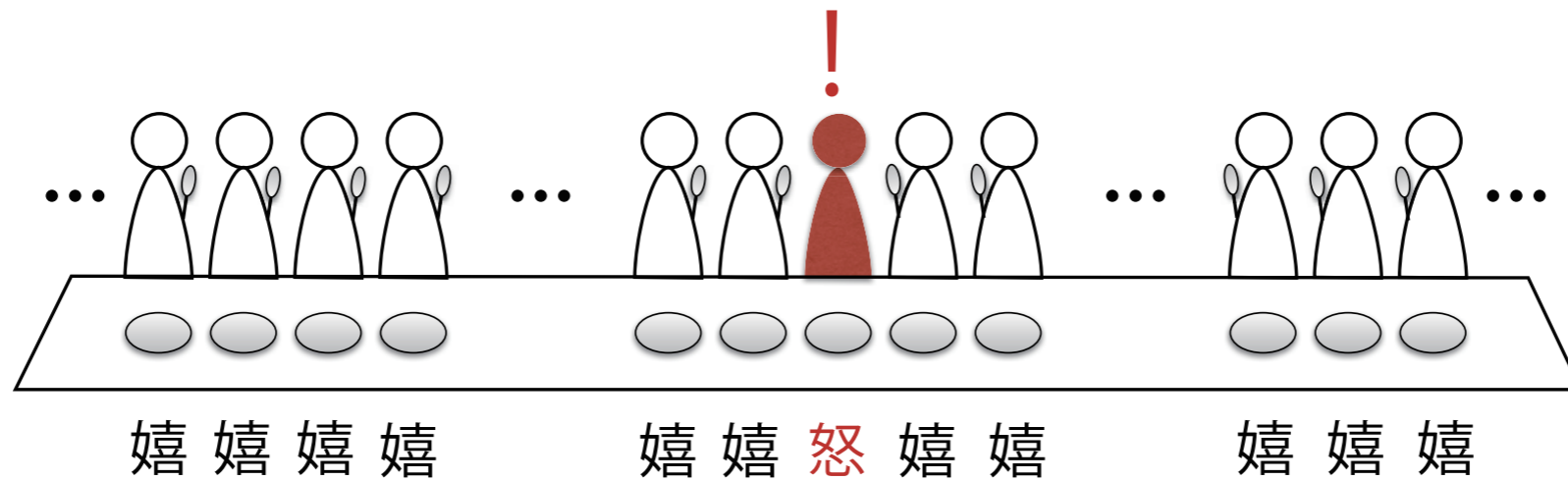
全員が左手でスプーンを取った場合



- 左右反転の対称性が破れている→対称性の自発的破れと呼ぶ

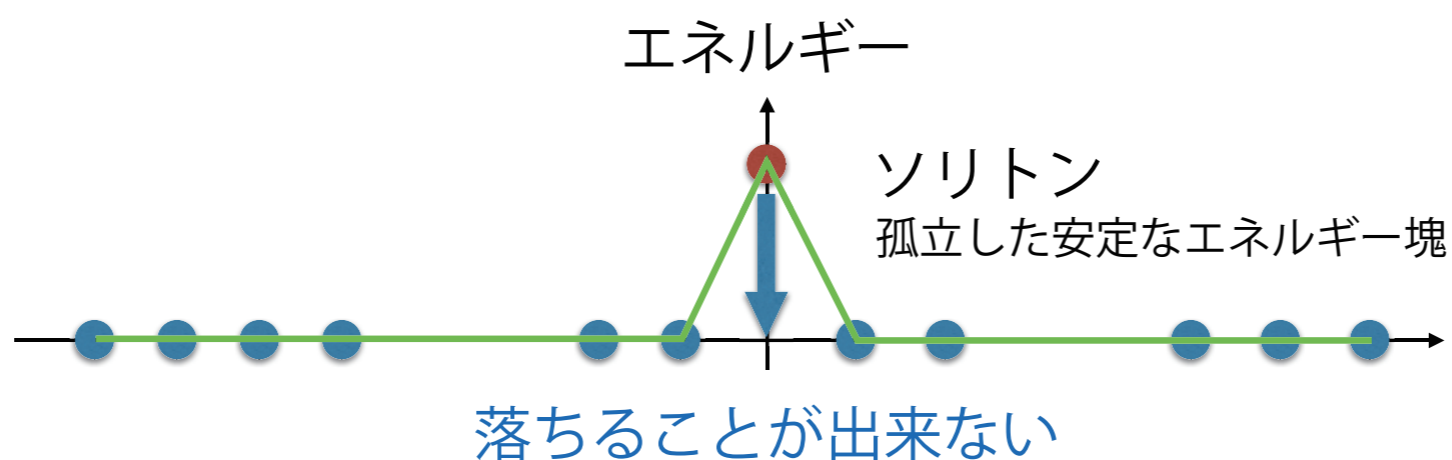
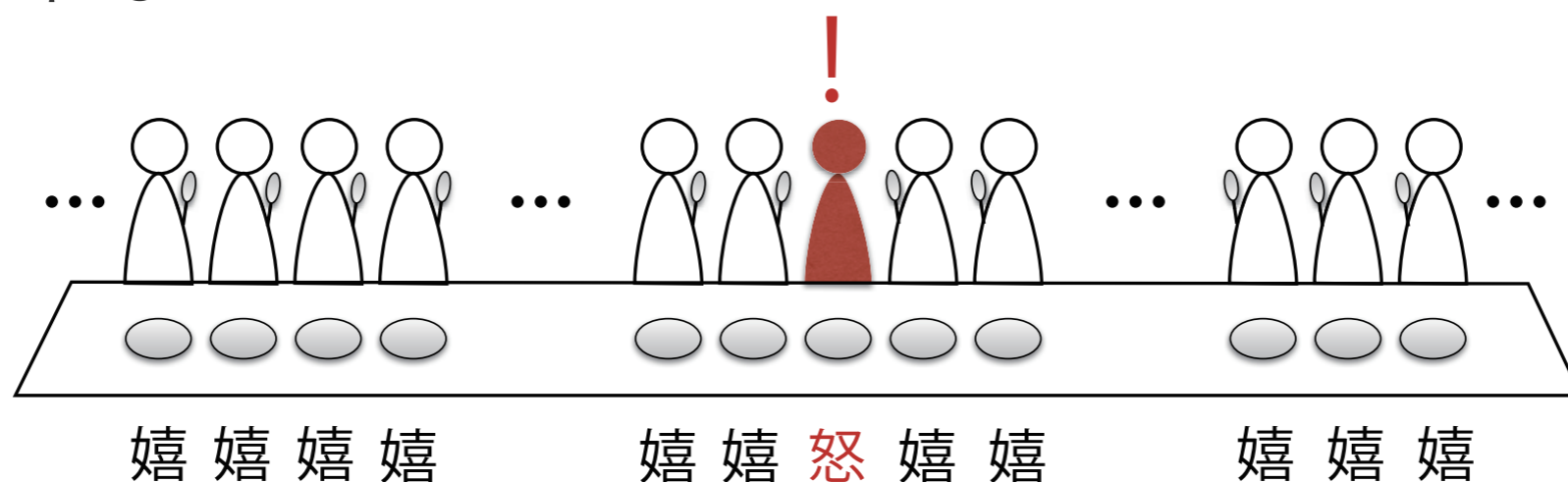
トポロジカルソリトンの例1

- 周りの人が適当に取ってしまうと、うっかりこういう状況が起きるかもしれない



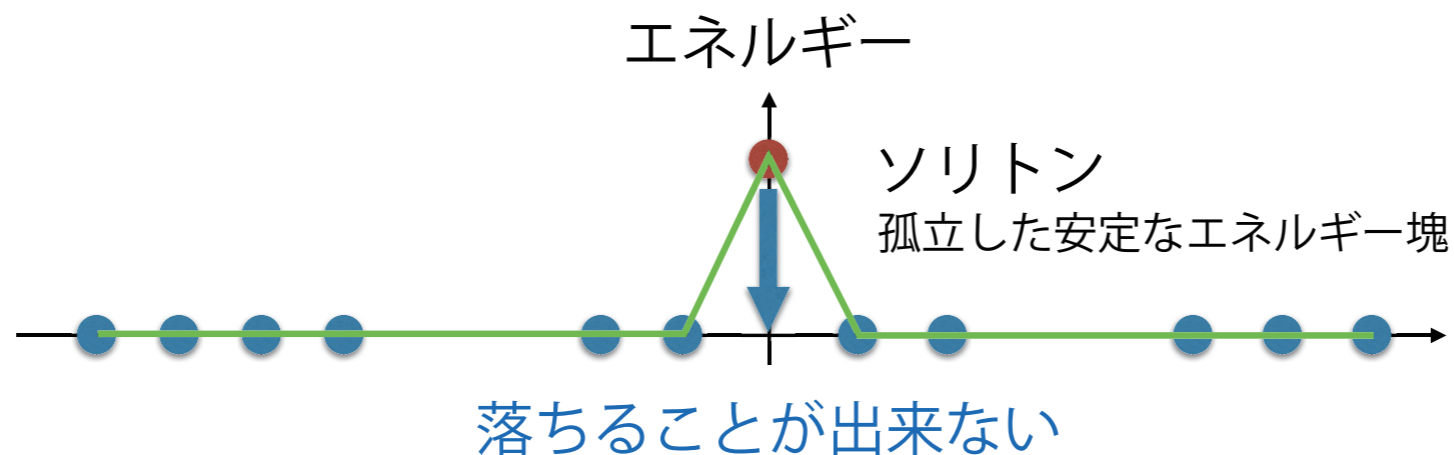
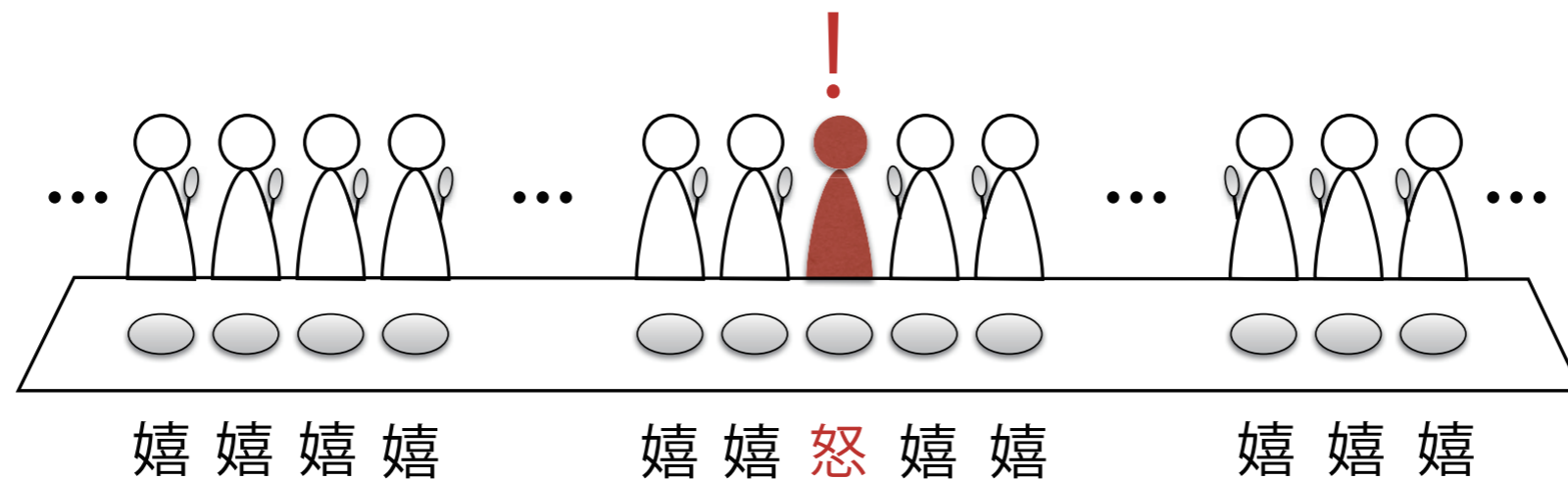
トポロジカルソリトンの例1

- 周りの人が適当に取ってしまうと、うっかりこういう状況が起きるかもしれない



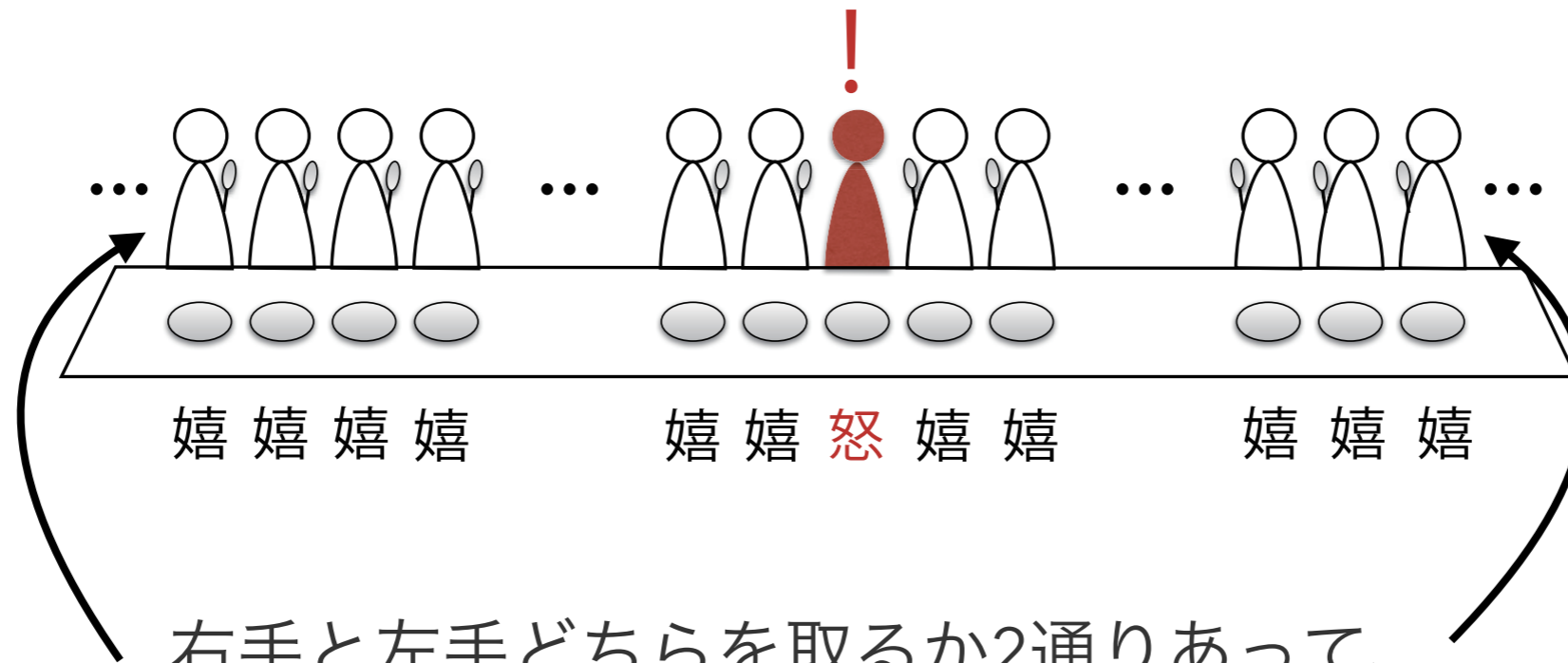
トポロジカルソリトンの例1

- 周りの人が適当に取ってしまうと、うっかりこういう状況が起きるかもしれない



- 隣の人からスプーンを奪っても、奪われた人がまた励起状態になるだけ → ソリトン自体は消えない

なぜこういうことが起きたのか？



嬉嬉嬉嬉

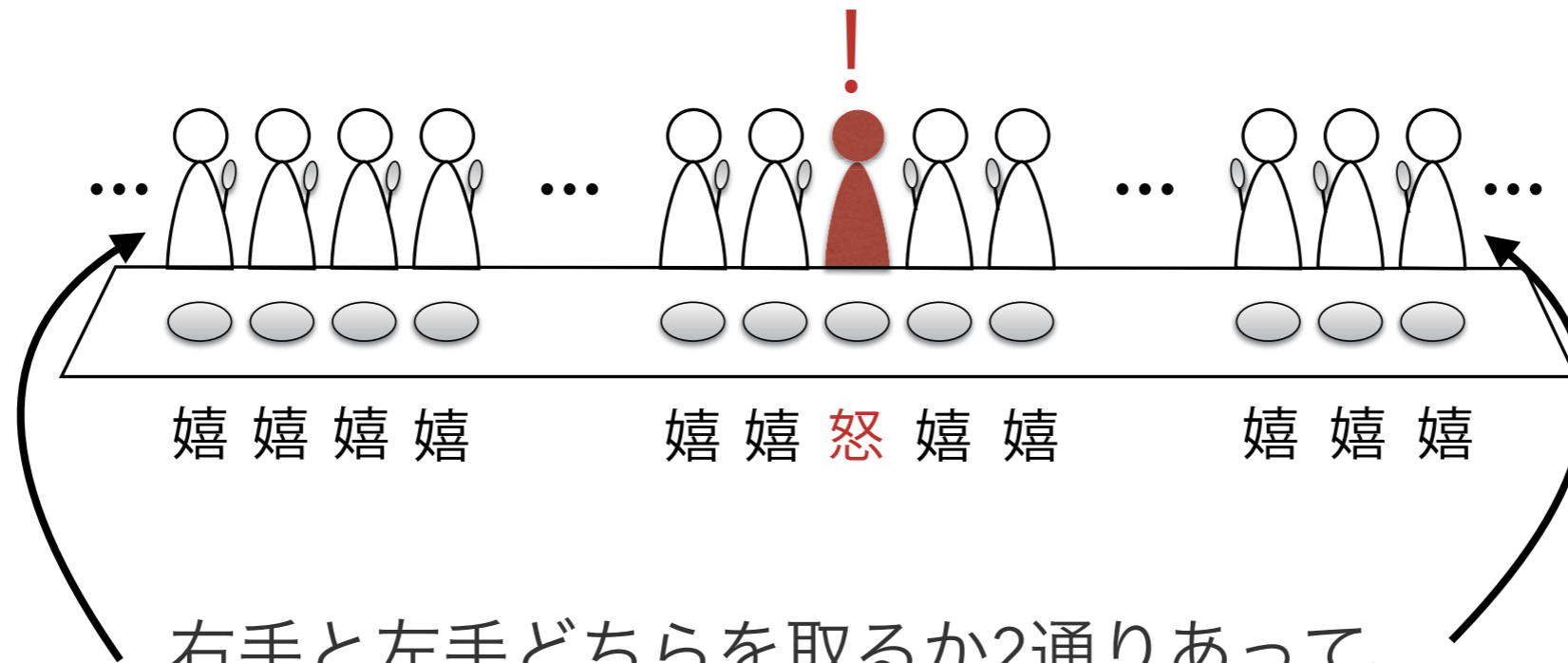
嬉嬉怒嬉嬉

嬉嬉嬉

右手と左手どちらを取るか2通りあって、
遠方の人々が別々の方を取ってしまった

→そのしわ寄せとしてソリトンが現れた

なぜこういうことが起きたのか？

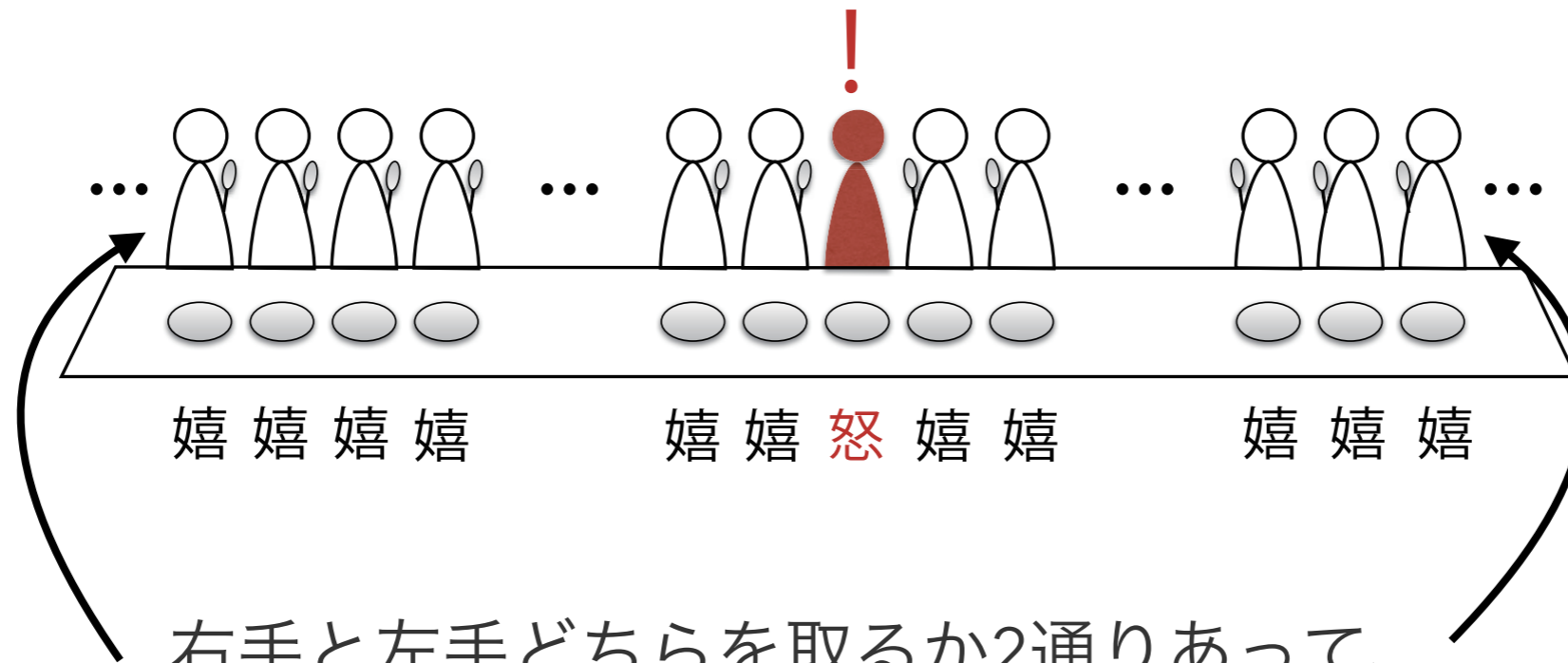


右手と左手どちらを取るか2通りあって、
遠方の人々が別々の方を取ってしまった

→そのしわ寄せとしてソリトンが現れた

一般化： エネルギー最低状態(真空)が2通りあって、端っこの方で別々の状態を取ると間にソリトンが現れる

なぜこういうことが起きたのか？



右手と左手どちらを取るか2通りあって、
遠方の人々が別々の方を取ってしまった

→そのしわ寄せとしてソリトンが現れた

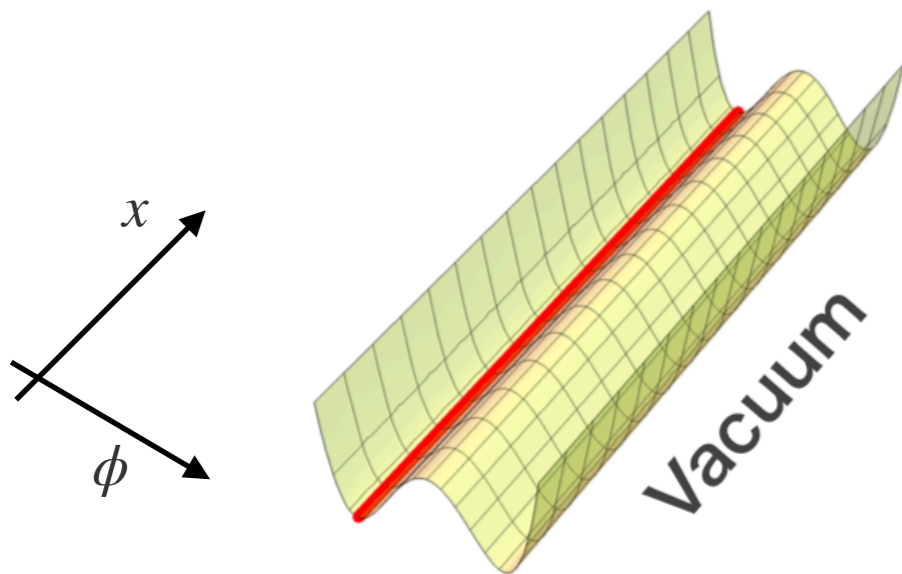
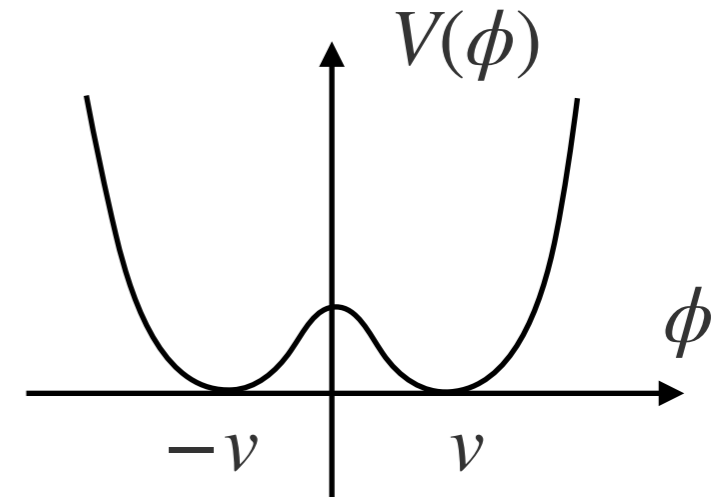
一般化： エネルギー最低状態(真空)が2通りあって、端っこの方で別々の状態を取ると間にソリトンが現れる

どう連続変形しても、ソリトンは消えない→トポロジカルに安定

対応する例: 1+1次元のキルクソリトン

- 同じことを数式でやりましょう

Lagrangian: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2$
(1+1 D) ポテンシャル項 $V(\phi)$



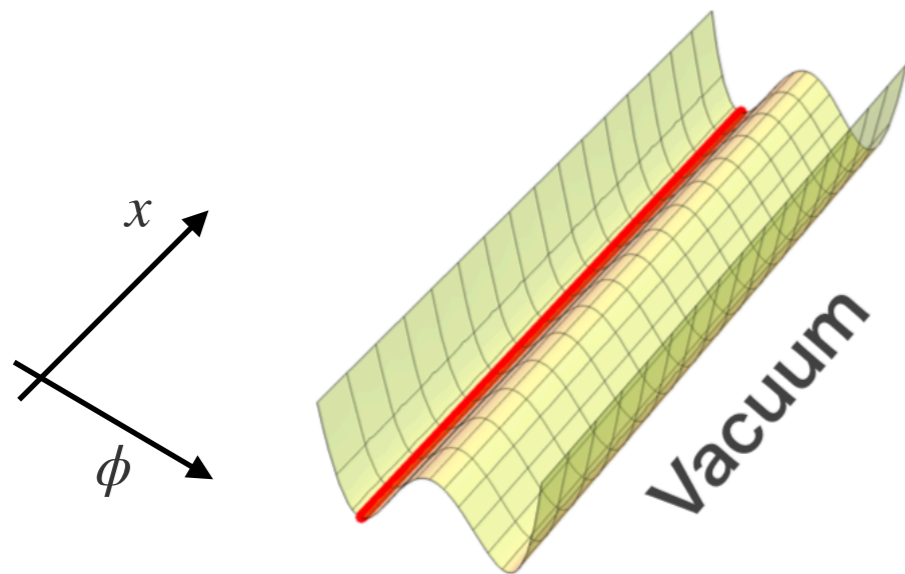
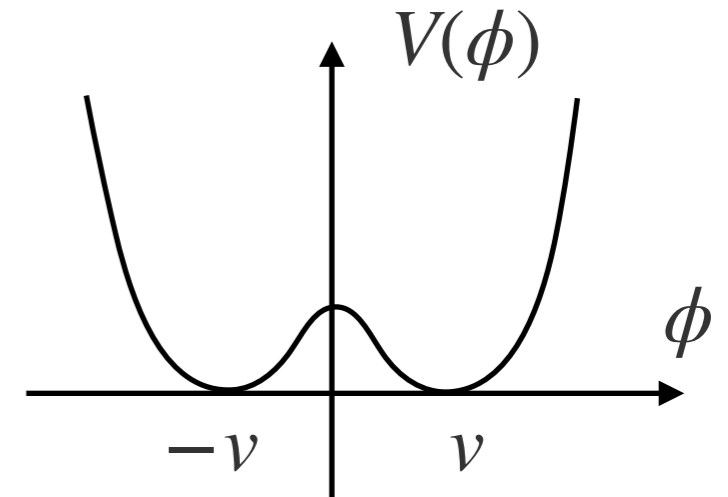
全体で左の真空を取った場合

対応する例: 1+1次元のキルクソリトン

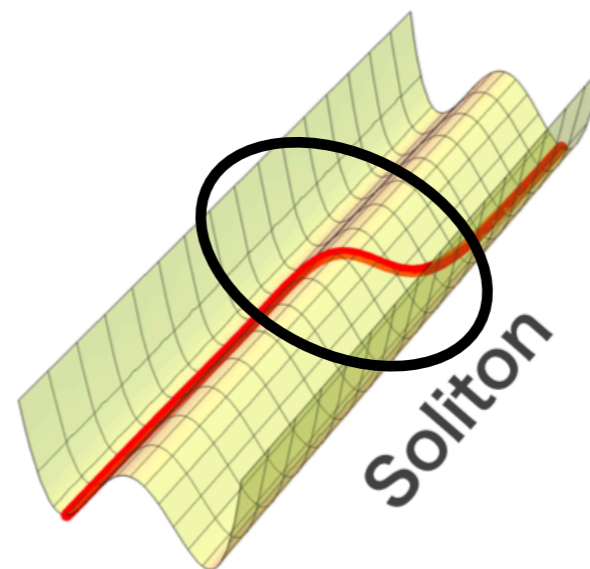
- 同じことを数式でやりましょう

Lagrangian: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2$
(1+1 D)

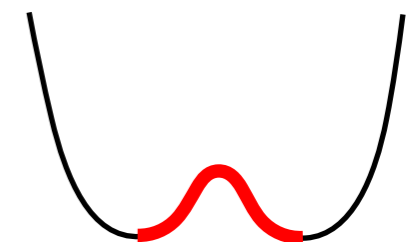
ポテンシャル項 $V(\phi)$



全体で左の真空を取った場合



端で別々の真空を選んでしまった
→ソリトン!

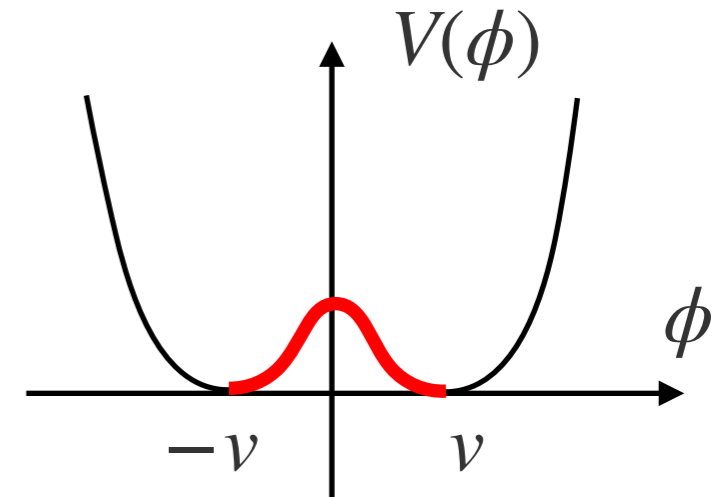


対応する例: 1+1次元のキルクソリトン

- 同じことを数式でやりましょう

Lagrangian: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2$
(1+1 D)

ポテンシャル項 $V(\phi)$



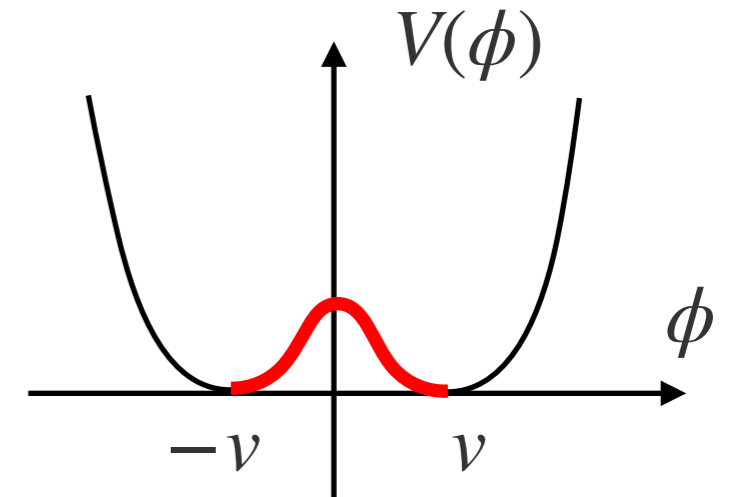
- 時間依存していない場合の運動方程式:

$$\partial_x^2\phi(x) = \lambda(\phi^2 - v^2)\phi(x)$$

対応する例: 1+1次元のキルクソリトン

- 同じことを数式でやりましょう

Lagrangian: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2$
(1+1 D) ポテンシャル項 $V(\phi)$

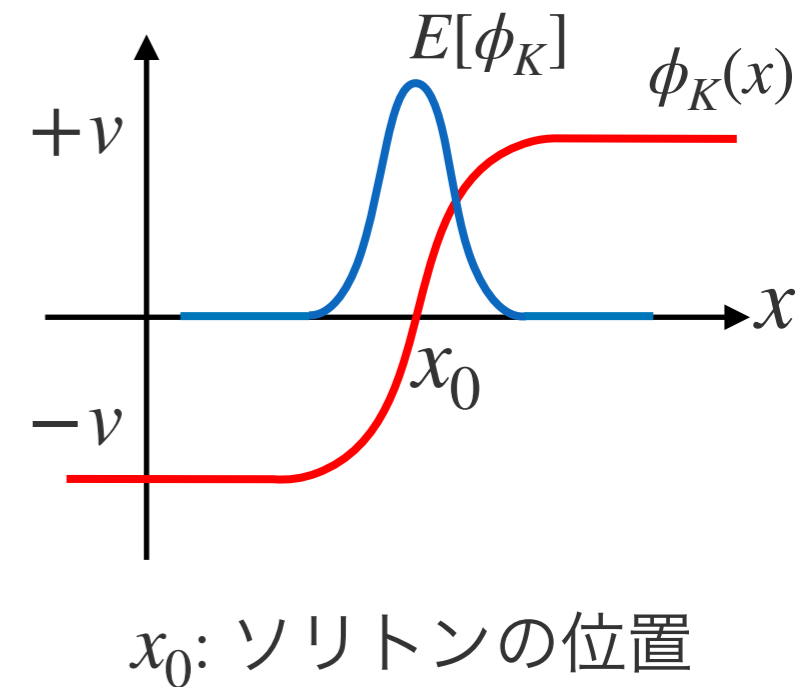


- 時間依存していない場合の運動方程式:

$$\partial_x^2\phi(x) = \lambda(\phi^2 - v^2)\phi(x)$$

- 端で別々の真空を選んだというのを反映するため、
境界条件 $\phi|_{x=\pm\infty} = \pm v$ のもとで解くと

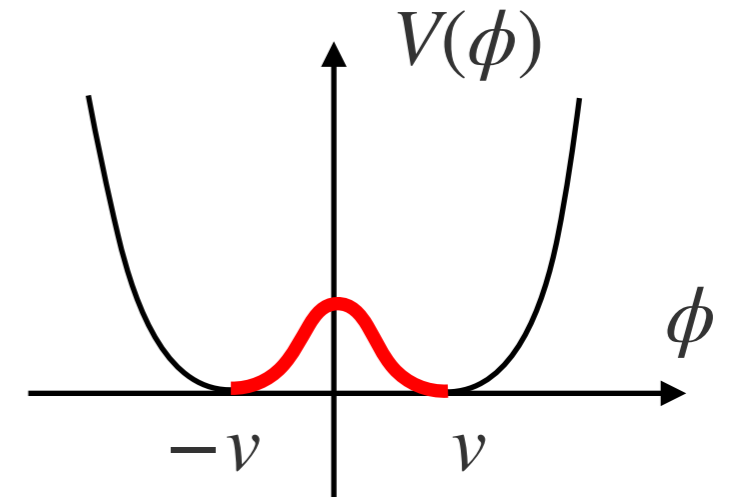
$$\phi_K(x) = v \tanh \left[\sqrt{\frac{\lambda}{2}} v(x - x_0) \right]$$



対応する例: 1+1次元のキルクソリトン

- 同じことを数式でやりましょう

Lagrangian: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2$
(1+1 D) ポテンシャル項 $V(\phi)$

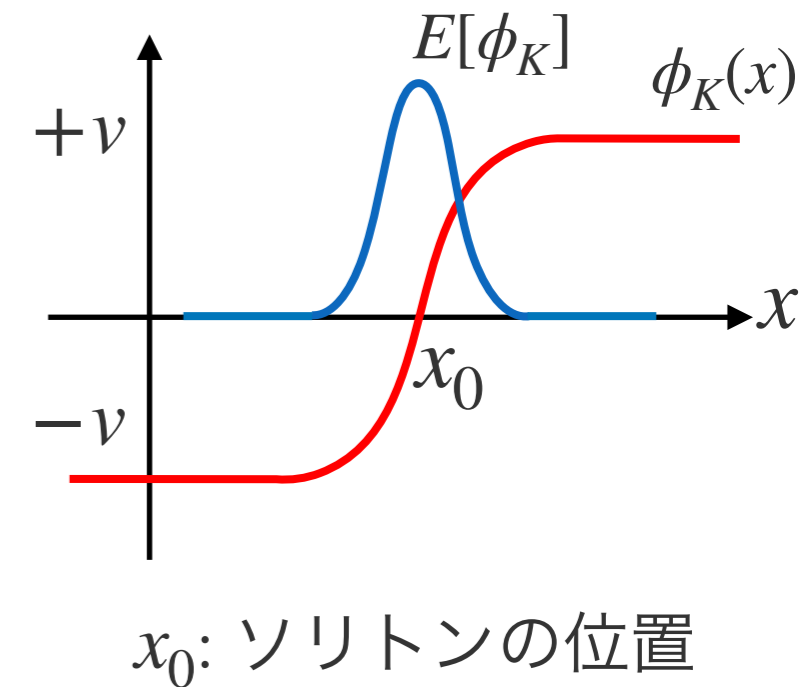


- 時間依存していない場合の運動方程式:

$$\partial_x^2\phi(x) = \lambda(\phi^2 - v^2)\phi(x)$$

- 端で別々の真空を選んだというのを反映するため、
境界条件 $\phi|_{x=\pm\infty} = \pm v$ のもとで解くと

$$\phi_K(x) = v \tanh \left[\sqrt{\frac{\lambda}{2}} v (x - x_0) \right]$$



エネルギーの励起=ソリトンが現れた!

トポロジカルソリトンの例2

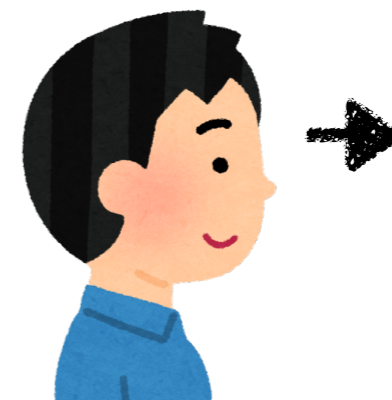
- 人がいっぱいいるエレベータの中って、なんとなく上を向いちゃいますよね
- 真上を向いてるとすると、それぞれの人には回転対称性を持つ
- 首が疲れると、視線を下ろしたくなる
→ 回転対称性が自発的に破れる



回転対称



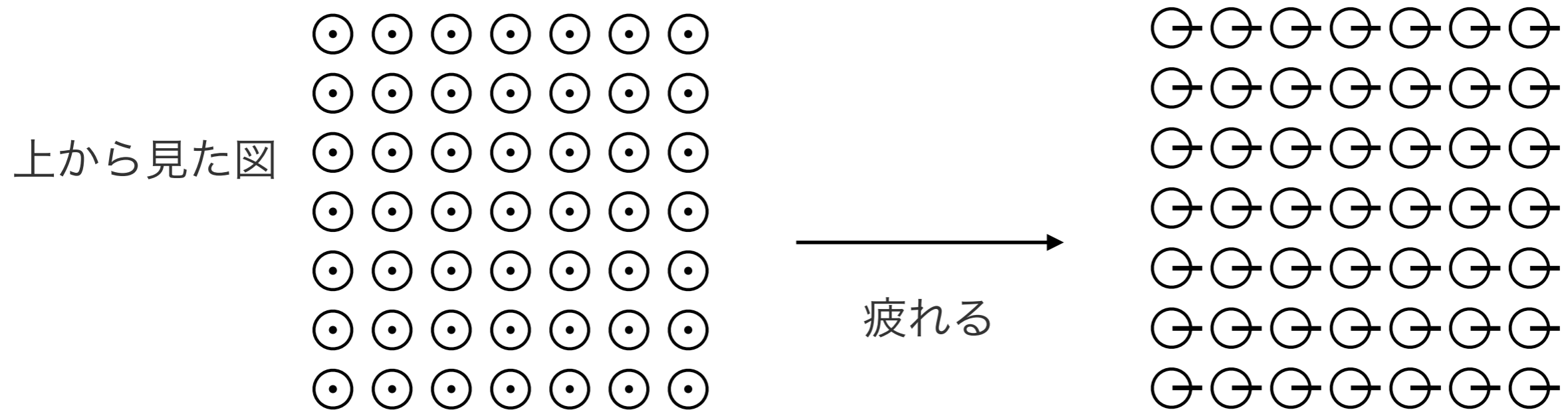
疲れる



エネルギーが低い状態

トポロジカルソリトンの例2

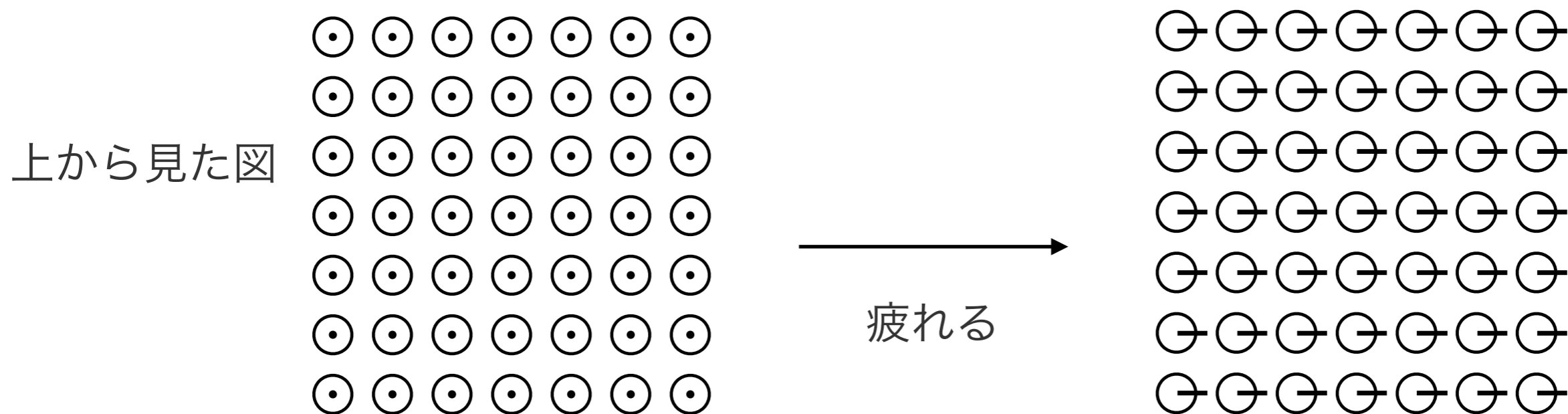
- この人たちがエレベーターにいっぱいいたとしましょう



- みんな右を向いてて、誰とも見つめ合わないので平和

トポロジカルソリトンの例2

- この人たちがエレベーターにいっぱいいたとしましょう



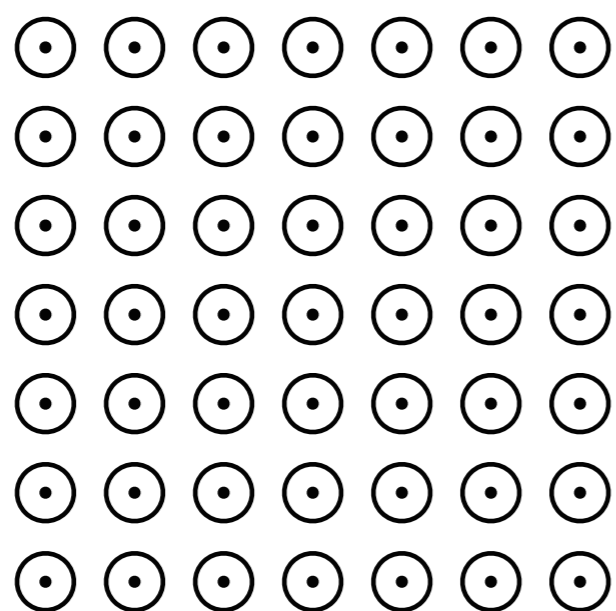
- みんな右を向いてて、誰とも見つめ合わないので平和
- 全体が0から 2π のどの方向を向いてても同じ

真空は角度 $\theta \in [0, 2\pi)$ の自由度を持つ

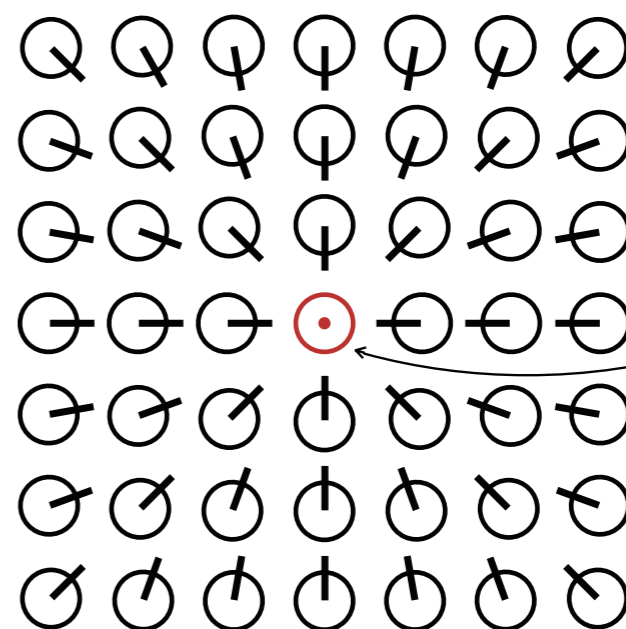
→ 真空は円周(S^1)をなす

トポロジカルソリトンの例2

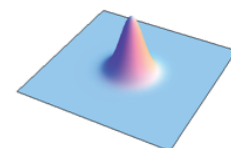
- うっかりこういうこともあるかもしれない



疲れる



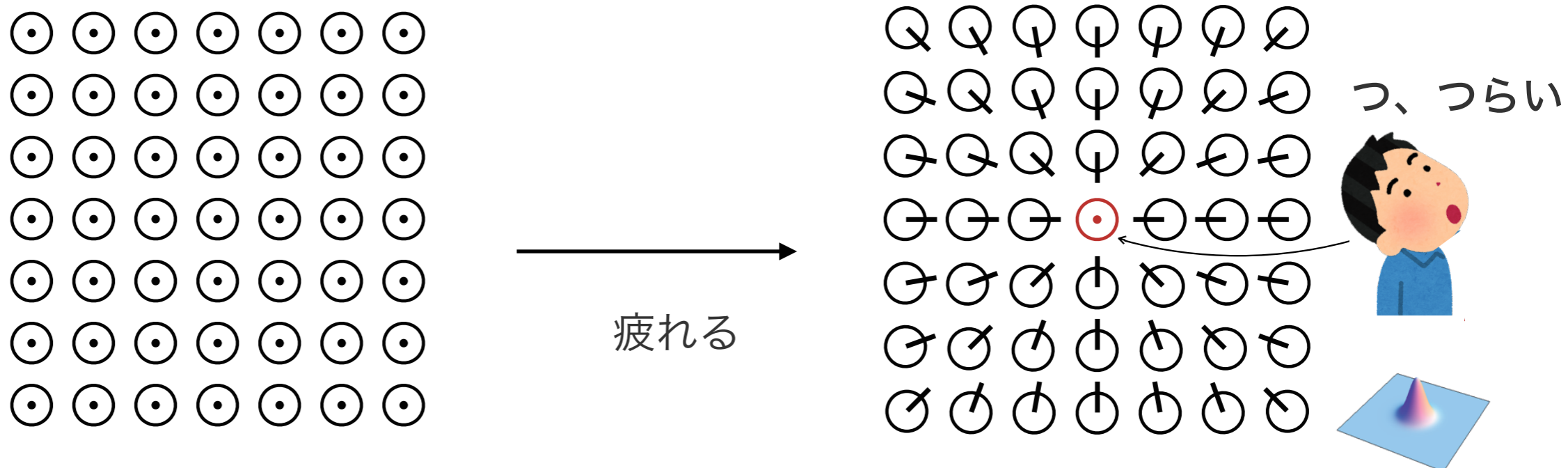
つ、つらい



- 誰とも見つめ合いたくないので、真ん中の人が見線を下ろせなくなっ
てしまった！

トポロジカルソリトンの例2

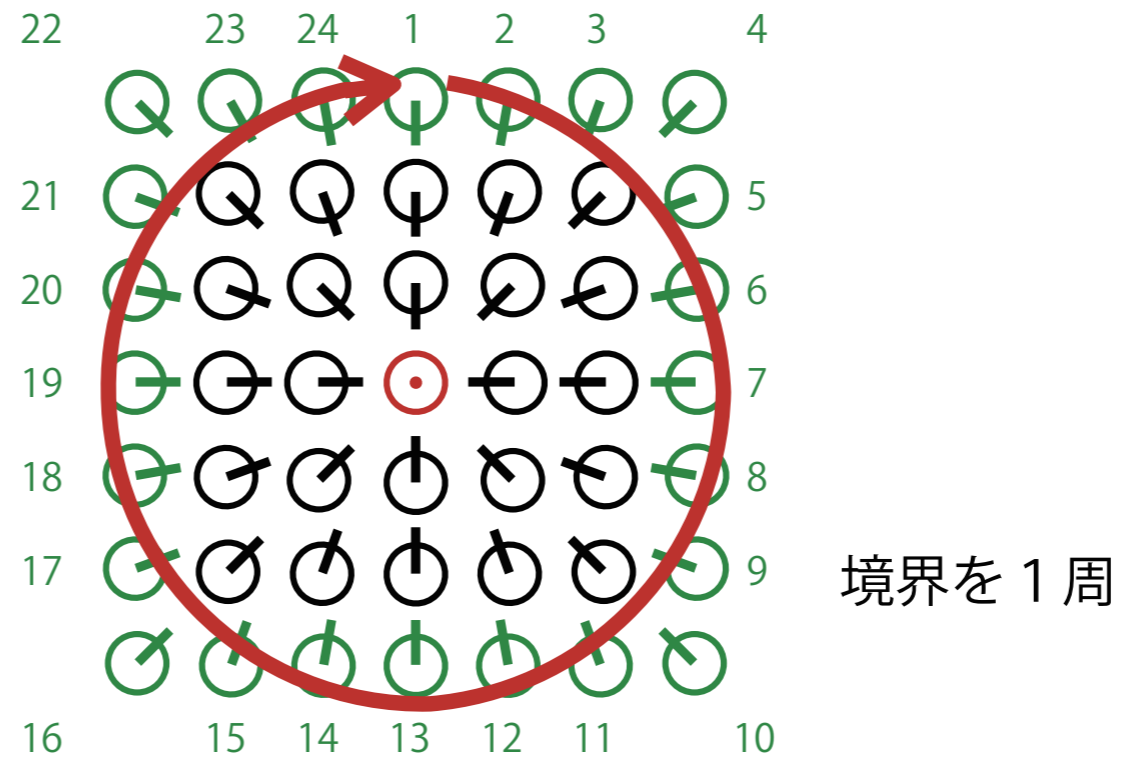
- うっかりこういうこともあるかもしれない



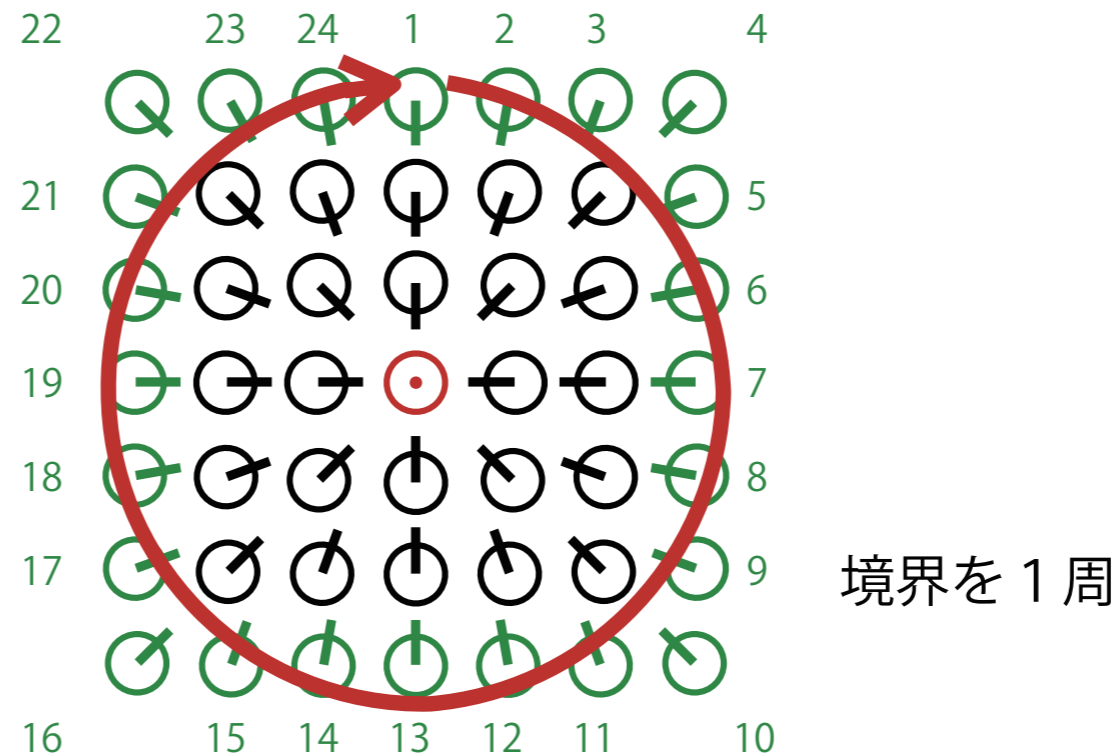
- 誰とも見つめ合いたくないので、真ん中の人が視線を下ろせなくなっ
てしまった！

真ん中はエネルギーが高い→ソリトン！

なぜこういうことが起きたのか？



なぜこういうことが起きたのか？



真空に円周 S^1 の自由度があって、境界で一周してると中心にソリトンが現れる

対応する例: 2+1次元のvortex

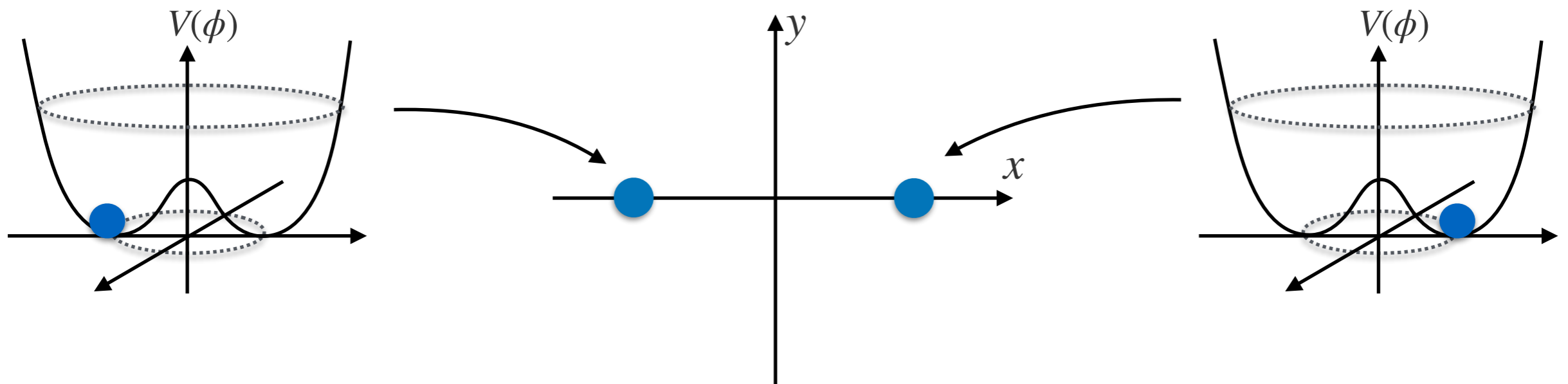
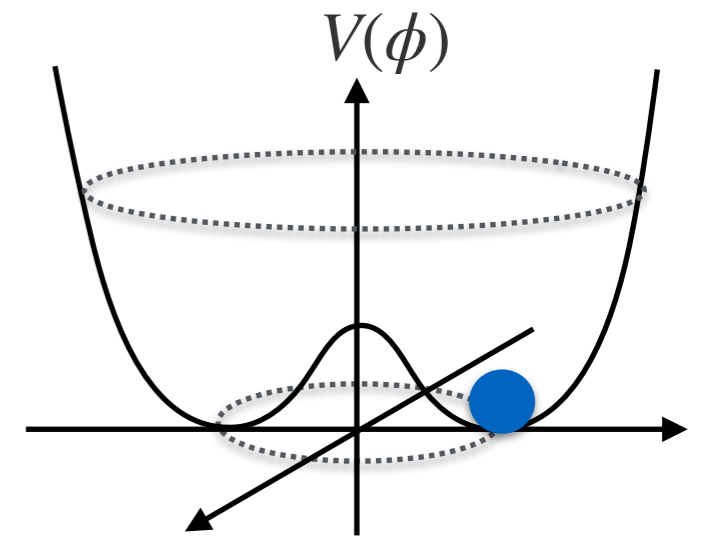
- Abelian-Higgs model in 2+1D

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\mu}\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4$$

- ϕ が真空を選ぶ: $\langle\phi\rangle = ve^{i\theta_0}$

→ $U(1)$ 対称性が自発的に破れる

- それぞれの場所で違う真空を選んだとする

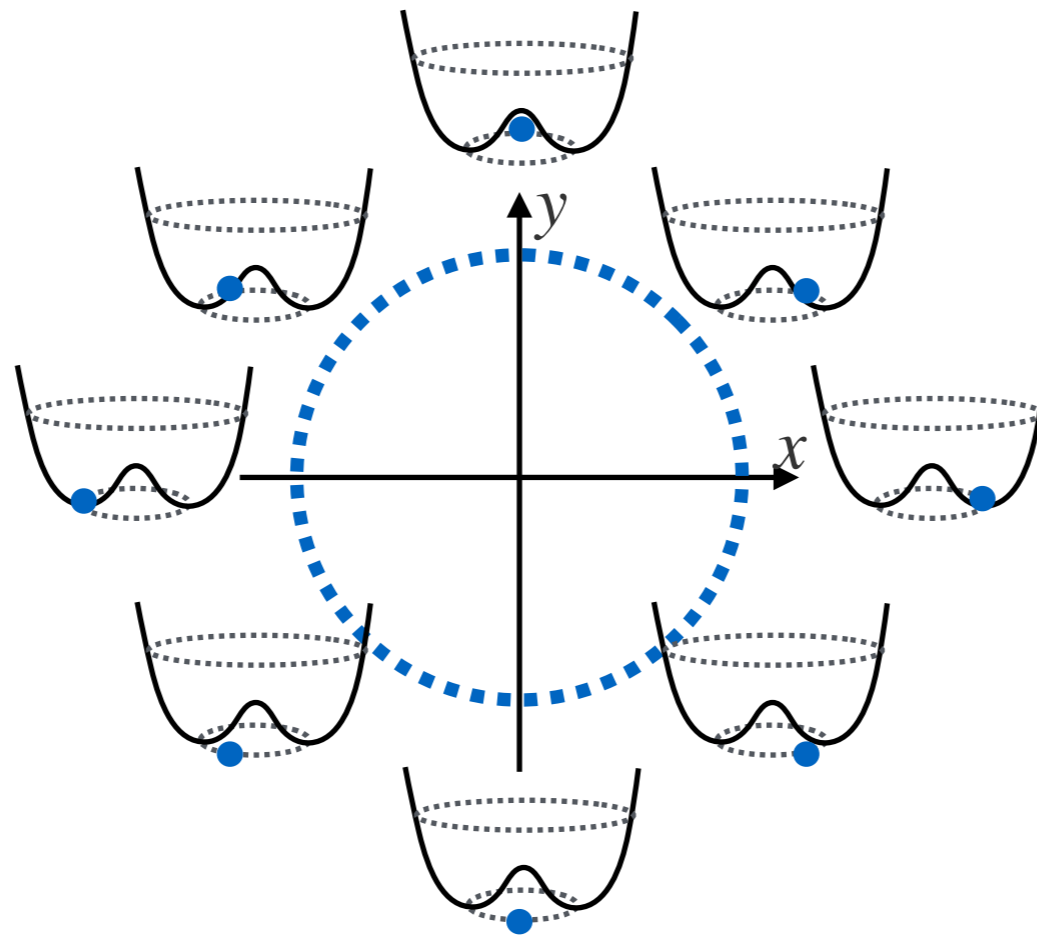


対応する例: 2+1次元のvortex

- Abelian-Higgs model in 2+1D

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\mu}\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4$$

- 特に、遠方で ϕ の位相が一周してるとする

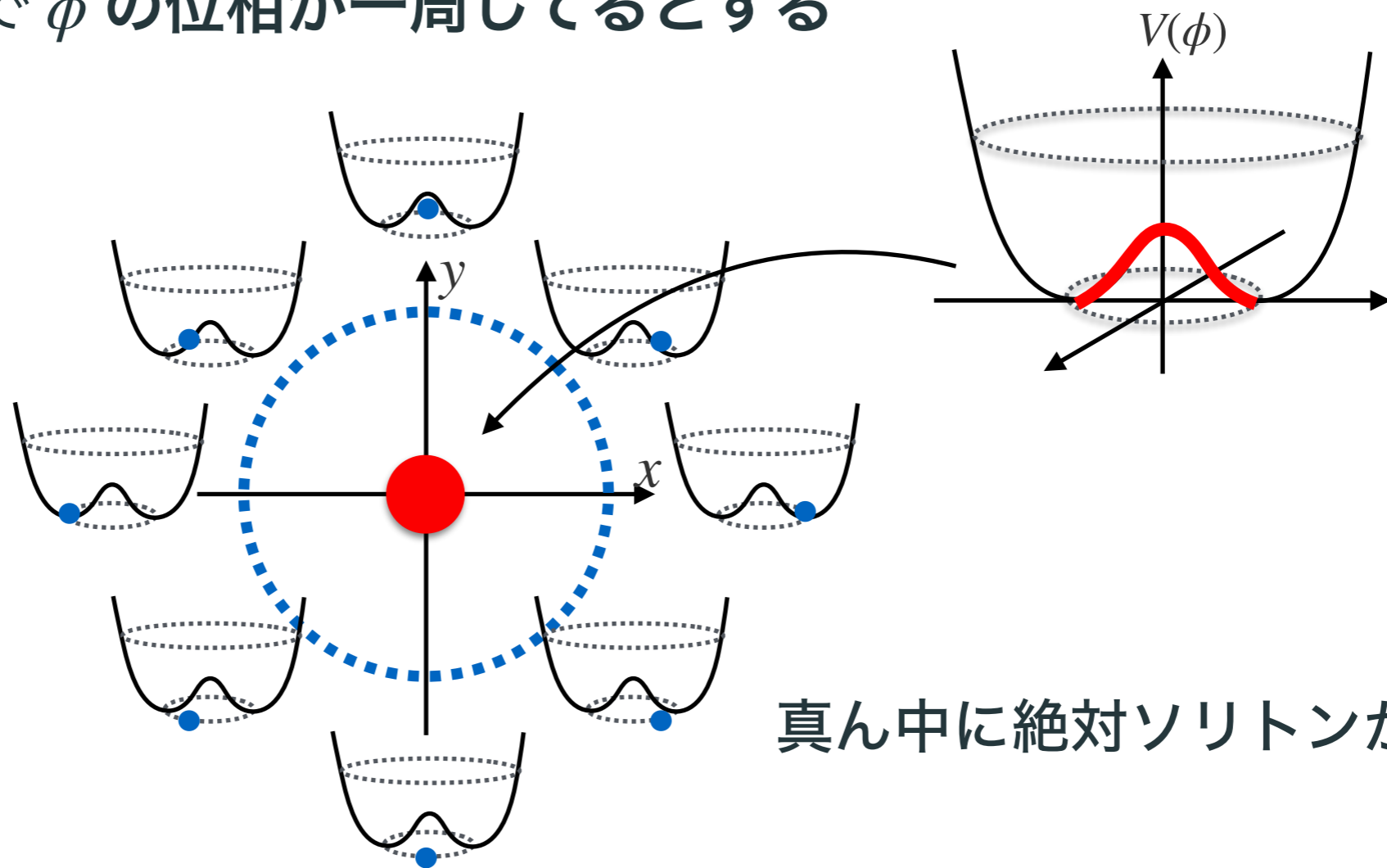


対応する例: 2+1次元のvortex

- Abelian-Higgs model in 2+1D

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\mu}\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4$$

- 特に、遠方で ϕ の位相が一周してるとする



真ん中に絶対ソリトンが現れる！

対応する例: 2+1次元のvortex

[Abrikosov '58]

[Nielsen-Olesen '73]

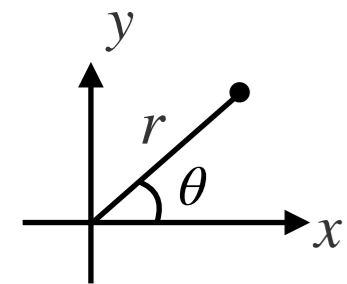
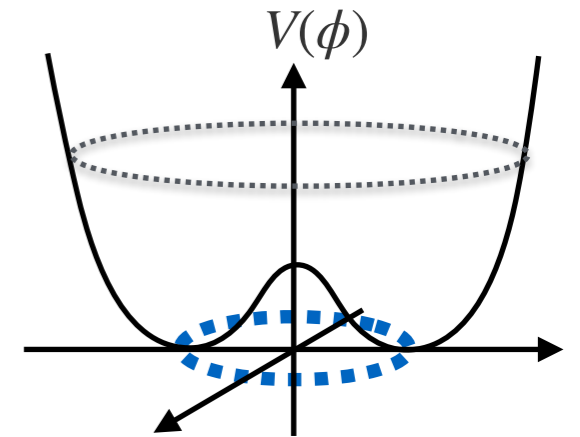
- Abelian-Higgs model in 2+1D

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\mu}\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4$$

- 以下の場の配位を仮定:

$$\phi(x) = v f(r) e^{i\theta} \quad A_{\theta}(x) = a(r) \quad \text{ただし } f(\infty) = a(\infty) = 1$$

ϕ の位相が一周巻き付いている



対応する例: 2+1次元のvortex

[Abrikosov '58]

[Nielsen-Olesen '73]

- Abelian-Higgs model in 2+1D

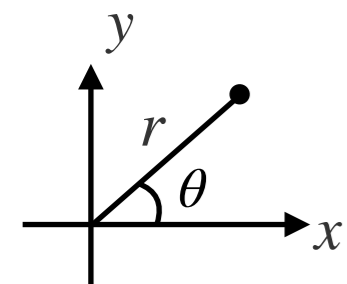
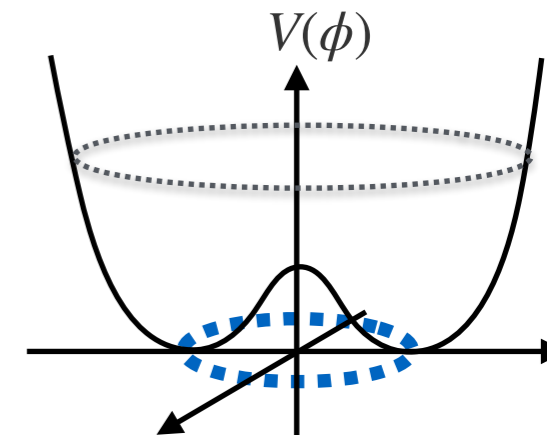
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\mu}\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4$$

- 以下の場の配位を仮定：

$$\phi(x) = v f(r) e^{i\theta} \quad A_{\theta}(x) = a(r)$$

ただし $f(\infty) = a(\infty) = 1$

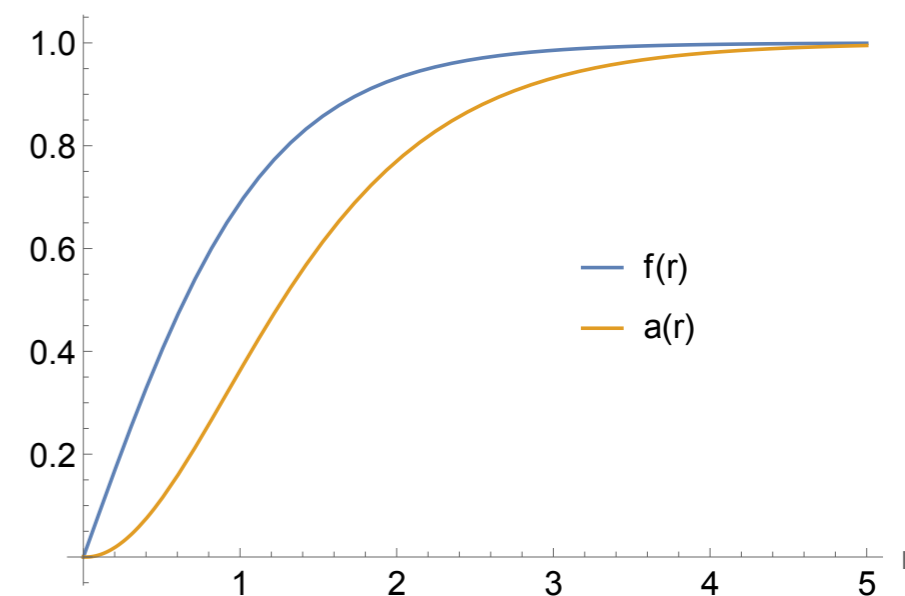
ϕ の位相が一周巻き付いている



- 運動方程式：

$$f'' + \frac{1}{r}f' - \frac{(1-a)^2}{r^2}f - \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial f} = 0$$

$$a'' - \frac{1}{r}a' + 2(1-a)f^2 = 0$$



対応する例: 2+1次元のvortex

[Abrikosov '58]

[Nielsen-Olesen '73]

- Abelian-Higgs model in 2+1D

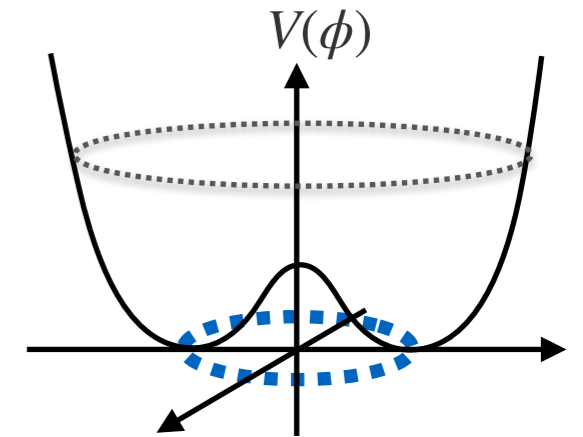
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\mu}\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4$$

- 以下の場の配位を仮定:

$$\phi(x) = v f(r) e^{i\theta} \quad A_{\theta}(x) = a(r)$$

ただし $f(\infty) = a(\infty) = 1$

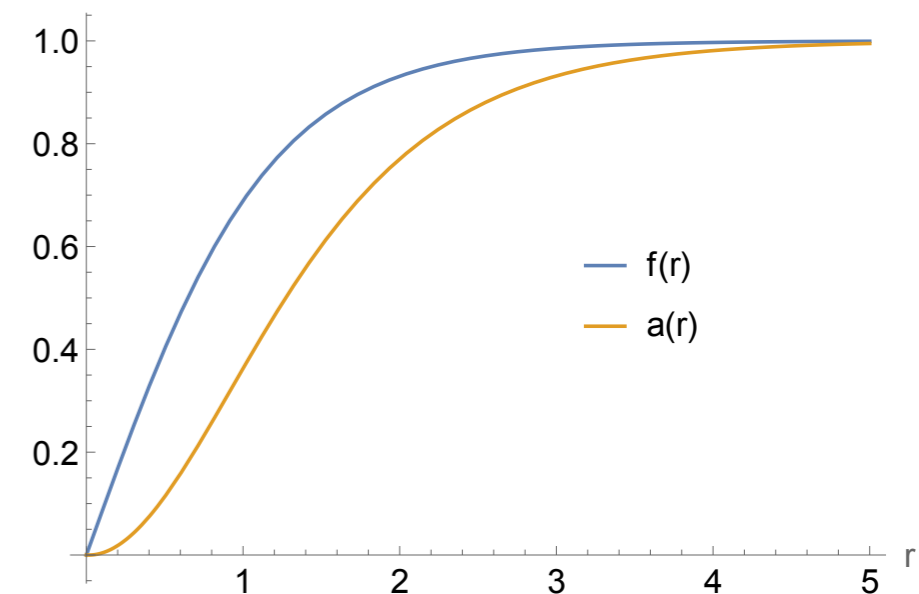
ϕ の位相が一周巻き付いている



- 運動方程式:

$$f'' + \frac{1}{r}f' - \frac{(1-a)^2}{r^2}f - \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial f} = 0$$

$$a'' - \frac{1}{r}a' + 2(1-a)f^2 = 0$$



- 確かに中心で励起してる解が存在! → vortexと呼ぶ

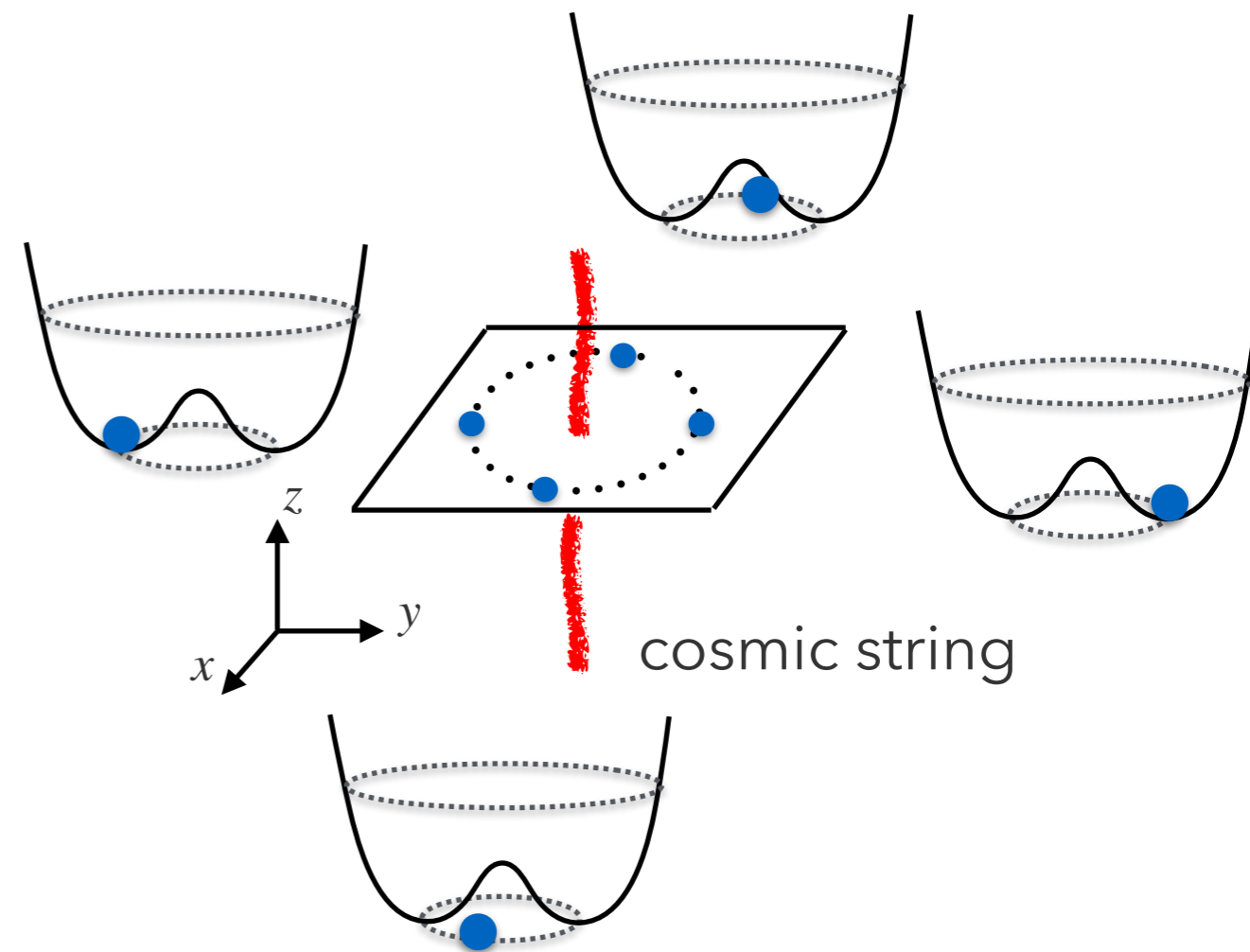
3+1次元にしましょう(cosmic string)

[Abrikosov '58]

[Nielsen-Olesen '73]

- Abelian-Higgs model in 3+1D

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\mu}\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4$$



3+1次元にしましょう(cosmic string)

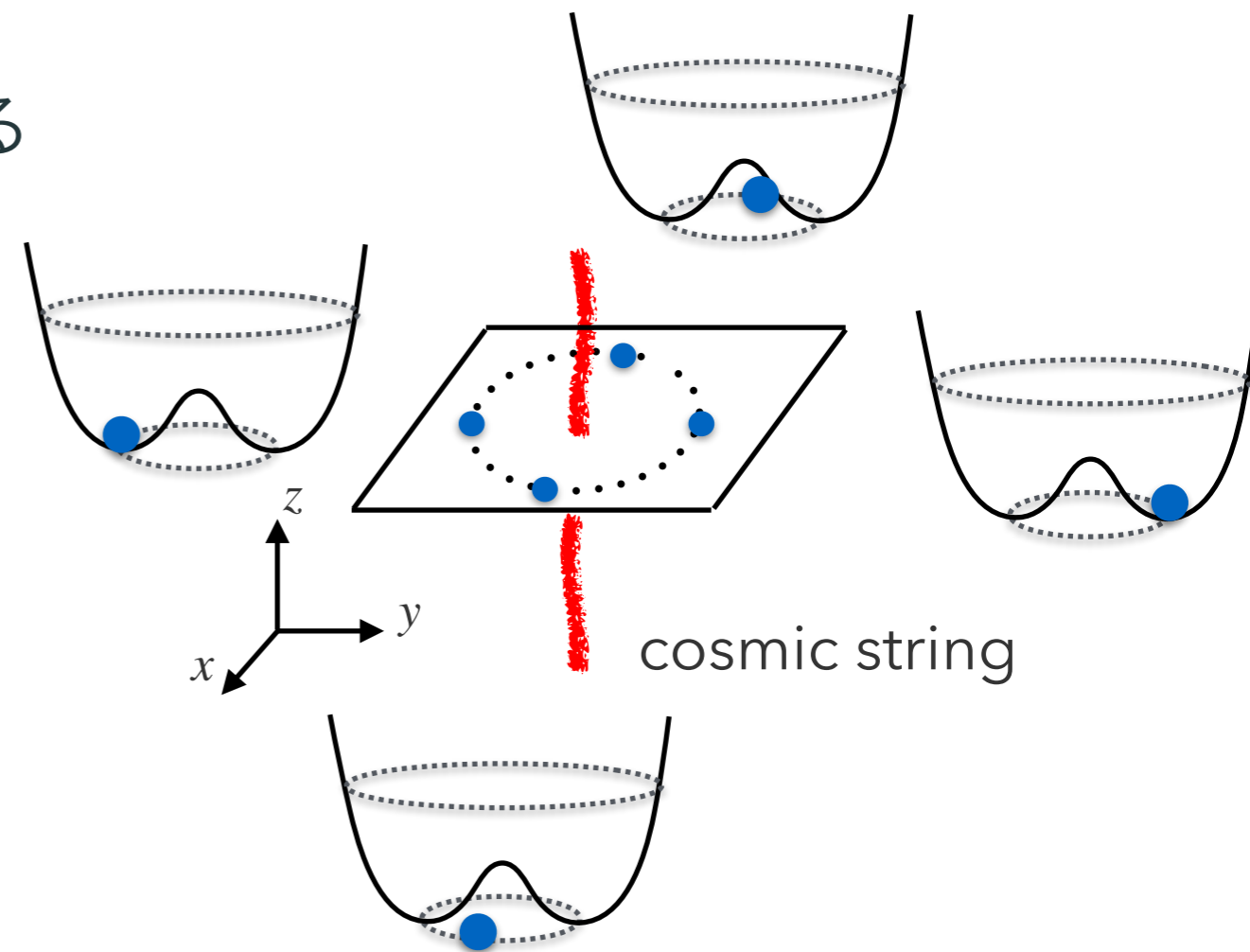
[Abrikosov '58]

[Nielsen-Olesen '73]

- Abelian-Higgs model in 3+1D

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\mu}\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4$$

- さっきの配位を z 軸方向に拡張する



3+1次元にしましょう(cosmic string)

[Abrikosov '58]

[Nielsen-Olesen '73]

- Abelian-Higgs model in 3+1D

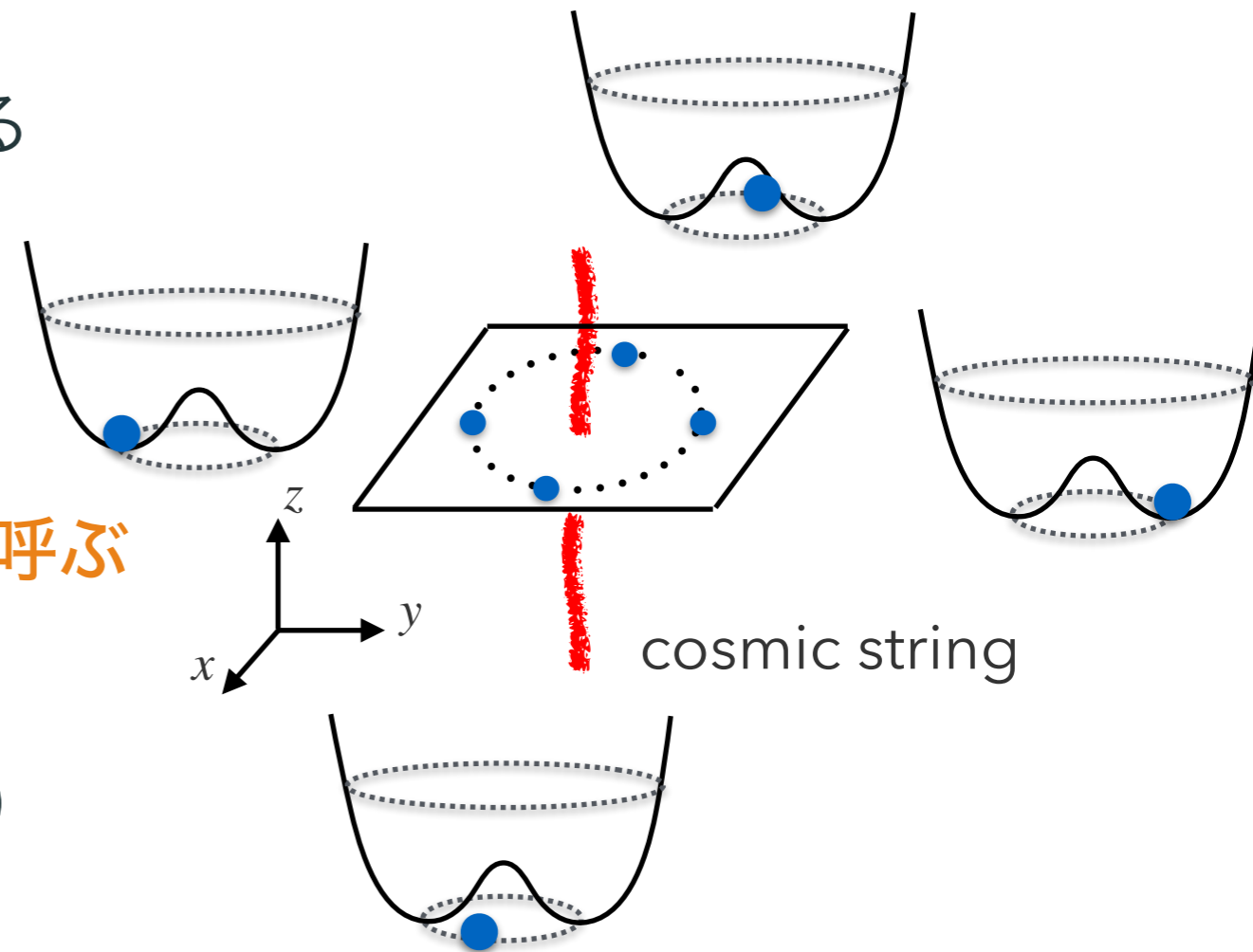
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + |D_{\mu}\phi|^2 + m^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4$$

- さっきの配位を z 軸方向に拡張する

z 方向に伸びたひも状の励起!

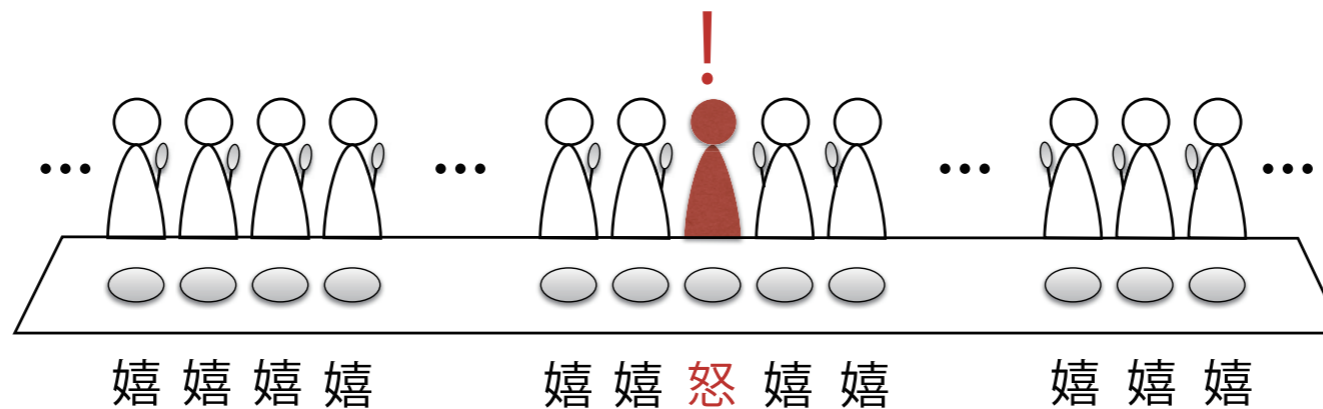
→ **cosmic string (or vortex string) と呼ぶ**

(ひも理論のひもとは違うものです)

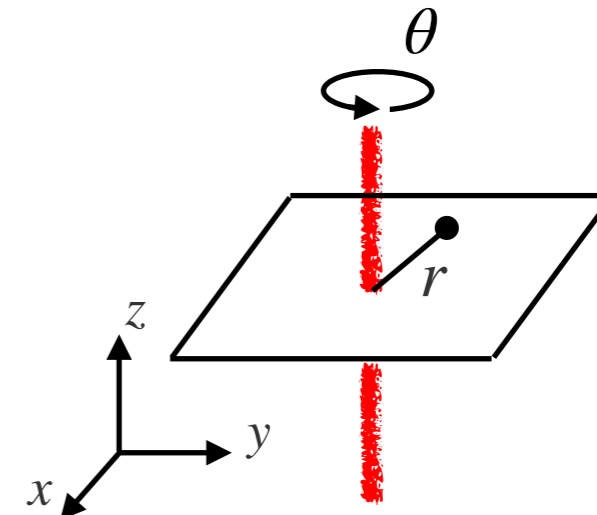
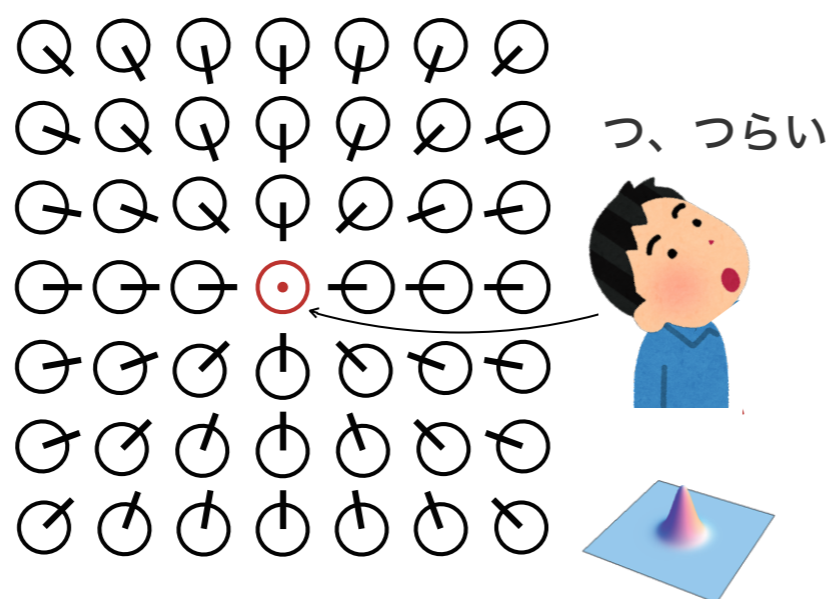


ここまでのまとめ

- トポロジカルソリトン：トポロジータ的な性質によって安定在が保証されるソリトン
- 1+1次元での例：キルク ← 離散対称性の自発的破れ



- 2+1、3+1次元での例：vortex, **cosmic string** ← $U(1)$ 対称性の自発的破れ



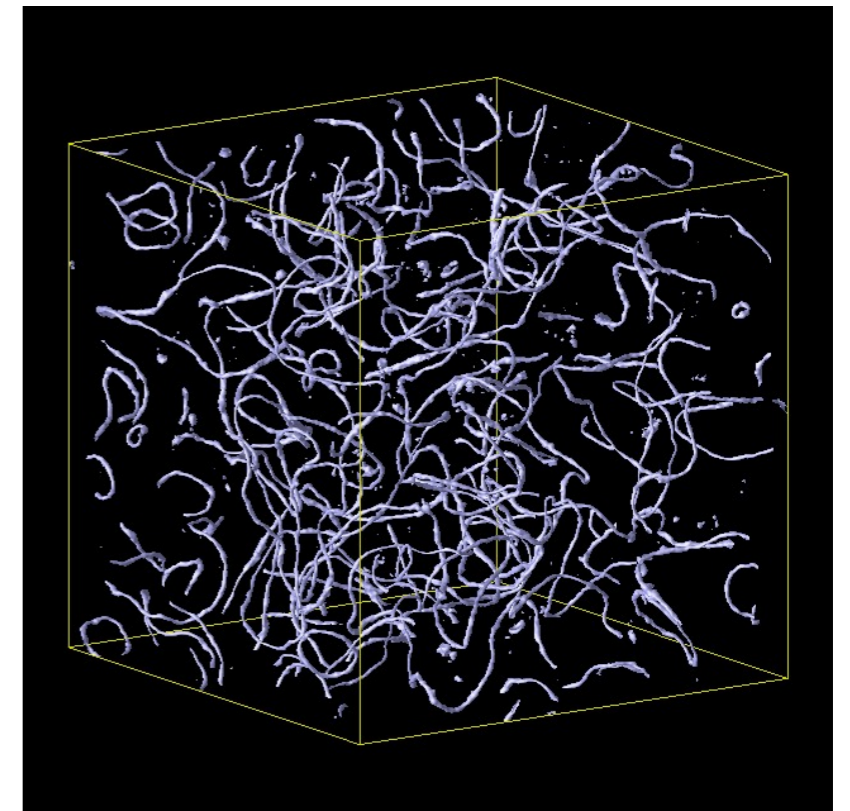
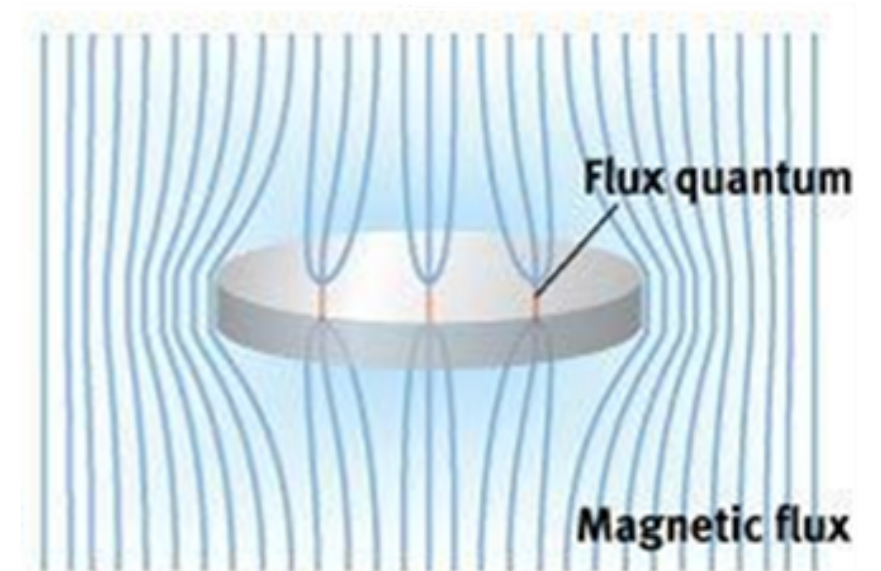
目次

- 古典的場の理論 (学部生向け)
- トポロジカルソリトン (大学院生向け)
- Cosmic string と knot (自分の研究の話)
- まとめ

Cosmic string と knot

実はcosmic stringはアツい

- 超伝導物質
 - 入り込んだ磁場はcosmic stringとして振る舞う
 - 超伝導体の相図と関係
- 我々の宇宙空間にもあるかも!
 - CMB (宇宙マイクロ波背景放射)
 - 重力波
 - 重力レンズ
 - 発見されれば新物理の強い証拠、しかし未だ見つからず



我々のやったこと:

2種類のcosmic stringが絡まった時にできる新しい

ソリトンを発見しました

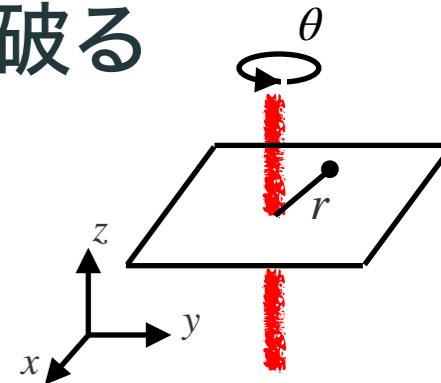
→初期宇宙に存在したかもしれない！

Knot soliton

模型: 大域的 $U(1)$ 対称性とゲージ $U(1)$ 対称性を自発的に破る

→ 2種類のcosmic stringができる

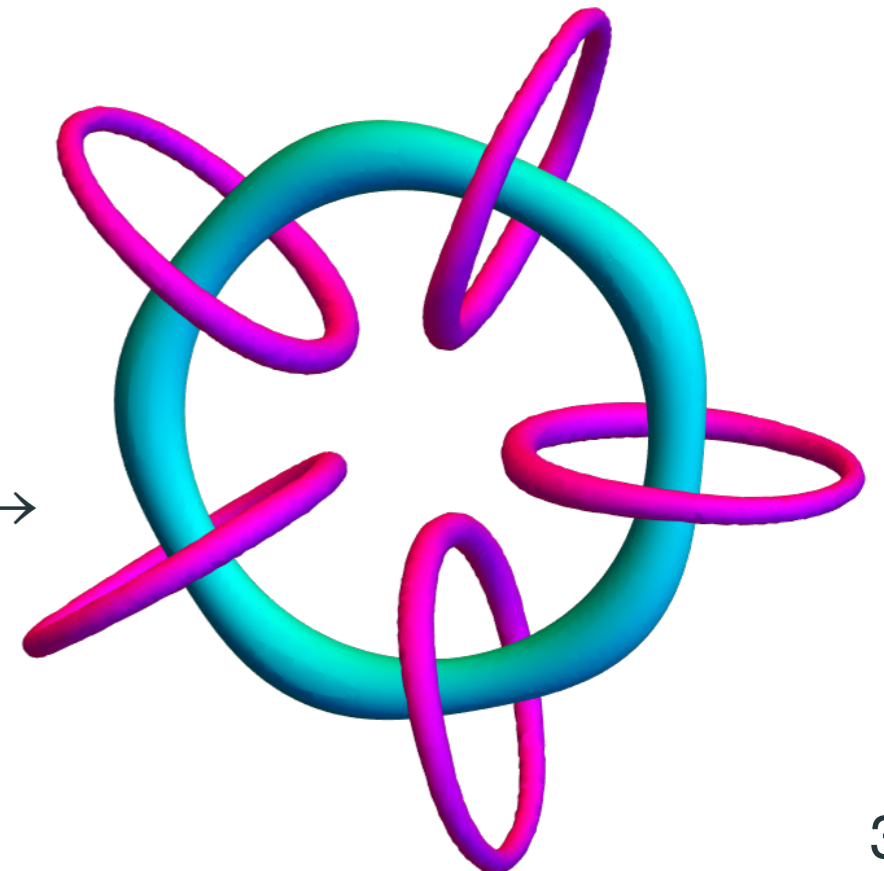
→ それらが組み合わさることで新しいソリトンができる!



knotted cosmic strings

= **Knot soliton!**

こういうのが昔の宇宙にいっぱいいたかも→



Local vs Global strings

- ゲージ $U(1)$ 対称性が破れる \rightarrow **local string**

\rightarrow string内に磁場が存在

$$\int d^2x B = 2\pi/g$$

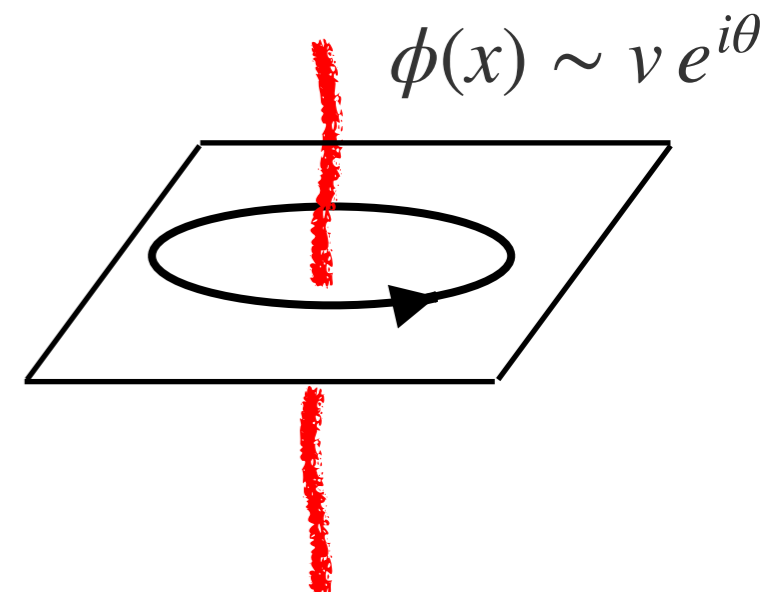
(eg. 超伝導体)

ϕ の位相は物理的ではない(gauge redundant)

- 大域的 $U(1)$ 対称性が破れる \rightarrow **global string**

\rightarrow 磁場無し

ϕ の位相は物理的な南部-Goldstonの自由度



Setup

Lagrangian:

$$\mathcal{L} = |D_\mu \phi_1|^2 + |\partial_\mu \phi_2|^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - V(\phi_1, \phi_2)$$

$$V(\phi_1, \phi_2) = \lambda \left(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 - \mu^2 \right)^2 - \kappa |\phi_1|^2 |\phi_2|^2 + \chi |\phi_2|^4$$

- 対称性:

$$U(1)_{gauge} : \phi_1 \rightarrow e^{i\theta_1} \phi_1 \quad U(1)_{global} : \phi_2 \rightarrow e^{i\theta_2} \phi_2$$

$$D_\mu \phi_1 \equiv (\partial_\mu - igA_\mu) \phi_1$$

- 両方とも自発的に破れる:

$$\langle \phi_1 \rangle = v_1, \quad \langle \phi_2 \rangle = v_2$$

→ local string (ϕ_1, A_μ) と global string (ϕ_2) の共存

Chern-Simons coupling

Lagrangian:

Chern-Simons coupling

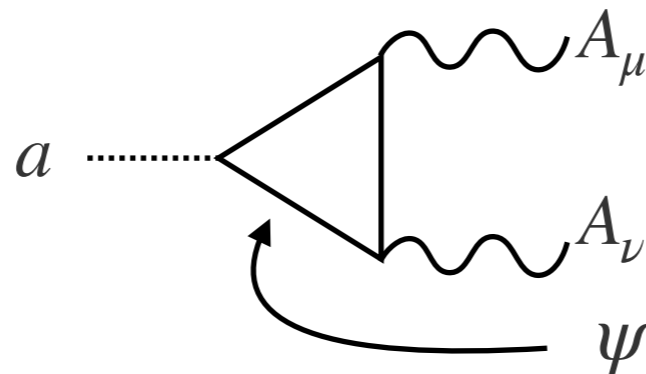
$$\mathcal{L} = |D_\mu \phi_1|^2 + |\partial_\mu \phi_2|^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - V(\phi_1, \phi_2) + \frac{c}{16\pi^2} a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$$

$$V(\phi_1, \phi_2) = \lambda \left(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 - \mu^2 \right)^2 - \kappa |\phi_1|^2 |\phi_2|^2 + \chi |\phi_2|^4$$

$$a \equiv -i \arg(\phi_2)$$

$$D_\mu \phi_1 = (\partial_\mu - igA_\mu) \phi_1$$

- 破れた後、アノマリーからCS couplingが出る



係数 c は模型の詳細による

ここでは自由パラメータとする

Linking configuration

- CS couplingを部分積分: $\frac{c}{16\pi^2} a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \longrightarrow -\frac{c}{16\pi^2} (\partial_i a) A_0 B^i$
 $B_i \equiv \epsilon_{ijk} \partial^j A^k$

Linking configuration

- CS couplingを部分積分: $\frac{c}{16\pi^2} a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \longrightarrow -\frac{c}{16\pi^2} (\partial_i a) A_0 B^i$

$$B_i \equiv \epsilon_{ijk} \partial^j A^k$$

→ Gauss law:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_0} = \partial_i E_i - g^2 J^0 + \frac{g^2 c}{16\pi^2} \vec{\nabla} a \cdot \vec{B} = 0$$

Linking configuration

- CS couplingを部分積分: $\frac{c}{16\pi^2} a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \longrightarrow -\frac{c}{16\pi^2} (\partial_i a) A_0 B^i$

$$B_i \equiv \epsilon_{ijk} \partial^j A^k$$

→ Gauss law:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_0} = \partial_i E_i - g^2 J^0 + \frac{g^2 c}{16\pi^2} \vec{\nabla} a \cdot \vec{B} = 0$$

"電場"

Noether charge

Linking configuration

- CS couplingを部分積分: $\frac{c}{16\pi^2} a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \longrightarrow -\frac{c}{16\pi^2} (\partial_i a) A_0 B^i$

$$B_i \equiv \epsilon_{ijk} \partial^j A^k$$

→ Gauss law:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_0} = \partial_i E_i - g^2 J^0 + \frac{g^2 c}{16\pi^2} \vec{\nabla} a \cdot \vec{B} = 0$$

Noether charge

"電場"

$\vec{\nabla} a \cdot \vec{B}$ は"電場"を生み出す

Linking configuration

- CS couplingを部分積分: $\frac{c}{16\pi^2} a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \longrightarrow -\frac{c}{16\pi^2} (\partial_i a) A_0 B^i$

$$B_i \equiv \epsilon_{ijk} \partial^j A^k$$

→ Gauss law:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_0} = \partial_i E_i - g^2 J^0 + \frac{g^2 c}{16\pi^2} \vec{\nabla} a \cdot \vec{B} = 0$$

Noether charge

"電場"

$\vec{\nabla} a \cdot \vec{B}$ は"電場"を生み出す

- 数学的には $\int d^3x \vec{\nabla} a \cdot \vec{B}$ は stringの絡み目数と同じ

Linking configuration

- CS couplingを部分積分: $\frac{c}{16\pi^2} a F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \longrightarrow -\frac{c}{16\pi^2} (\partial_i a) A_0 B^i$

$$B_i \equiv \epsilon_{ijk} \partial^j A^k$$

→ Gauss law:

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_0} = \partial_i E_i - g^2 J^0 + \frac{g^2 c}{16\pi^2} \vec{\nabla} a \cdot \vec{B} = 0$$

Noether charge

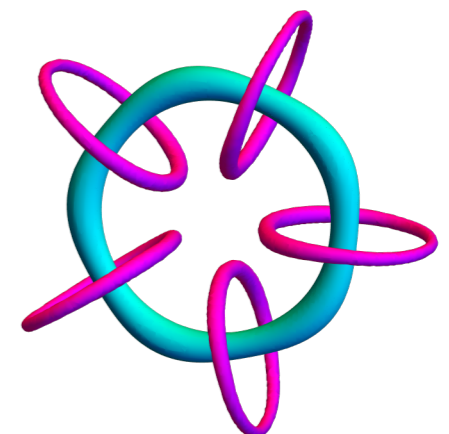
"電場"

$\vec{\nabla} a \cdot \vec{B}$ は"電場"を生み出す

- 数学的には $\int d^3x \vec{\nabla} a \cdot \vec{B}$ は stringの絡み目数と同じ

→ stringが絡んでると"電荷"を獲得する

→これが配位を安定化させる！



BSM model

- 標準模型を拡張： $U(1)_{gauge} = U(1)_{B-L} \& U(1)_{global} = U(1)_{PQ}$

- 右巻きニュートリノの存在が要求される： $y_R \phi_1^* \bar{\nu}_R \nu_R^c$

→ $U(1)_{B-L}$ の破れでマヨラナ質量を獲得 → type-I シーソー機構

[Minkowski '77] [Yanagida '79] [Gell-Mann+ '79] [Mohapatra-Senjanovic+ '80]

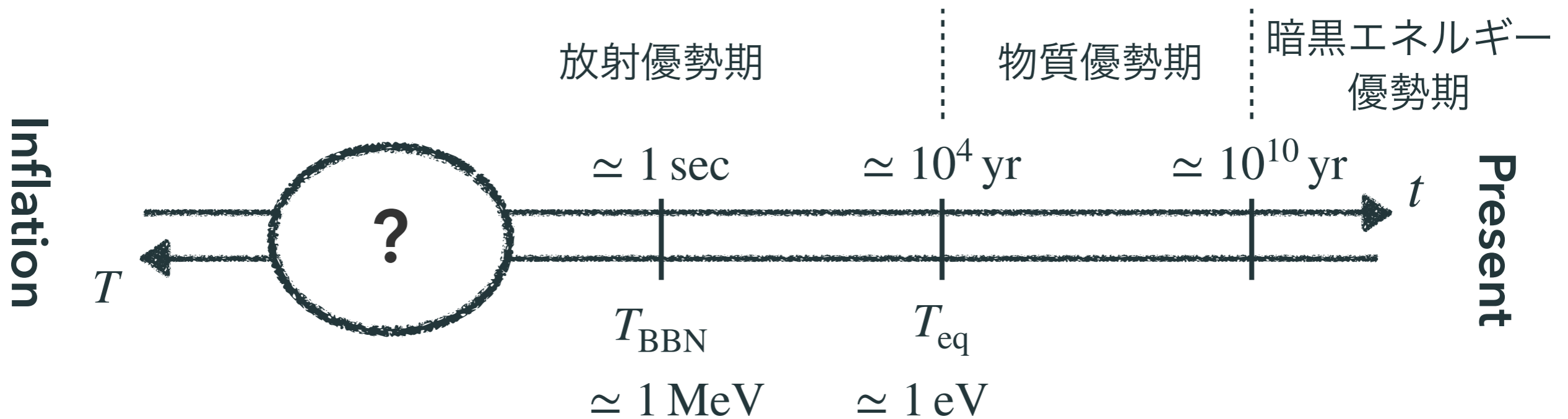
- $U(1)_{PQ}$ の破れから QCD axion が出る


[Peccei-Quinn '77] [Weinberg '78] [Wilczek '78]

→ 強いCP問題と暗黒物質を同時解決

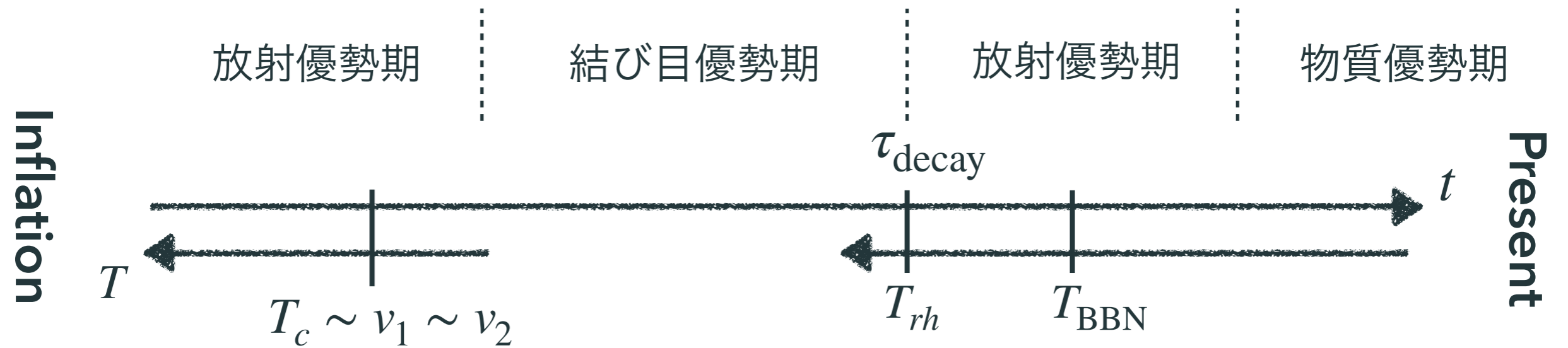
⇒ 破れのスケール $\sim 10^9-12$ GeV を示唆

標準宇宙論

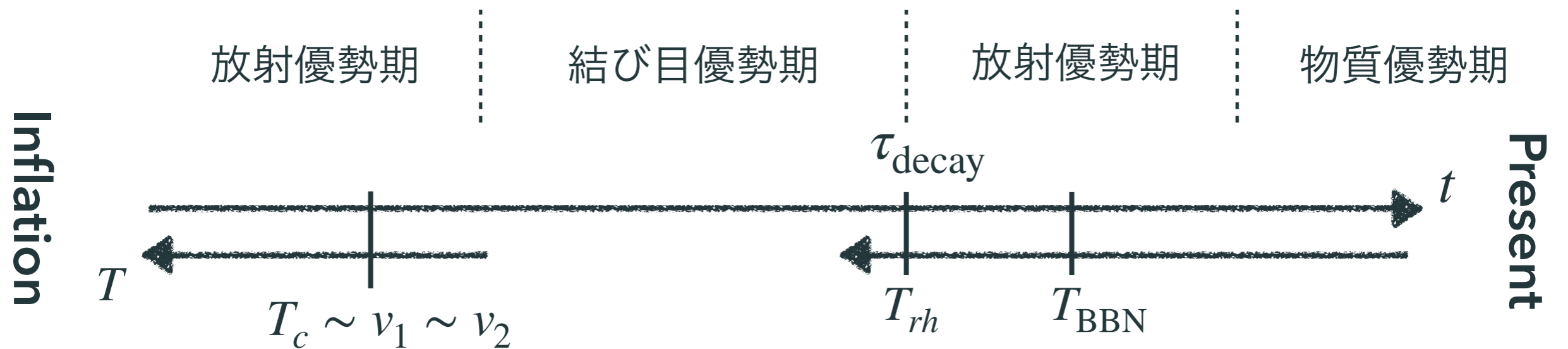


- 宇宙は熱い火の玉宇宙から始まった (inflation)
- 我々はビッグバン元素合成(BBN)より後のことは知ってるが、前のことは知らない
- 我々のシナリオ:  = 結び目優勢期

Fate of knot soliton

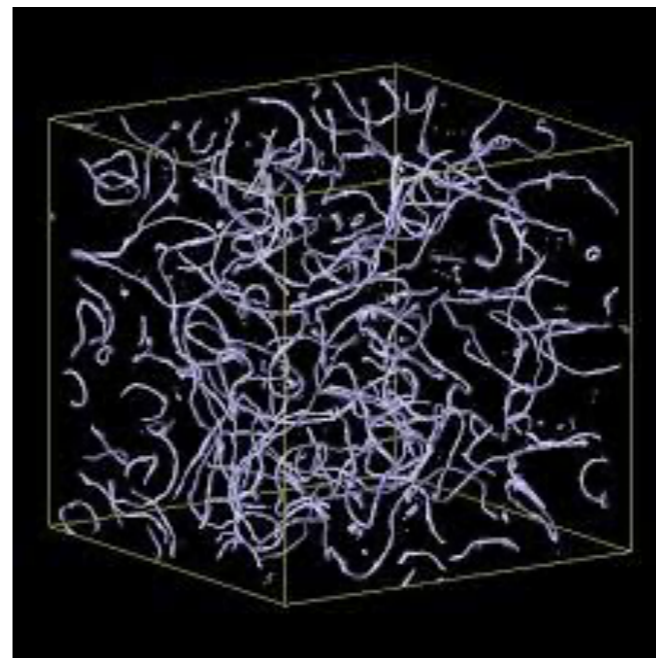
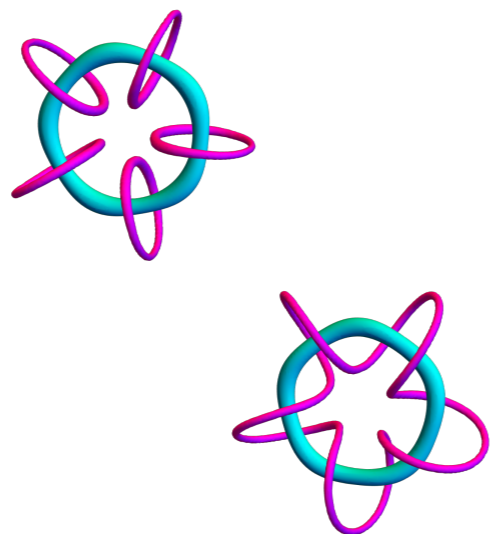


Fate of knot soliton

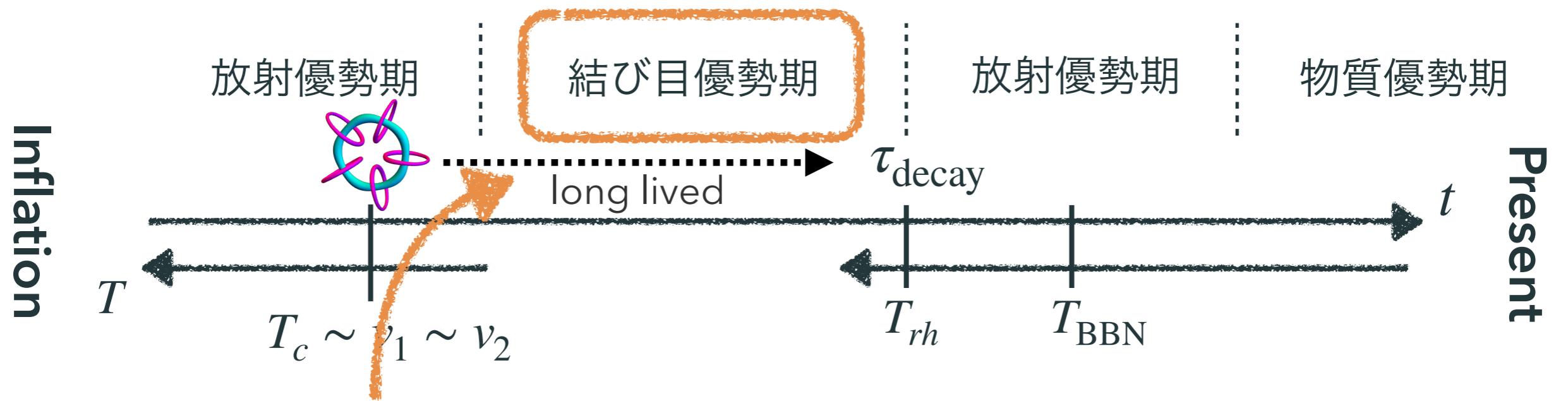


SSB: $U(1)_{gauge} \times U(1)_{global}$

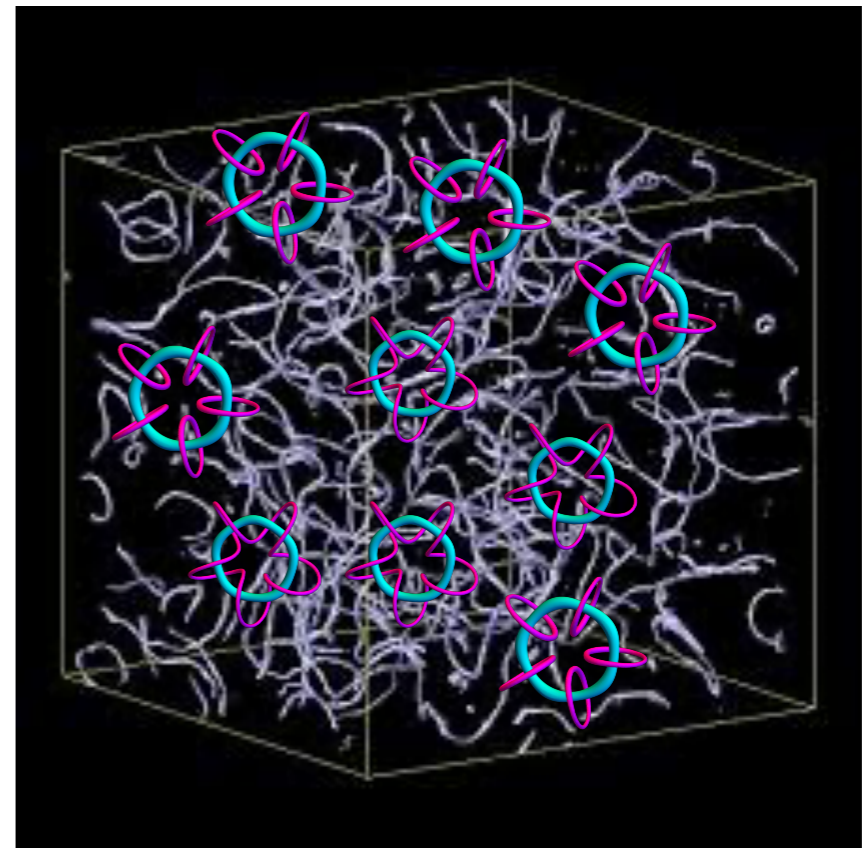
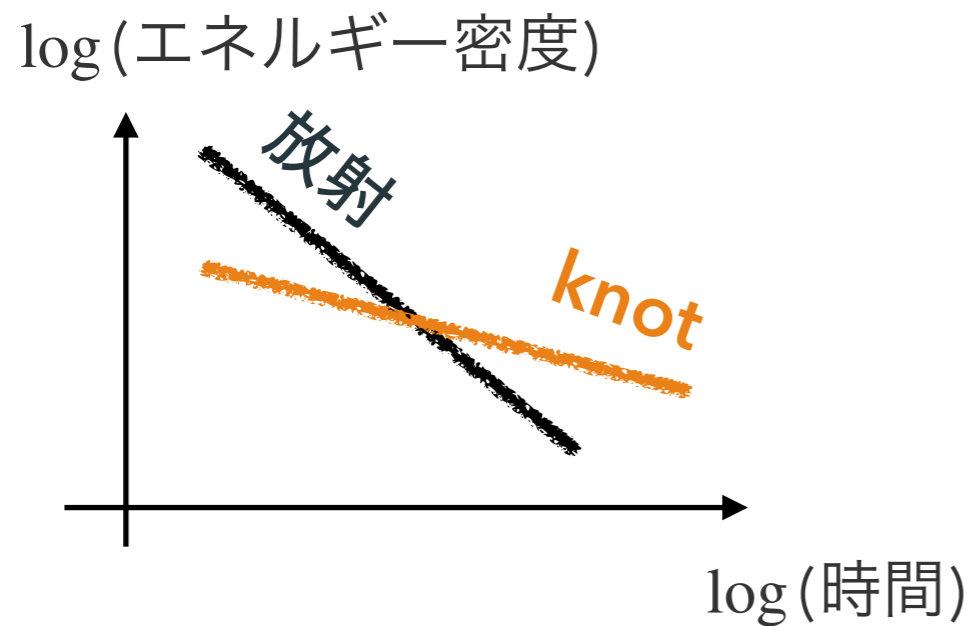
→ knots & cosmic stringsができる



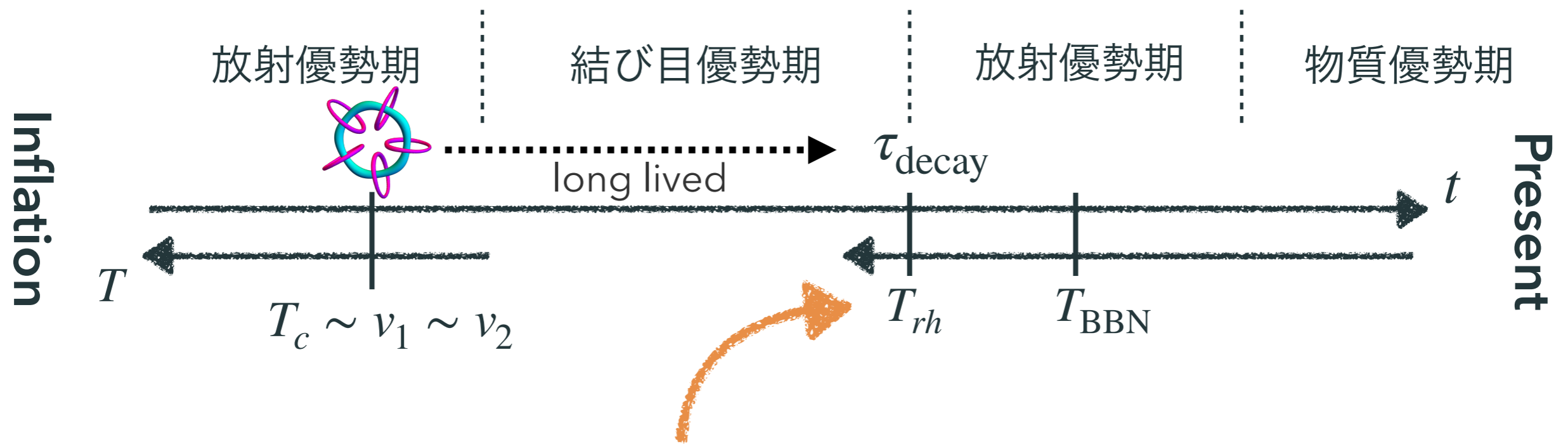
Fate of knot soliton



Knot solitonが宇宙のエネルギーを占める



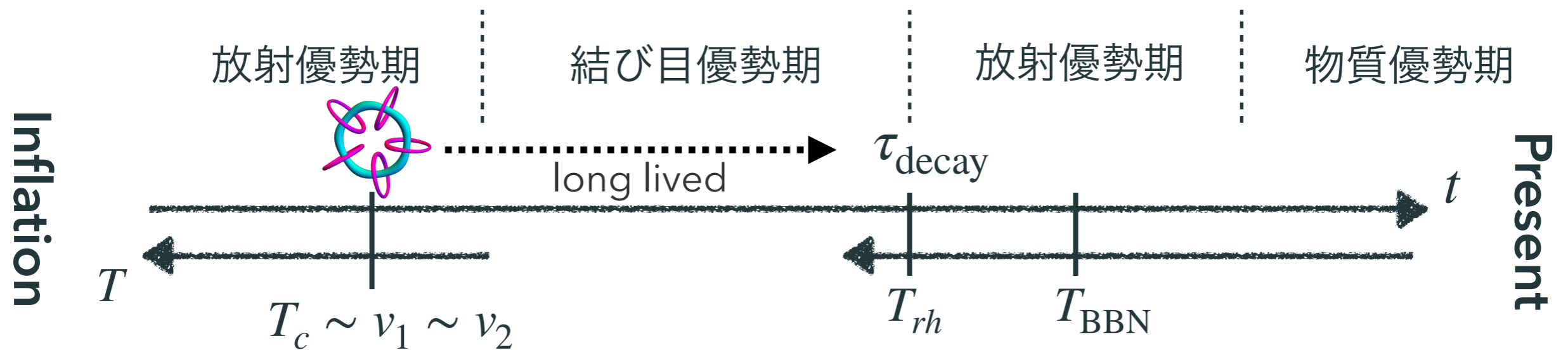
Fate of knot soliton



Knot solitonは量子効果で軽い粒子に崩壊する
 → 宇宙を温めなおす (secondary reheating)

$$T_{rh} \sim \sqrt{\frac{M_{\text{pl}}}{\tau_{\text{decay}}}}$$

Fate of knot soliton

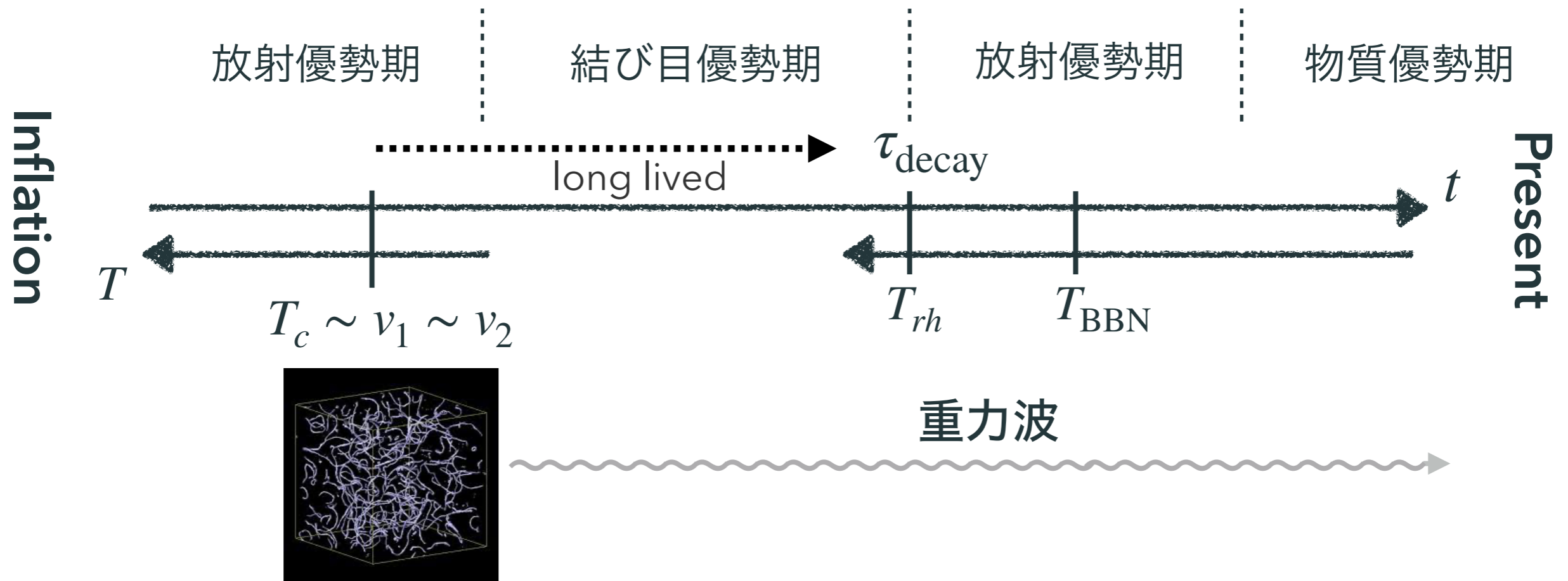


Knot solitonは量子効果で軽い粒子に崩壊する
 → 宇宙を温めなおす (secondary reheating)

$$T_{rh} \sim \sqrt{\frac{M_{\text{pl}}}{\tau_{\text{decay}}}}$$

その後は元素合成を経て標準宇宙論と同じ

Testability by gravitational wave

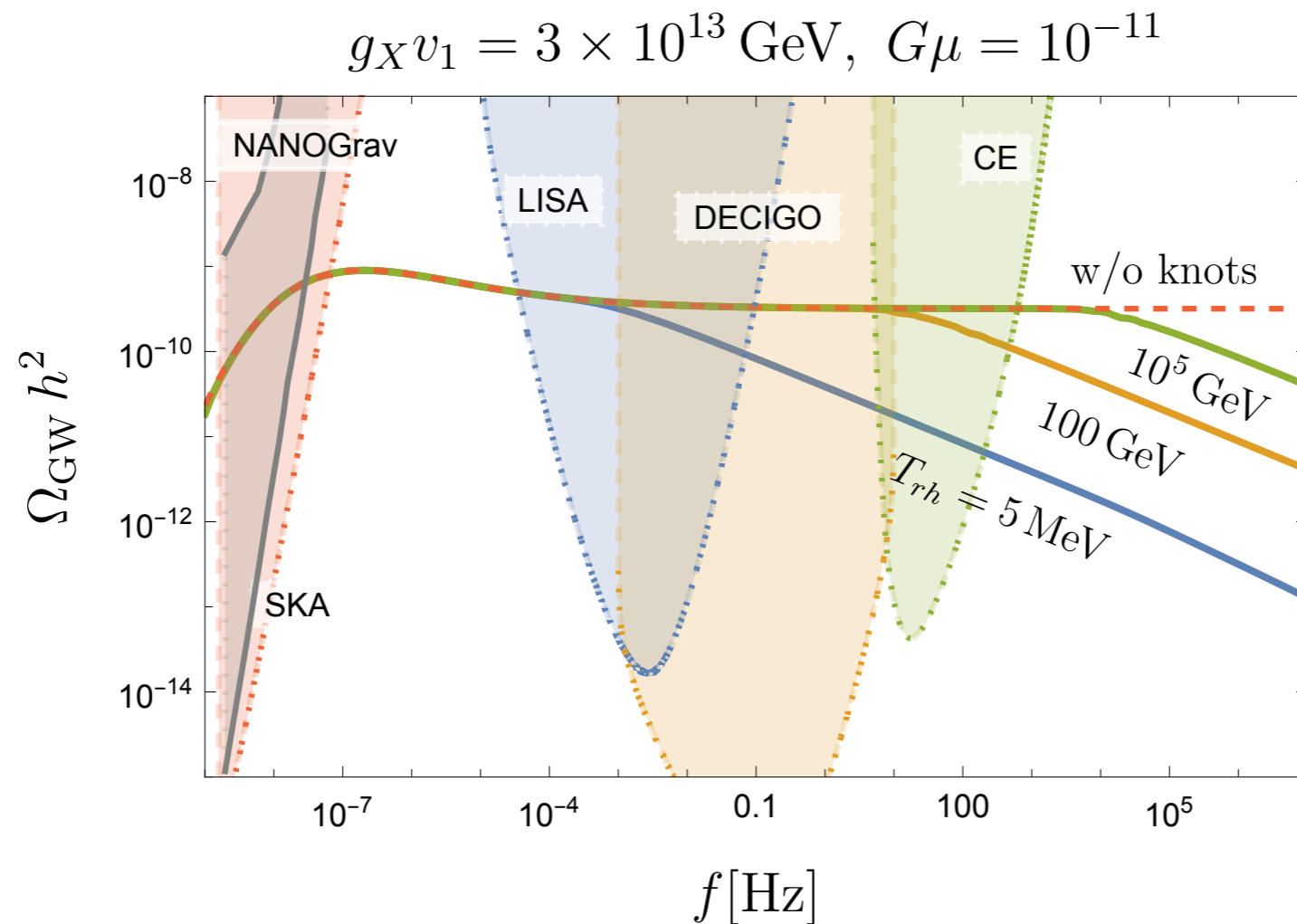


- cosmic stringsから重力波が出て、現在の我々が検出できる
- 結び目優勢期の存在は重力波のスペクトラムに影響する

[Cui+, 1711.03104]

→ 重力波を使ってknot solitonの存在が検証できる！

Testability with gravitational wave



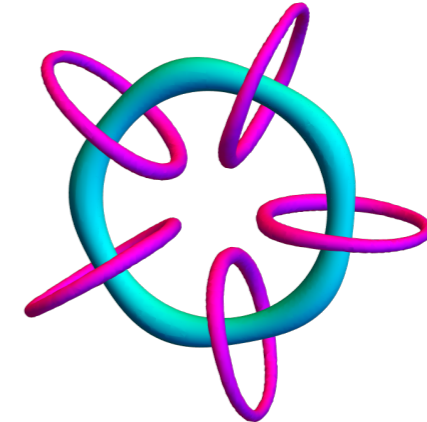
- 重力波スペクトラムは knot solitonが無いときは右側でフラット
 - 結び目優勢期の影響で、スペクトラムが $f^{-1/3}$ で落ちる
- 重力波検出によってknot solitonが存在したかを区別できる

まとめ

- 2種類のcosmic stringを組み合わせて新しいソリトンを発見した

knotted cosmic strings

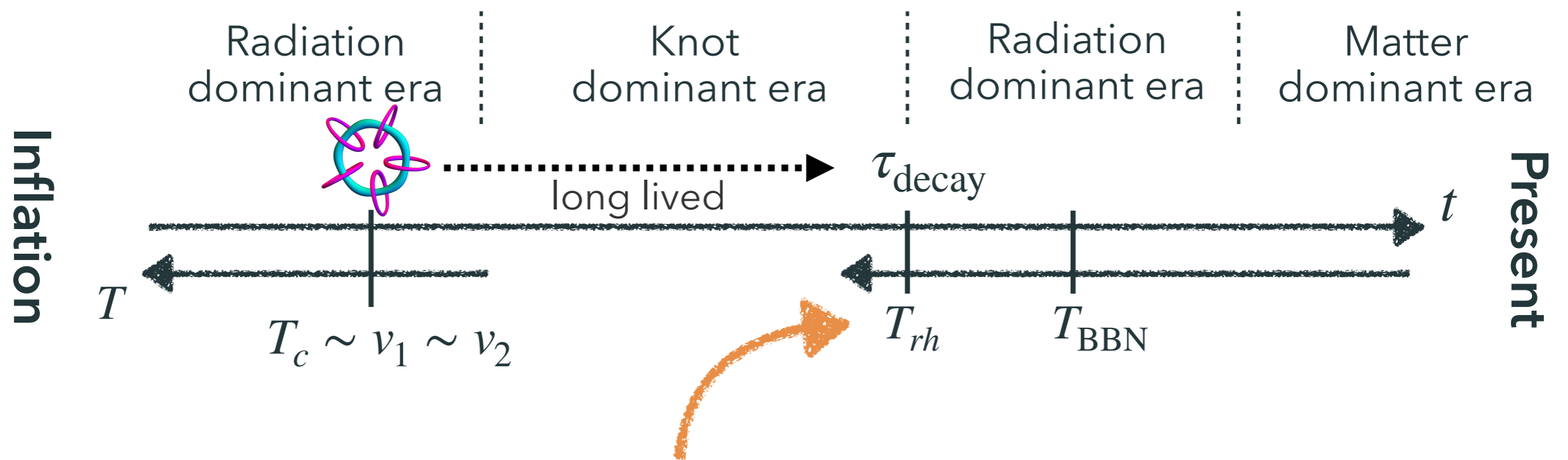
= Knot soliton!



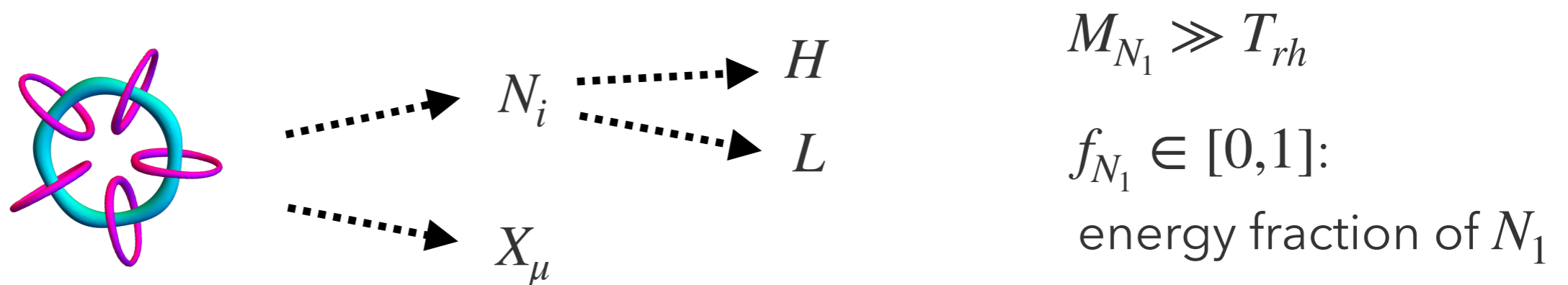
- ゲージ $U(1)_{B-L}$ 対称性、大域的 $U(1)_{PQ}$ 対称性を用いた
→ 現実的な素粒子模型
- 初期宇宙においてknot solitonが支配的になる"結び目優勢期"の存在を提唱した
- 重力波によって結び目優勢期の存在が検証できる！

Backup

Non-thermal Leptogenesis via knot

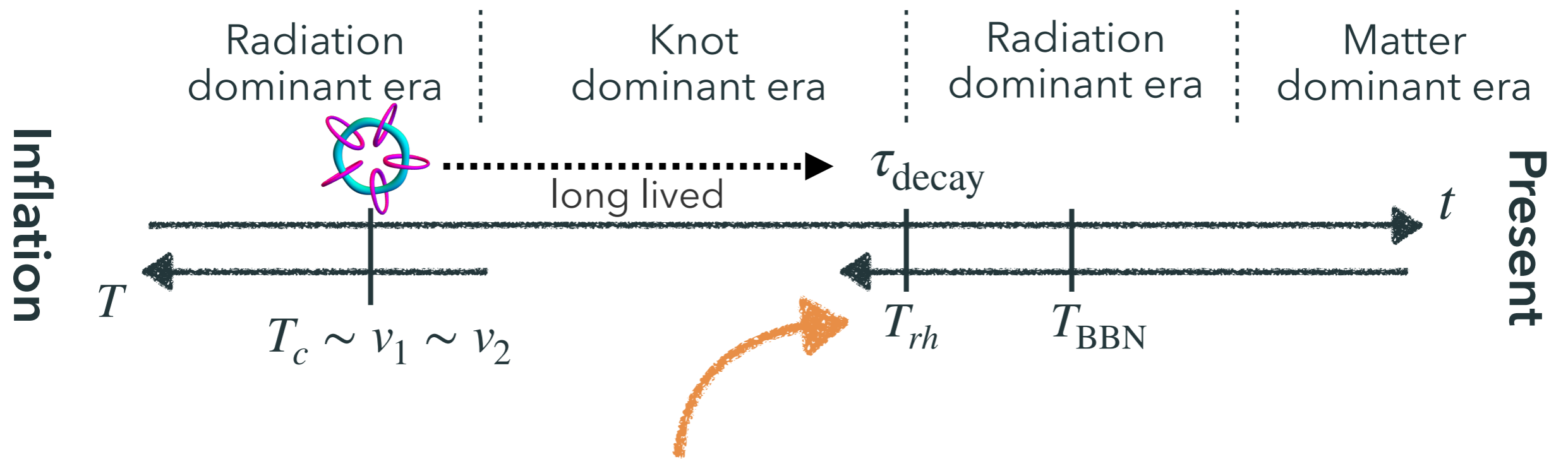


- Decay of knot solitons produce RH neutrinos

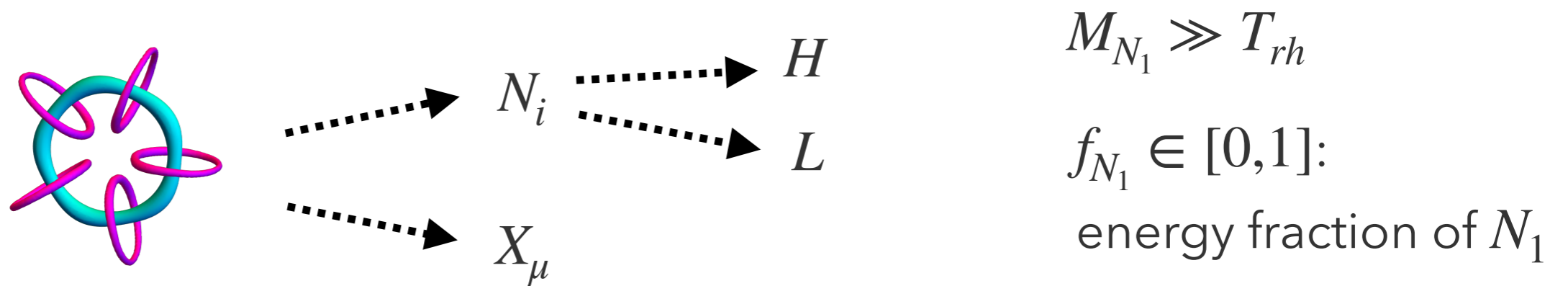


$$Y_B \equiv \frac{n_B - n_{\bar{B}}}{s} \simeq 8.2 \times 10^{-11} f_{N_1} \left(\frac{T_{rh}}{10^6 \text{ GeV}} \right) \left(\frac{m_3}{0.05 \text{ eV}} \right) \delta_{\text{eff}}$$

Non-thermal Leptogenesis via knot



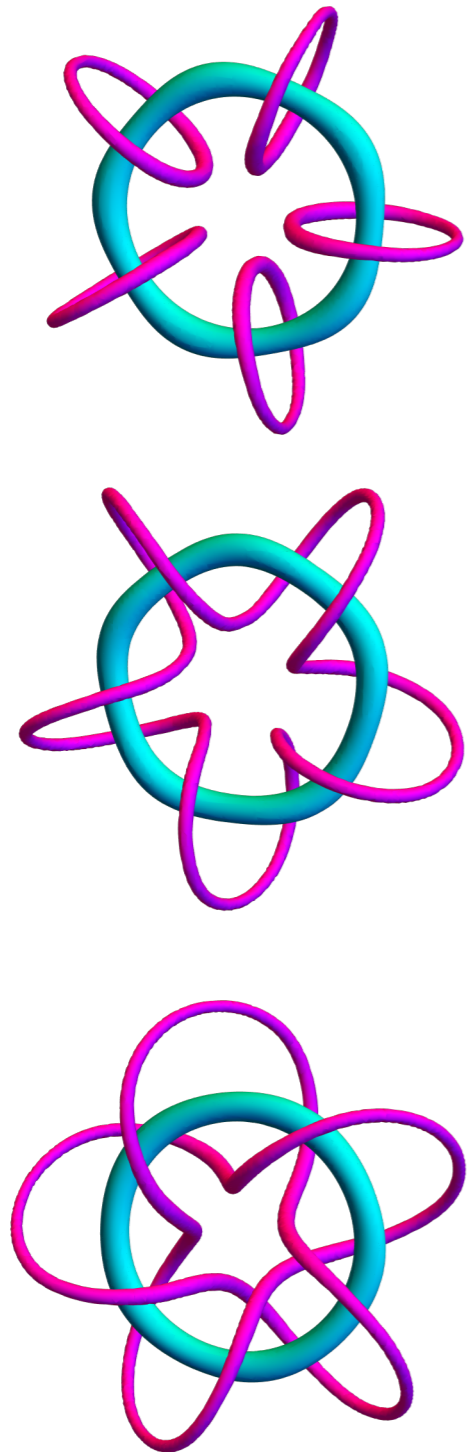
- Decay of knot solitons produce RH neutrinos



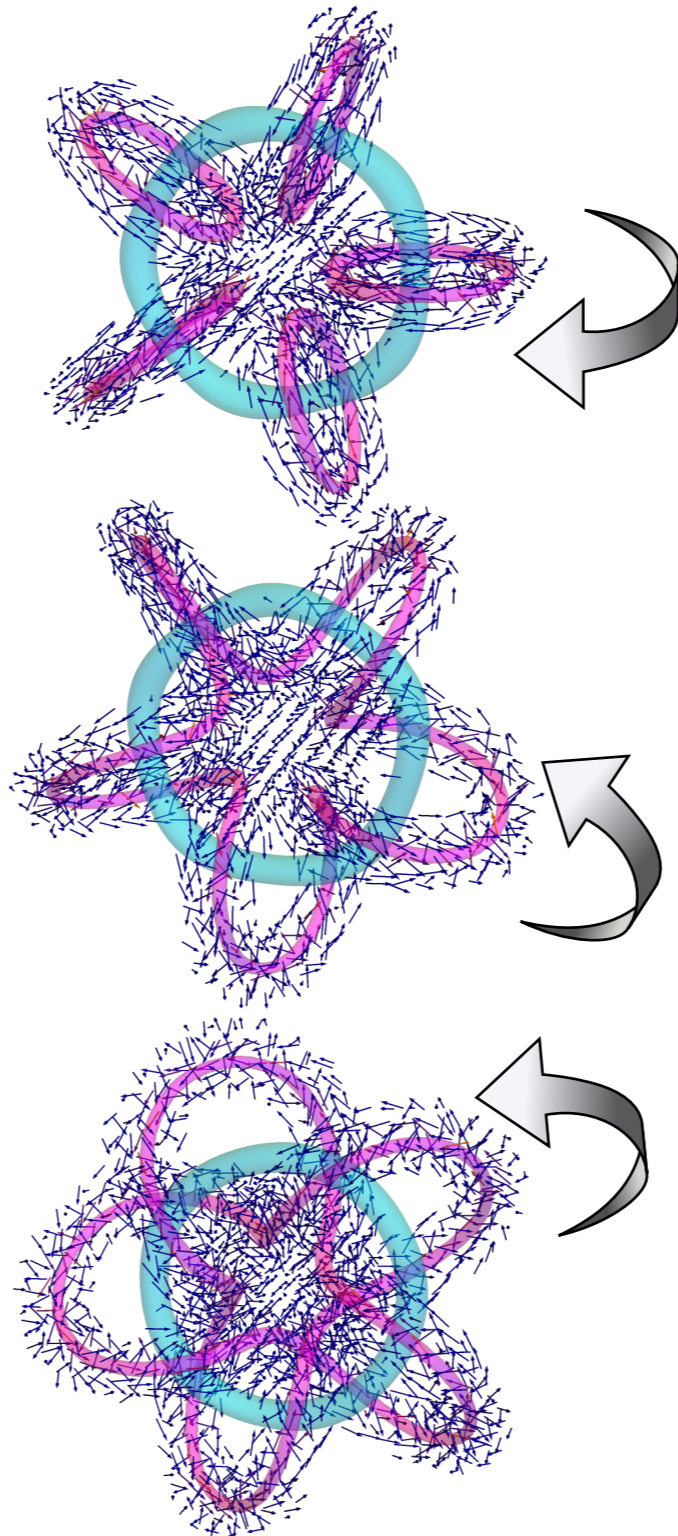
resonant case: $Y_B \lesssim 8.0 \times 10^{-11} f_{N_1} \left(\frac{T_{rh}}{10^2 \text{ GeV}} \right) \left(\frac{10^{12} \text{ GeV}}{M_{R1}} \right)$

Other solutions w/ linking # 5

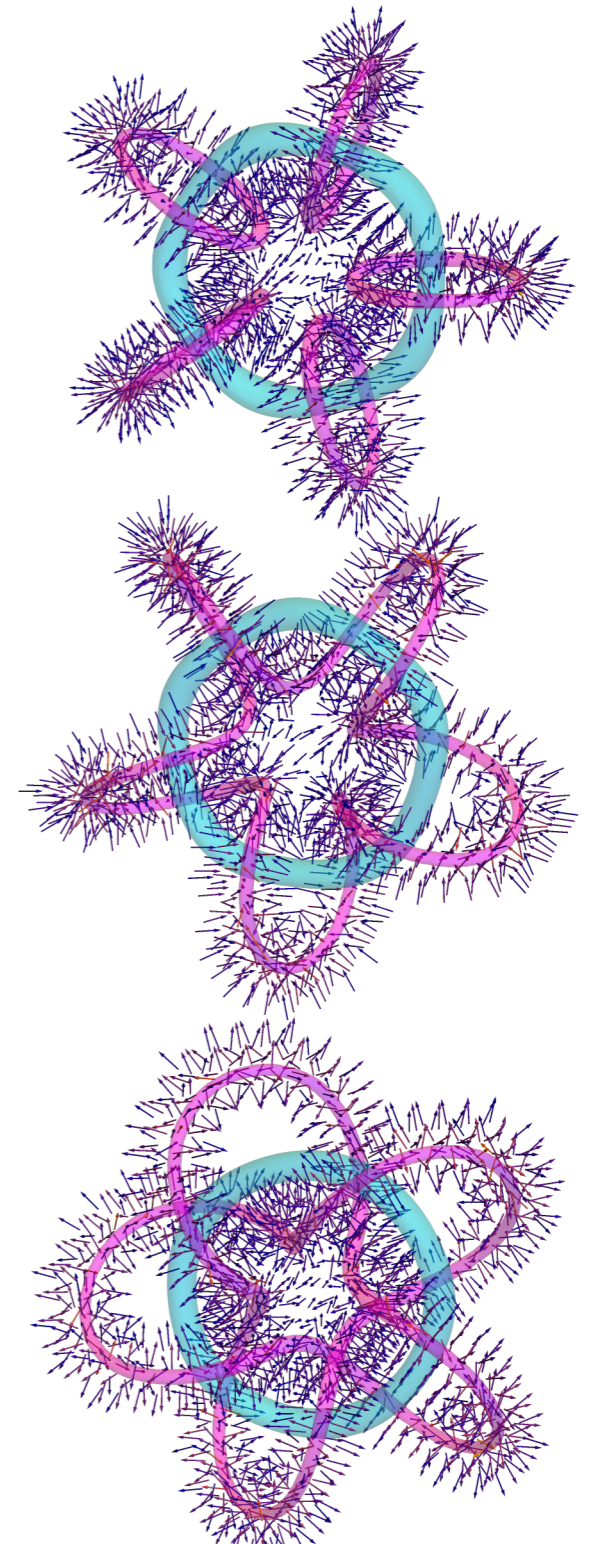
string core



\vec{B}

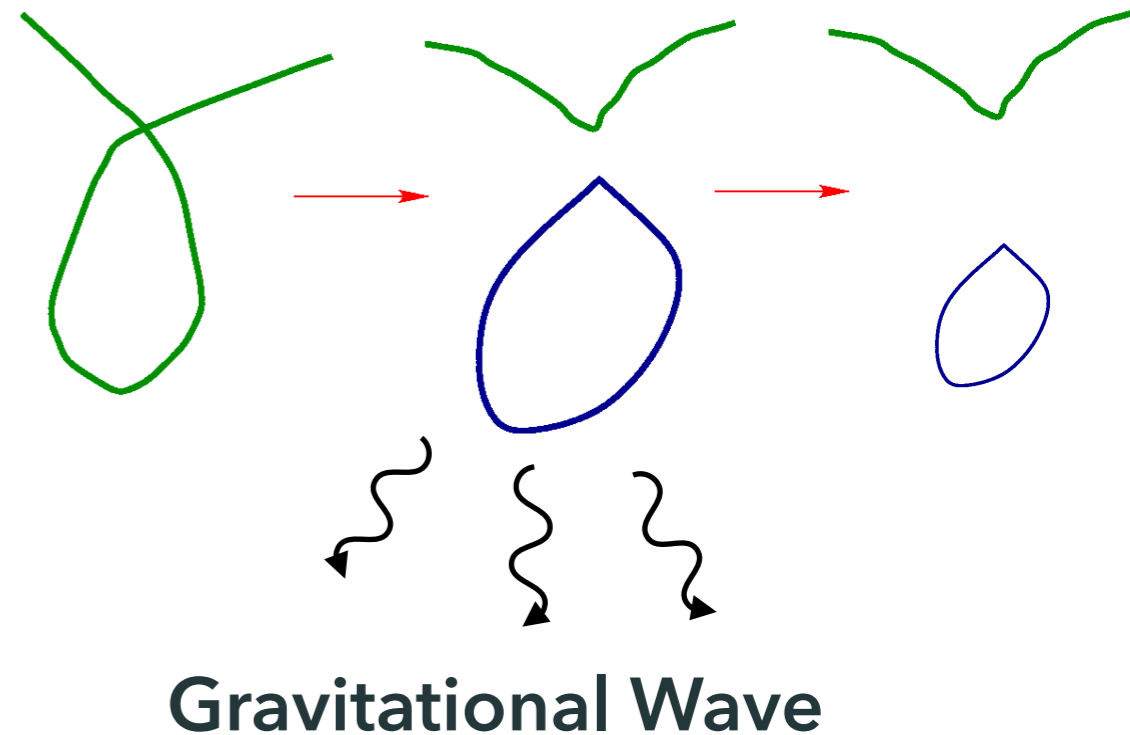
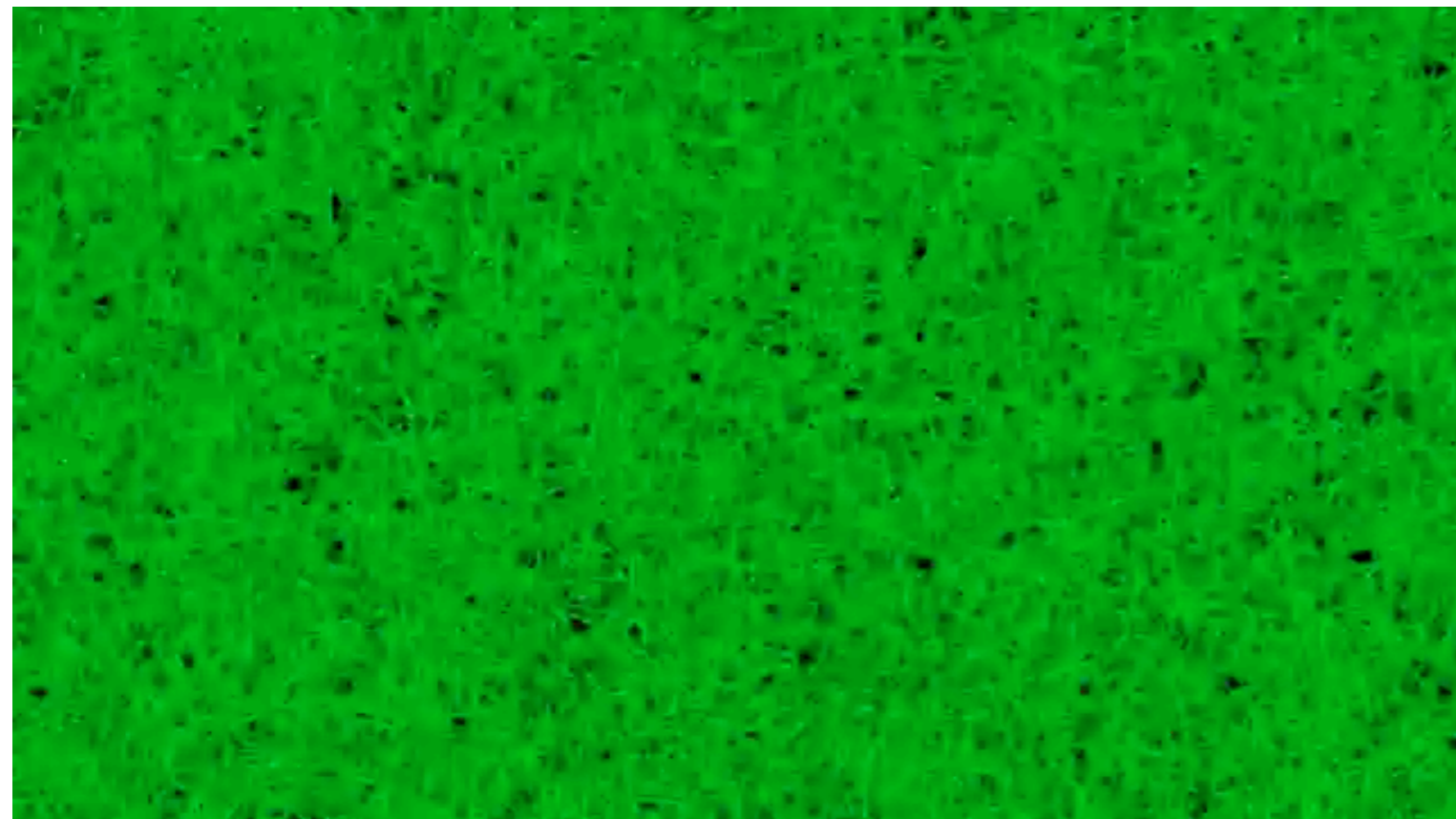


$\vec{E} = \vec{\nabla} A_0$



GW & string network

- The network continuously produces small loops of strings, which decay by **radiating gravitational wave** or particles



GW & string network

- current GW spectrum:

$$\frac{\rho_{\text{GW},0}(f)}{\rho_{\text{tot},0}} \sim (G\mu)^2 \int_{t_i}^{t_0} dt \left(\frac{a(t)}{a(t_0)} \right)^4 \Delta(t, f_{\text{emit}})$$

$$f = \frac{a(t)}{a(t_0)} f_{\text{emit}} \quad ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 dr_3^2$$

GW spectrum function

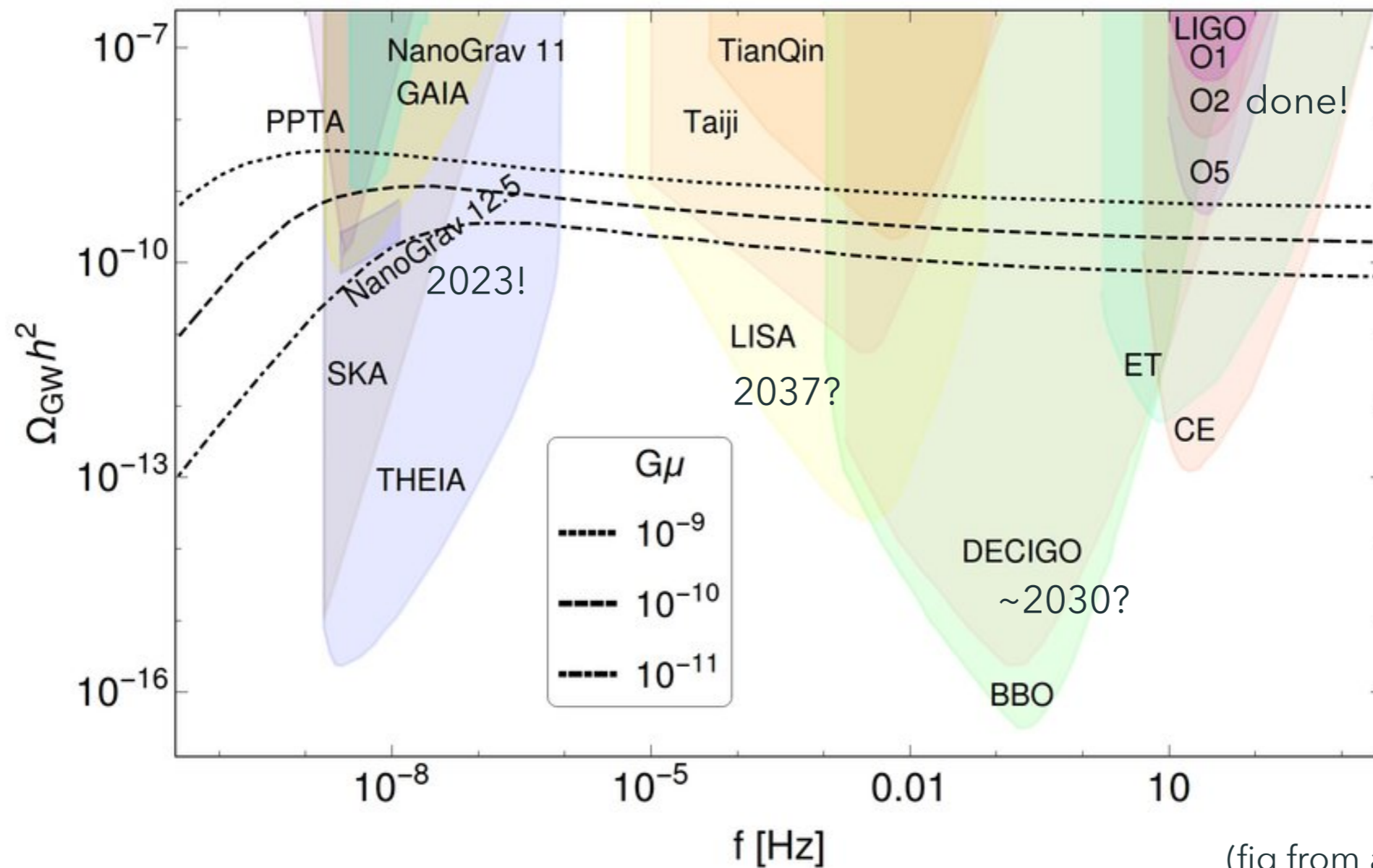
$$G\mu \simeq v_{\text{st.}}^2 / M_{\text{pl.}}^2$$

depends on cosmology

- scale factor $a(t)$: $\dot{a}(t)/a(t) \simeq \sqrt{\rho_{\text{tot}}(t)}/M_{\text{pl}}$
 - GW from cosmic string "knows" what happened in past universe
 - **if detected, new probe of cosmological history**

Future prospect of GW

$$G\mu \simeq v_{\text{st.}}^2 / M_{\text{pl.}}^2$$



(fig from arXiv: 2212.05291)

age of GW & cosmic string!?