

ブラックホールで探る 非平衡系の相転移

中央大学工学部物理学科
中村 真(なかむら しん)

参考文献:

- [1] M. Matsumoto and S.N. arXiv:2201.06894 [hep-th]
- [2] T. Imaizumi, M. Matsumoto and S.N. PRL124 (2020) 19, 191603
(arXiv: 1911.06262 [hep-th])

自己紹介

中村 真 (なかむら しん)

高校: 東京都立国立(くにたち)高校 クラブ: 硬式野球部

一年間 河合塾に通う

大学: 慶應義塾大学理工学部 物理学科

卒業研究: 一次元合金の成長に関するモンテカルロシミュレーション

クラブ: 理工山岳部・理工硬式野球部

大学院その1: 京都大学大学院 理学研究科 物理学第2専攻

原子核物理2 (原子核実験@化学研究所)

研究テーマ: 化合物半導体中の動的核スピン偏極 実験

Axion探索実験の手伝い、CERNでの実験.....

この間、アラスカ・マッキンリー山(6194m)に2回登頂

モンブラン(4808m)単独登頂など、多数登山

D3まで実験を行うも、単位のみ取得して(博士号未取得)修了

D3の年は人生に迷い、京大のチベット未踏峰遠征隊に参加
(梅里雪山(6740m))

大学院その2: 総合研究大学院大学 数物科学研究科(KEK理論部)
D1に編入(指導教官:川合 光 先生)
研究テーマ:素粒子論、特に超弦理論

途中で川合さんが京大教授となる。(自分も京大理学部・素粒子論へ)

“D3”で結婚

“D4”で博士号取得(2001年)

その後ポスドク等として13年間、各地を転々とする

基研 → KEK → 理研 → ニールスボーア研究所

→ Center for Quantum Spacetime (CQUeST) (韓国)

→ APCTP(韓国) → 京大理(素粒子論) → 京大理(原子核理論)

→ 名大理(クォークハドロン理論:特任准教授)

2014年4月から: 中央大学理工学部 教授



本講演の内容

非平衡系の相転移現象を
ブラックホールの物理学を用いて調べた

Key words:

- 相転移
- 熱平衡状態、非平衡状態
- 臨界現象

- 一般相対性理論
- ブラックホール

- 超弦理論
- AdS/CFT対応

熱力学・統計物理学

相対性理論・宇宙物理学

素粒子論・超弦理論

Introduction

相転移とは？

例：1気圧における水の相転移



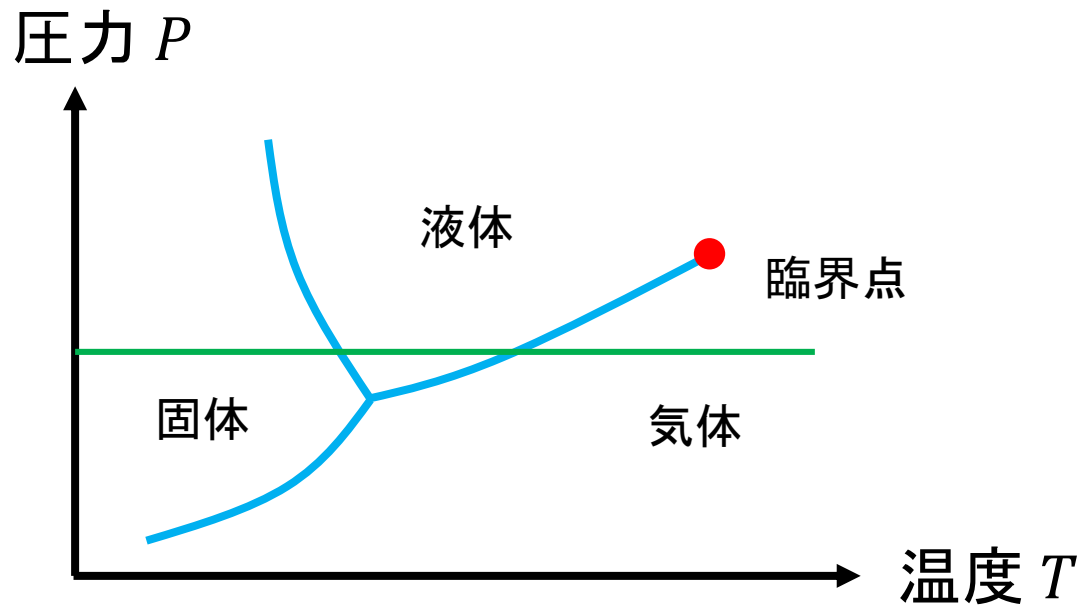
温度などのパラメータを連続的に変化させたときに物質の状態(相)が不連続に変化する現象

さまざまな相転移がある。

- 気体液体相転移 • 磁性体の相転移
- 超伝導・常伝導 • 閉じ込め・非閉じ込め
- 超流動・常流動 • カイラル対称性の破れ など多数

相図 (Phase diagram)

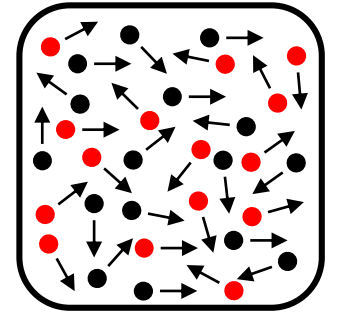
相とパラメータの関係を図示したもの



水の相図の概略

通常、相転移は**熱平衡状態**で議論をする。**熱平衡**とは？

熱平衡状態



多数の粒子(自由度)から成る系において:
(個々の粒子(微視的自由度)は動き続けているが)

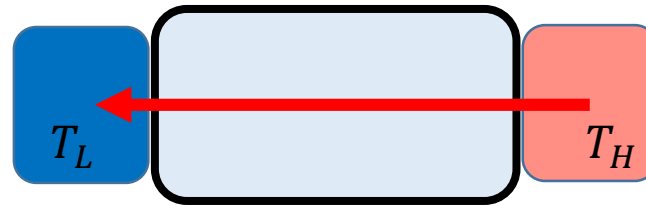
系の巨視的な状態(温度、圧力、密度など)が変化せず、
外界との保存量(エネルギー(熱、仕事)や電荷、粒子数)
の巨視的なやりとりが存在しない状態。

専門的には、詳細つり合い(detailed balance)が大域的に成立している状態



T, P, n 一定

熱平衡状態



例えば: 高温側から低温側への熱流が存在

熱平衡状態ではない
= 非平衡状態

非平衡状態とは？

熱平衡ではない状態：

(外界との熱や仕事の(巨視的な)やりとりがあるなど)

詳細つり合い(detailed balance)が少なくとも部分的に破れている。

非平衡定常状態とは？

非平衡状態だが、

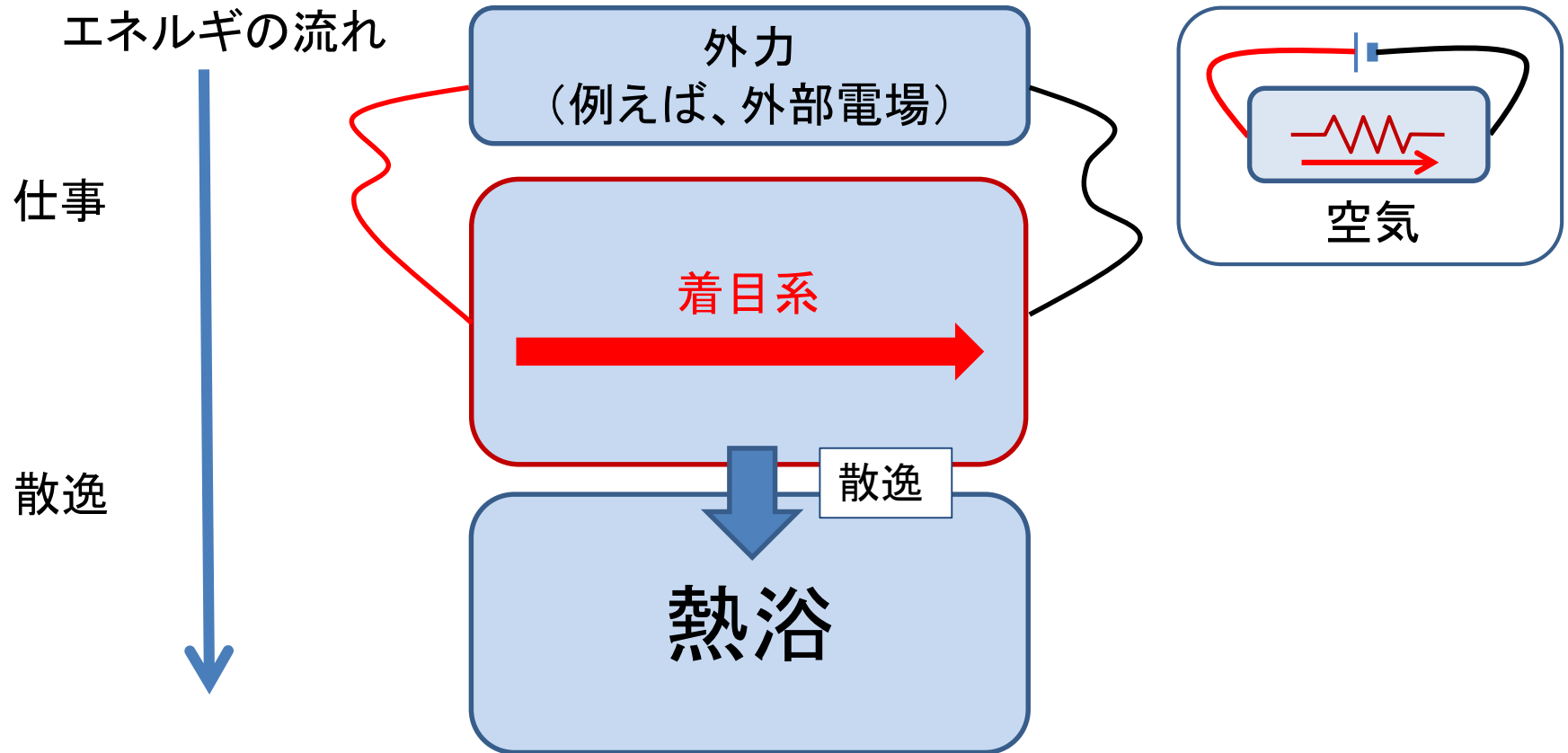
巨視的な物理量は時間変化しない(定常)状態。

時間変化がない分、扱いが簡単であると期待される。

非平衡定常状態の構成

外力と熱浴が必要。

外力(電源)が着目系を非平衡にドライブする。



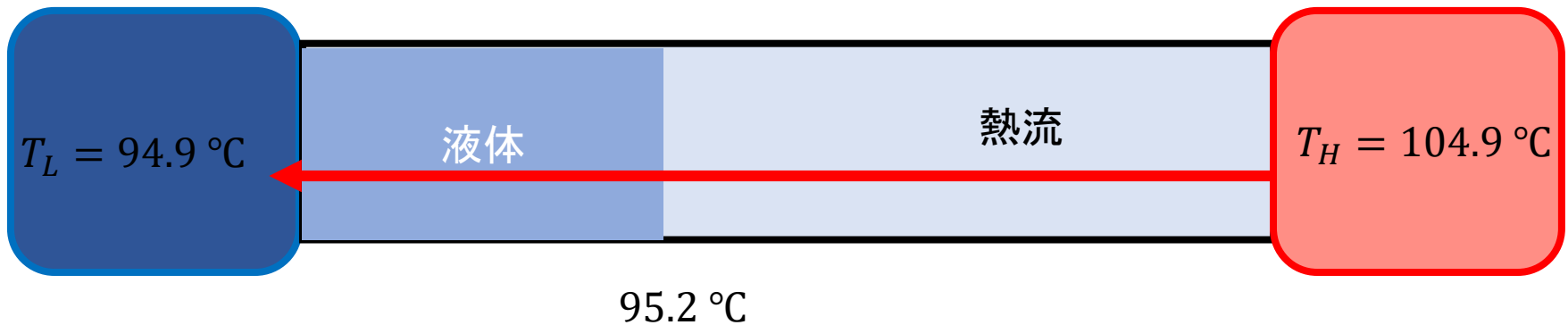
部分系としての着目系は、外力の行う仕事と熱浴への散逸が釣り合った時、非平衡定常状態となる。

自然な問い



水に対してさまざまな温度の**平衡状態**を考えると(1気圧で)
 $T > 100^\circ\text{C}$ のもの: **気体** ($0^\circ\text{C} < T < 100^\circ\text{C}$ のもの: 液体)

問い: 非平衡(定常)状態では、どうなるか?



熱流のある系の設定

[1] N. Nakagawa, S-i. Sasa, Phys. Rev. Lett. 119, 260602 (2017)

[2] N. Nakagawa, S-i. Sasa, J. Stat. Phys. 177, 825–888 (2019)

非平衡物理学の解析方法

- 統計物理学の基本に沿って数理的に考察する
- コンピュータシミュレーションなどによって調べる

などの方法が正統的なアプローチであると考えられる。

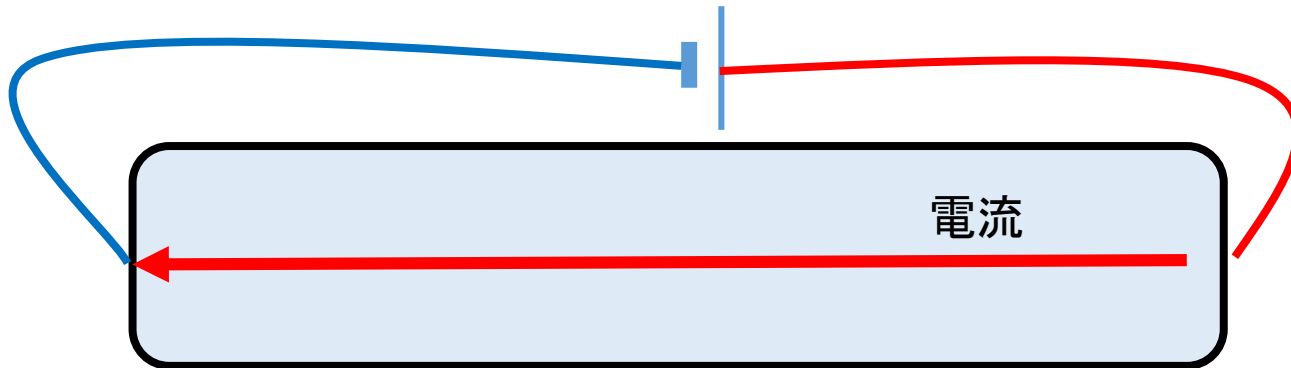
しかし、ここでは、少し冒険を試してみたい。

本講演のメッセージ

素粒子の超弦理論や、アインシュタインの相対性理論が役にたつかも知れない。

本講演の概要

(本研究の手法では熱流よりも電流を扱う方が容易なため)



系に電流を流すことによって

相図はどのように変化するか？

- 転移点はどのように変化するか？
- 相転移の次数は変化するか？
- 新しい相構造が現れるか？

未知の現象が現れるか？

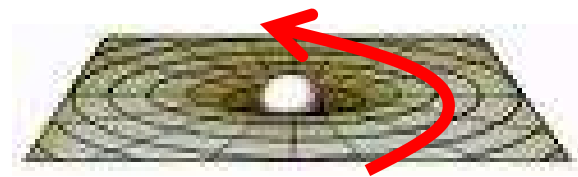
について超弦理論とブラックホールを用いて調べる。

Introduction 2

ブラックホールとは？

アインシュタインの一般相対性理論によると
重力の存在は、「時間・空間(時空)が歪んだ」結果である。

質量の存在 = 重力の発生 = 時空の歪み



- 時空の歪み: 直進(平行移動)の概念が変更される
- 時空が歪むと: 光でさえ軌道が曲がる

質量が非常に狭い領域に集中すると

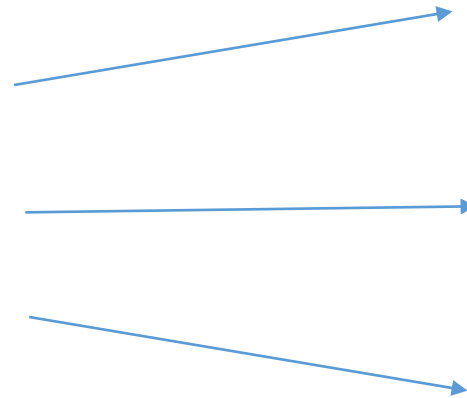
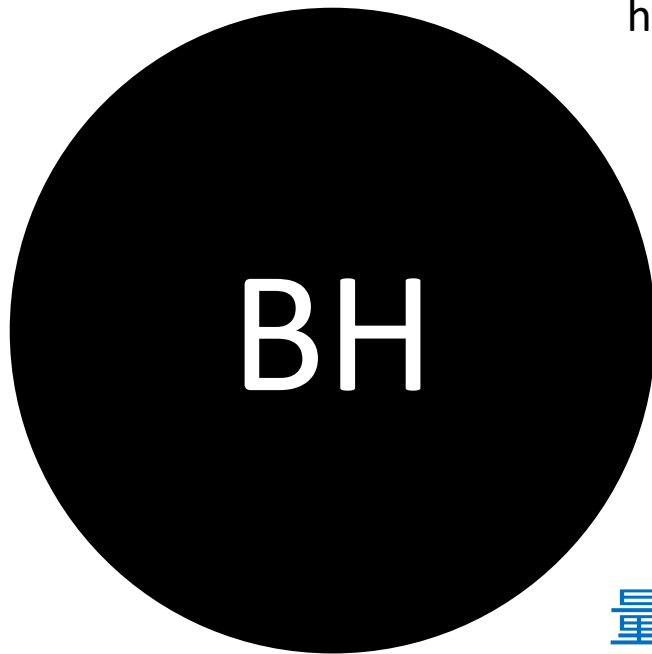
重力の影響で、光さえ脱出できない領域が現れる: **ブラックホール**



ブラックホールにも温度がある

ブラックホールは単なる巨大質量の星？

古典的には、光を含めて一切の情報を horizon 外に放出しないが.....



温度 T

量子力学的には熱輻射を放出する：
Hawking radiation

S. W. Hawking "Black hole explosions?" *Nature* **248** (1974) 30.

温度やエントロピーなどの、**熱力学の概念**が存在する。

“ブラックホール熱力学”の法則

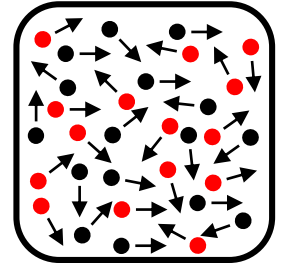
	熱力学	ブラックホール
第0法則	熱平衡では 温度 が一定。	定常解では 表面重力 κ (T_H に対応)が一定
第1法則	$dE = T dS + \mu dN$	$dM = [\kappa / (8\pi G_N)] dA + \mu dN$ (第2項は各運動量や電荷に対応する項。)
第2法則	エントロピー は減少しない。	ホライズンの面積 A は減少しない。
第3法則	物理過程で 温度 をゼロにできない。(Nernst) ゼロ温度極限で エントロピー はゼロ(Planck)	物理過程で 表面重力 κ をゼロにできない。

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad S = \frac{A}{4G_N}$$

単なる偶然の一致とは思えない。

ブラックホールと多体系

ブラックホール：天体としては1個だが
温度やエントロピーなどの概念が存在する。



ブラックホールは微視的自由度の多体系？

Yes. (少なくとも、あるブラックホールについては)

超弦理論で予想されるAdS/CFT対応によれば：

ある種の「ブラックホール」と、ある種の「多数の粒子の集合」の間には対応原理(等価性)があり、
一方の物理量を他方の物理量を用いて計算できる。

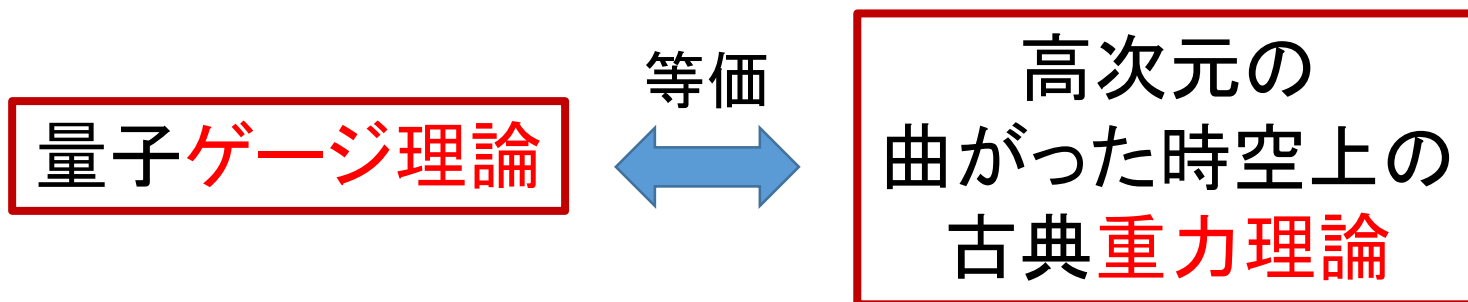
統計物理学・熱力学



一般相対性理論
ブラックホールの物理

ゲージ・重力対応 (AdS/CFT対応)

[Maldacena, 1998]



- 対応そのものは**微視的理論**の対応として成立している。
- この枠組みでは、ブラックホールの**エントロピー**は、対応する**ゲージ理論の微視的自由度**をカウントしたものを理解できる。
- 証明はなく「**予想**」ではあるが、17,000を超える引用文献の中で明らかな**反例は見つかっていない**。
- 超弦理論の枠組みでD-braneを用いることで、対応を「**自然に**」説明することはできる。

ゲージ・重力対応 (AdS/CFT対応) の 非専門家向けの参考文献の例

数ページの読み物

- [1] 「ゲージ・重力対応で探る強相関系の非平衡物理学」、
中村 真、日本物理学会誌70 (2015) 510-518. (2015年7月号)

まとまったテキスト

- [2] 「超弦理論の応用」、臨時別冊・数理科学 SGCライブラリ93、
夏梅 誠 著、サイエンス社

場の理論の専門家を念頭に書かれたレビュー

- [3] 「ホログラフィック・ゲージ理論入門」、
中村 真、原子核研究 Vol. 56 Supplement 1、p.3-55 (2011)

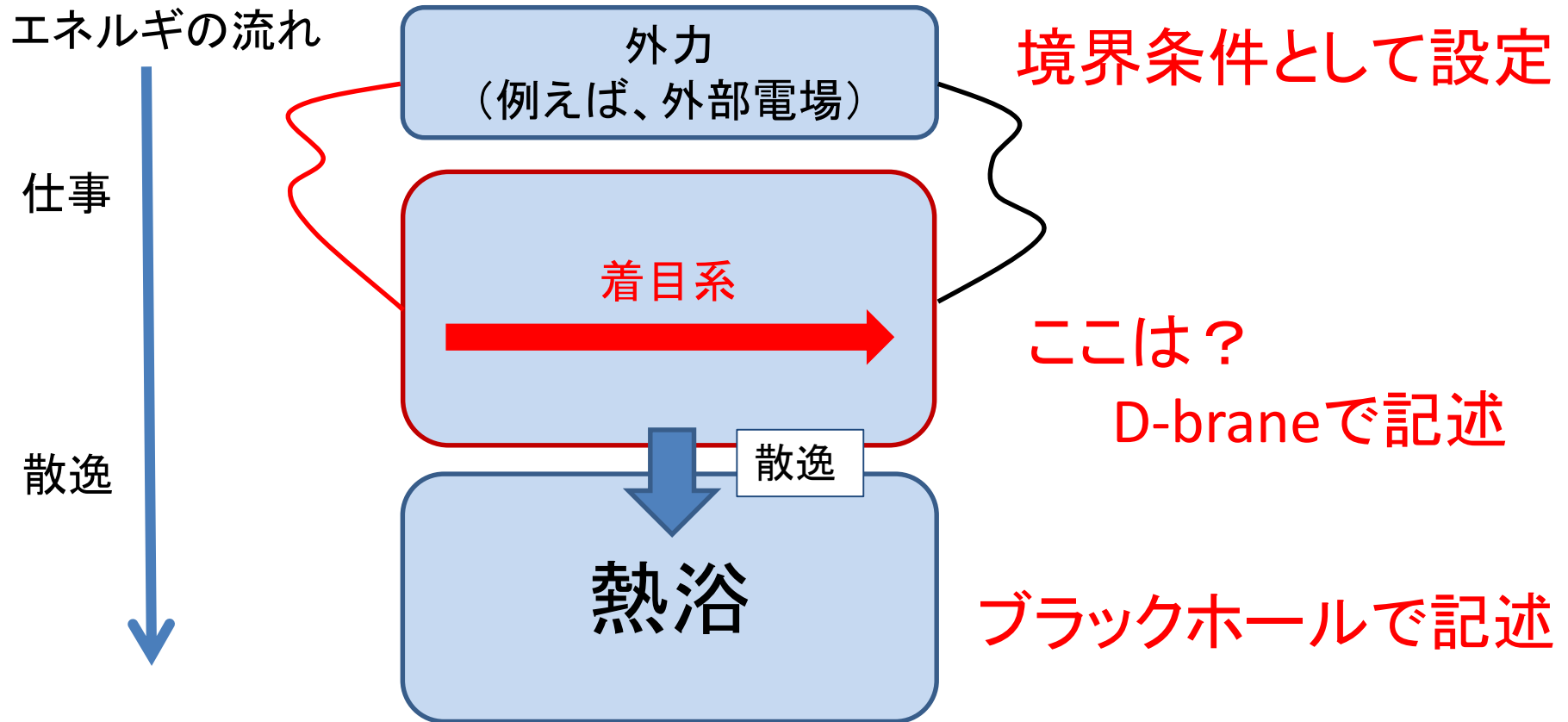
流体力学との関連を中心に書かれたレビュー

- [4] 「超弦理論がつなぐブラックホールと流体力学」、中村真、夏梅誠、
物性研究 94-3(2010)350、素粒子論研究 118-2(2010)63

非平衡定常状態の構成

外力と熱浴が必要。

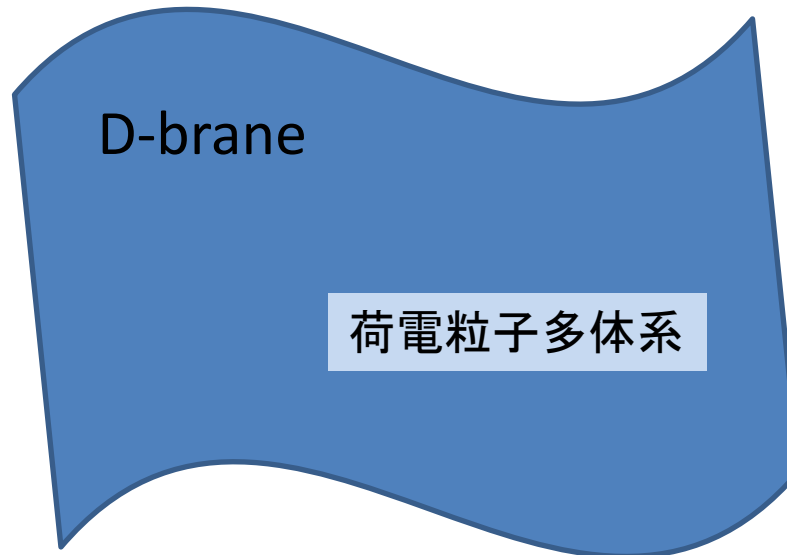
外力(電源)が着目系を非平衡にドライブする。



部分系としての着目系は、外力の行う仕事と熱浴への散逸が釣り合った時、非平衡定常状態となる。

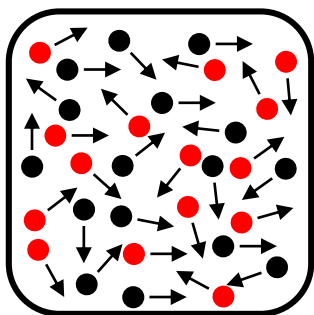
D-brane

- 超弦理論の「ソリトン」解
- 高次元の膜状のobject
(D p -brane: ($p+1$)-次元)
- 開弦(ここでは荷電粒子)の多体系を記述



重力理論への書き換え

強く相互作用する
Large- N_c 量子ゲージ理論

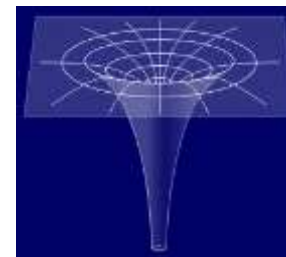


熱浴
(gluons)

荷電粒子の多体系
(着目系)

AdS/CFT
⇔
等価

高次元の曲がった
時空上の古典重力理論



ブラックホール

D-brane

古典力学

どのようなものが計算可能か

ゲージ理論側の演算子Mの
連結相関関数の生成汎関数W

$$e^{iW(h)} = \langle e^{ihM} \rangle$$

= 重力側の (解を代入した) 古典作用

$$W(h) = S_{\text{古典重力}}(h)$$

GKP-Witten 処方

[Gubser, Klebanov, Polyakov, 1998]
[Witten, 1998]

古典解が支配

統計物理学の言葉では

$$W(h) = S_{\text{古典重力}}(h)$$

$$e^{iW(h)} = \langle e^{ihM} \rangle$$

Wは確立変数Mに対する
キュムラント母関数
(非平衡定常状態におけるもの?)

通常、非平衡ではこの期待値の取り方がよく分らない。

AdS/CFT対応では、左辺が直接得られる。
その際に用いる重力側の解は、
非平衡系に対応するの古典解を選んで
おけばよい。

非平衡統計物理学の
難しい部分を
回避している。

どのようなものが計算可能か

ゲージ理論側の演算子Mの
連結相関関数の生成汎関数W

$$e^{iW(h)} = \langle e^{ihM} \rangle$$

= 重力側の (解を代入した) 古典作用

$$W(h) = S_{\text{古典重力}}(h)$$

GKP-Witten 処方

[Gubser, Klebanov, Polyakov, 1998]
[Witten, 1998]

非平衡の古典解

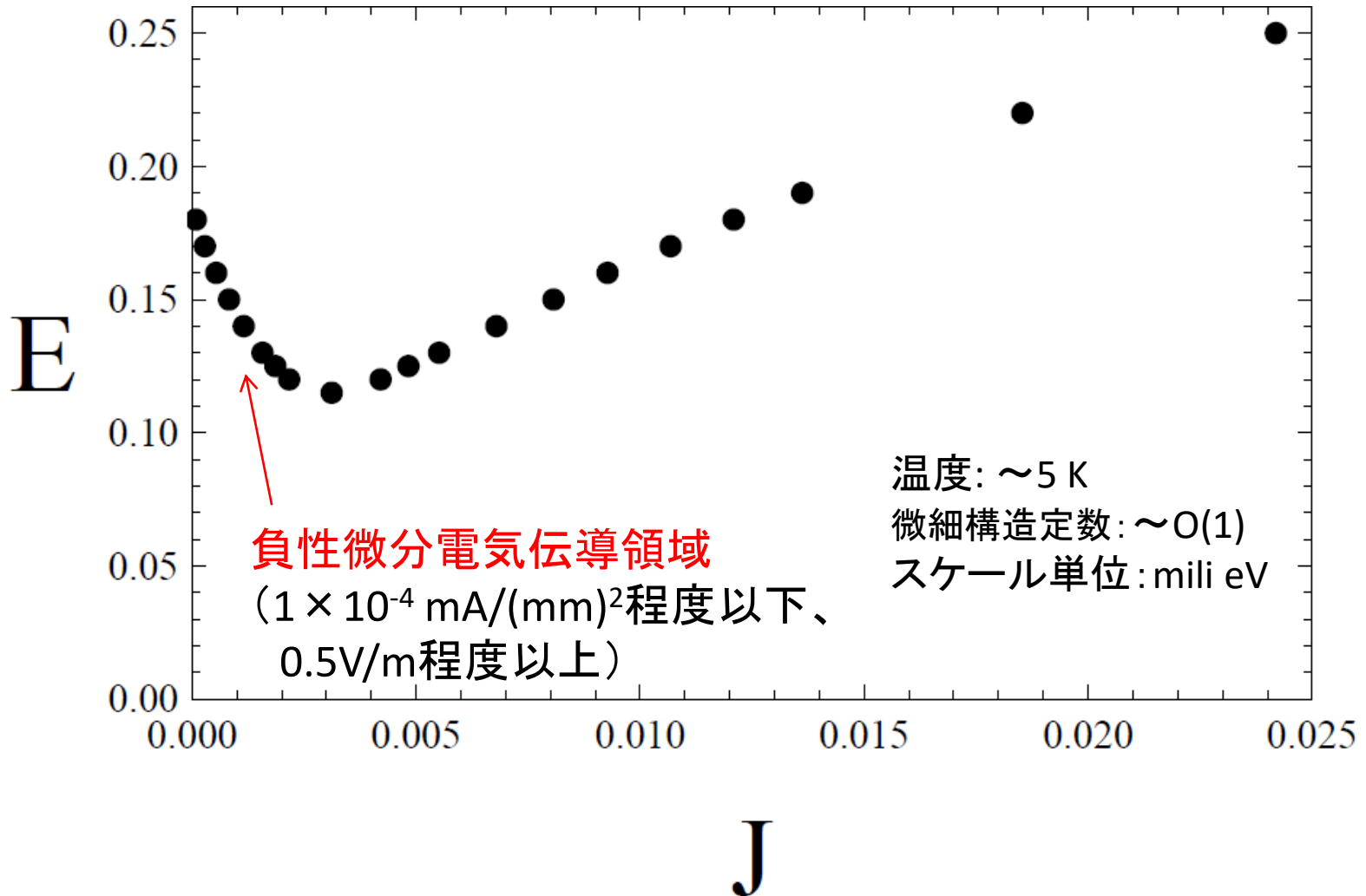
例えば外部電場 E_x が存在する条件下で
 h としてベクトルポテンシャル A_x を選べば
電流密度 J_x の期待値が求められる。

電気伝導度が
(線形応答を超えて)
計算できる。

[Karch, O'Bannon, 2007]

絶縁破壊を示す系で計算した 負性微分電気伝導の一例

[S.N. , Prog. Theor. Phys. 124 (2010) 1105]



ゲージ・重力対応を非平衡系に 応用する上での考え方

非平衡系における粗視化の困難を迂回

ミクロな理論
(ゲージ理論)
に基づく多体系

粗視化

系の挙動のエッセンス
を抽出したマクロな記述

ミクロとマクロをどのように繋ぐか？

AdS/CFT対応
(ミクロ理論レベルでのマップ)

AdS/CFT対応
(元の理論の
言語に戻す)

高次元の曲がった時空上の
一般相対性理論、弦理論

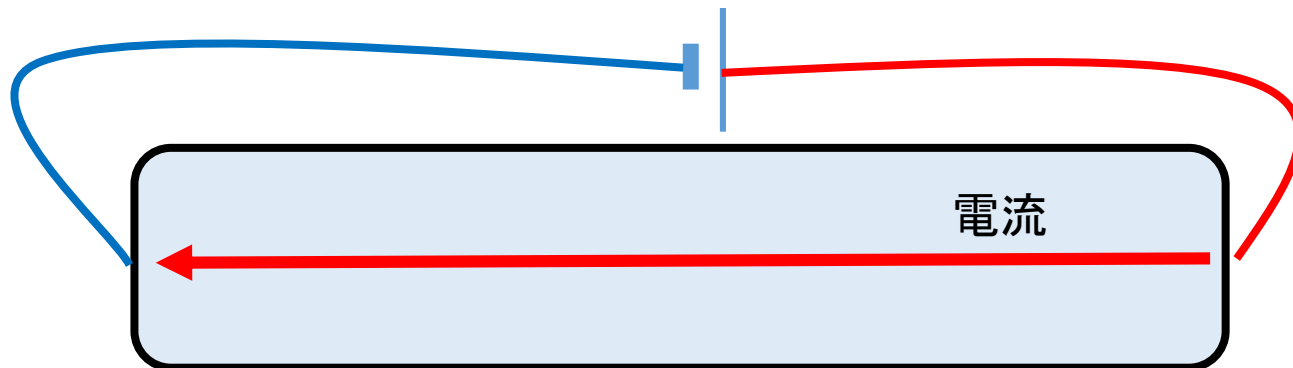
場の古典力学
運動方程式を解く

マクロな概念の創発、
量子論的・統計物理学的期待値

この研究では

ブラックホール時空に存在する
D-braneの**古典力学**を解析することで

定常電流の流れる非平衡定常状態における
相転移現象を解析した。



研究の詳細

本研究における問い: 非平衡系の相転移と臨界現象

相転移を示す系に定常電流 J を流すなどして非平衡定常状態 (NESS)に駆動することで何が起きるか？

J の存在により相転移の次数や転移点の位置はどのように変化するか？

微視的理論

⋮



Universality class



Universality class

NESSに駆動



?

J

微視的理論

臨界点では次元や対称性
などで決まる少数の

さまざまな微視的理論

Universality classに分類できる

新たなuniversality classが現れないか？

本研究では

場の量子論として完全に定義された微視的理論

(平衡状態で自発的対称性の破れに伴う1次相転移を示す)



外力で駆動された保存電荷の流れ(電流 J)により
NESSにドライブする

- 転移点の位置はどのように変化するか
- 相転移の次数はどのように変化するか について調べた。

- この1次相転移は $J \geq J_c$ で2次相転移に変化
 $J = J_c$ に3重臨界点(TCP)が存在 [今泉・松本・中村, PRL(2020)]

- このTCPでの臨界現象は非対称($\gamma' \neq \gamma, \nu' \neq \nu$)
→ 既知のuniversality classではない?

- $J \neq 0$ でinverse symmetry breakingを示す [松本・中村, 2021]

用いた微視的理論

空間3次元

- 相互作用する多数の粒子で構成された**熱浴**
(温度 T 、自由度 $N_c^2 - 1$) 「phononで構成された**熱浴**」

$SU(N_c)$ $\mathcal{N} = 4$ 超対称Yang-Mills理論
at $N_c \gg 1$ with $\lambda = g_{\text{YM}}^2 N_c \gg 1$ (強結合)、温度 T

「Large- N_c 」理論



相互作用

ここに**外場**をかける

- 相互作用する多数の荷電粒子で構成された**着目系**
(自由度 N_c 、全体としては中性) 「電子・正孔で構成された**着目系**」

$SU(N_c)$ $\mathcal{N} = 2$ hypermultiplet: massless Dirac fermions $(q_R, q_L)^T$
(and bosonic superpartners) at $N_c \gg 1$ with $\lambda = g_{\text{YM}}^2 N_c \gg 1$

熱浴に結合した 3d massless **Dirac電子系** に類似の系

この系がもつ対称性

Chiral 対称性

外場なしの基底状態では、この系は

U(1) chiral 変換: $q_R \rightarrow q_R e^{i\alpha}$, $q_L \rightarrow q_L e^{-i\alpha}$
のもとで対称。

磁場の印加で(低温領域では) chiral 対称性が破れる。

(Magnetic Catalysis)

$$B \perp J \parallel E$$

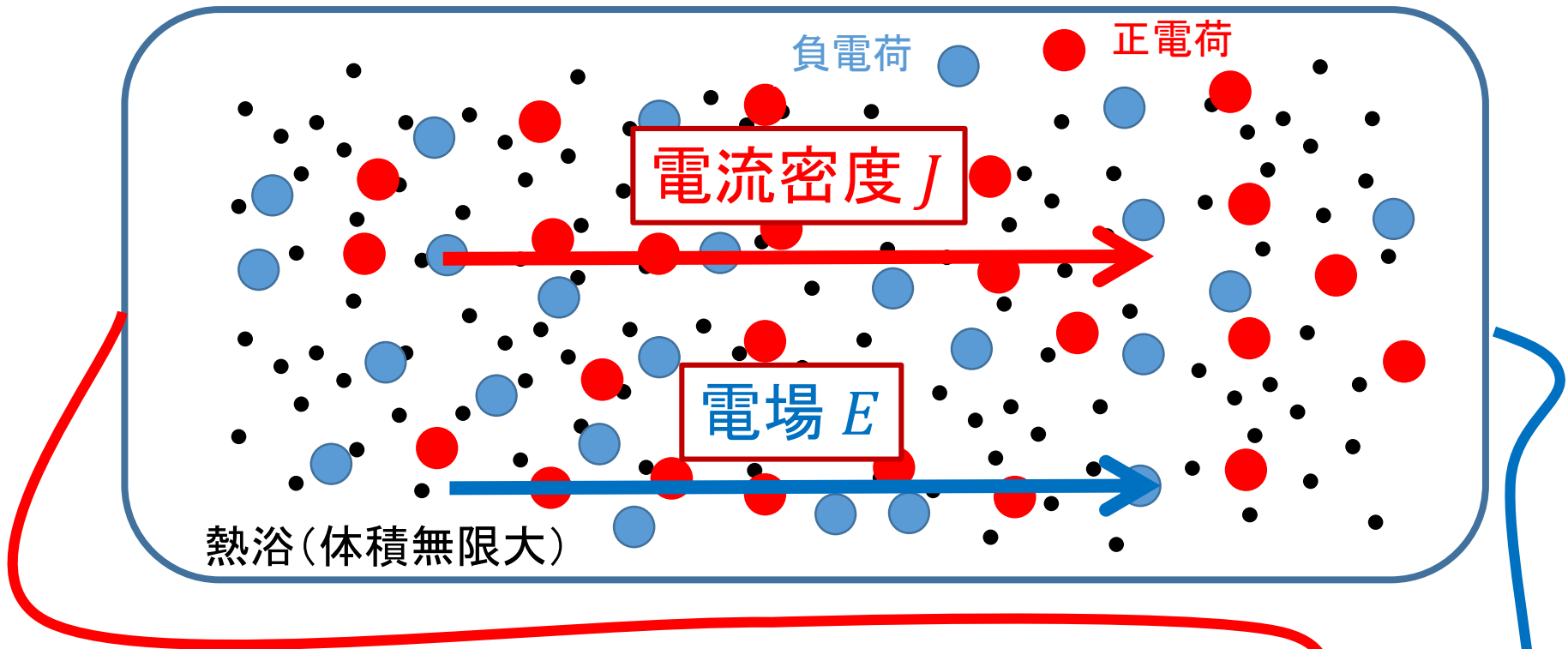
[Babington, Erdmenger, Evans, Guralnik and Kirsch, 2008]

Chiral 対称性の自発的な破れ(1次相転移)

秩序変数: $\langle \bar{q}q = \bar{q}_R q_L + \bar{q}_L q_R \rangle$ (chiral 凝縮)

→ 電流の存在によりどのように変化するか見てみよう。

Setup



- 相互作用する多数の粒子で構成された熱浴 (温度 T) 自由度 $O(N_c^2)$

- 相互作用する多数の荷電粒子で構成された着目系 (全体としては中性) 自由度 $O(N_c)$

$$N_c \rightarrow \infty$$

解析手法: ゲージ・重力対応 (AdS/CFT対応)

[Maldacena (1998)]

微視的理論としてある特別な量子ゲージ理論を選ぶと、
その理論は
ある特別な高次元の曲がった時空中の古典重力理論と
「数学的に」(物理的に)等価である。

物理量の期待値を重力の枠組みで計算することができる。

例 Hawking: 「ブラックホールには温度がある」

ある特別なブラックホール時空(温度 T)

ゲージ・重力対応



本当に多体系としての温度

ある特別な量子ゲージ理論の多体系(温度 T)

- 背景を非平衡(定常)状態に設定することもできる。

微視的理論(場の理論)

N=4 SYM

+ N=2 hypermultiplet

重力側の理論

D3-D7 model

[Karch, Katz (2006)]

熱浴

(4+1)次元AdS時空中の
Schwarzschild ブラックホール ($\times S^5$)

↑
「吸熱」

着目系

上記の時空中に存在する
D7-brane (膜状の物体)

ここに外場をかける

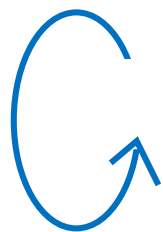
高次元ブラックホール時空中の膜状の物体(D7-brane)の古典力学を解くことで、解析ができる。

直観的描像

我々の空間方向は
紙面に垂直方向

熱浴(温度 T)

高次元の回転対称性が
自発的に破れる



Black
Hole

$J \cdot E$ 散逸

E B 等の外場

着目系: D-brane (D7-brane)

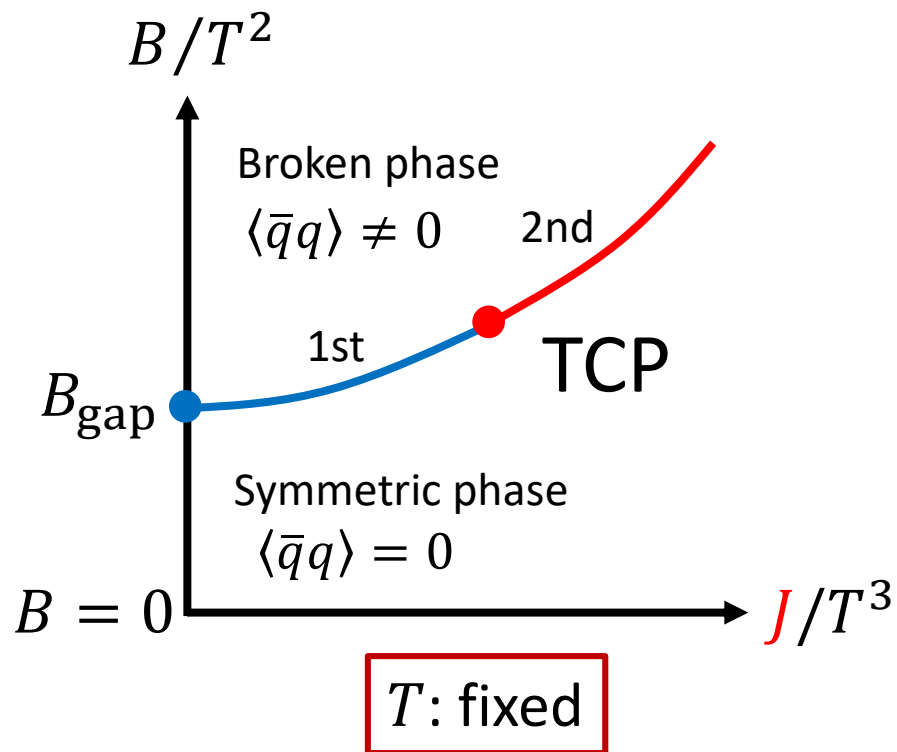
内部対称性を
表わす
余剰次元方向

エネルギースケールを表わす余剰次元

全体の時空 9+1 次元: (4+1)d AdS-Schwarzschild ブラックホール $\times S^5$

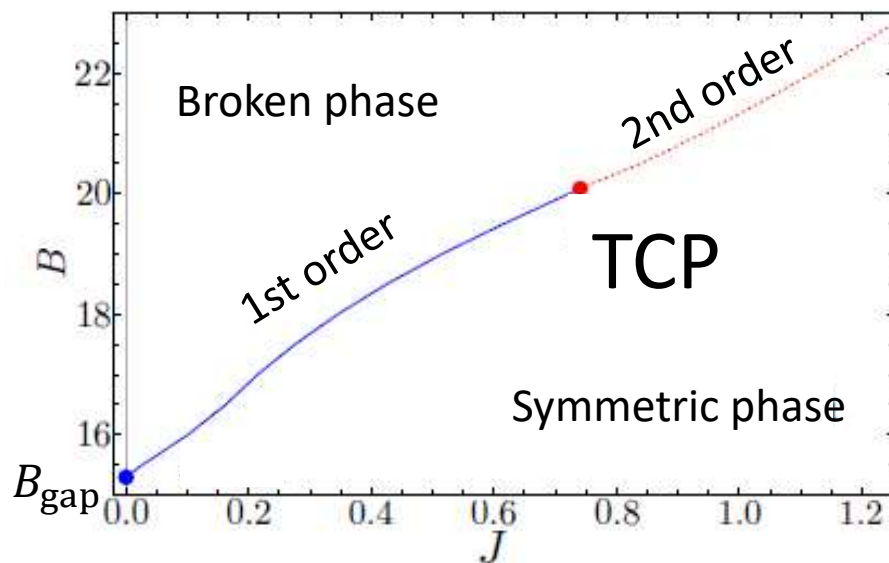
結果

電流による転移点の変化



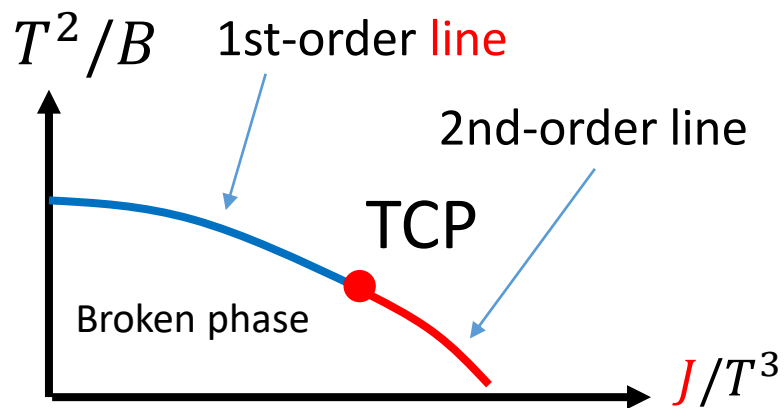
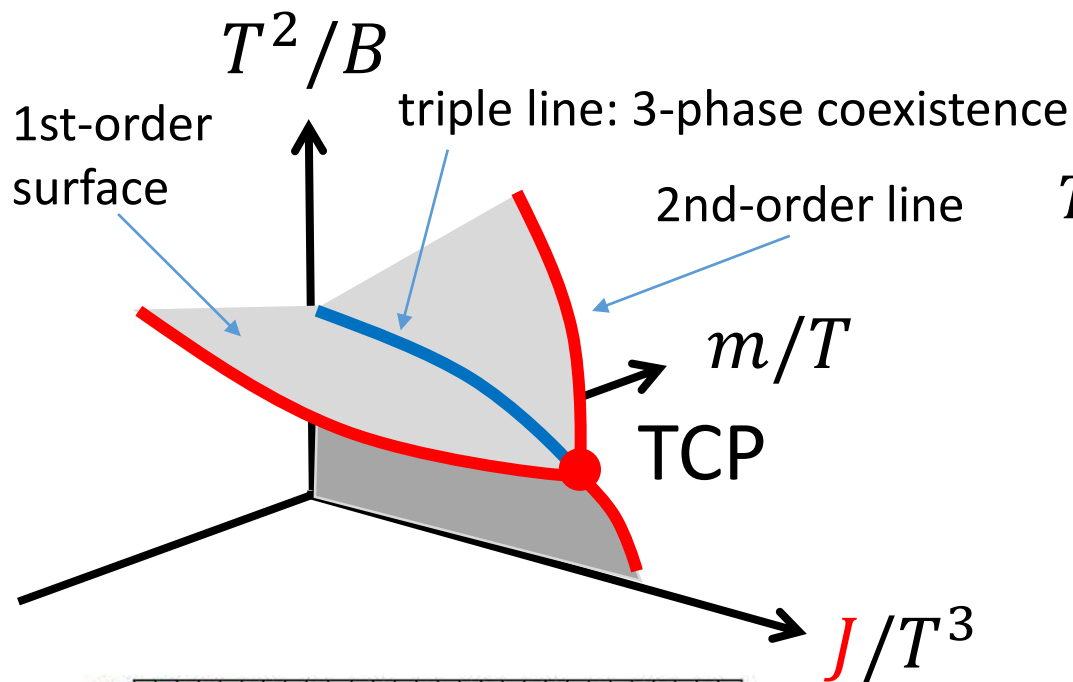
電流により、新奇的な
非平衡3重臨界点(TCP)
が発現する。

電流の存在により
orderが破壊され、
対称性が回復する。

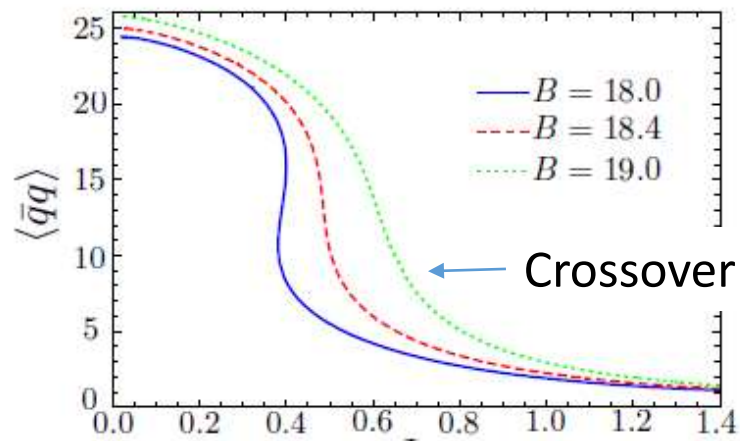


非平衡三重臨界點

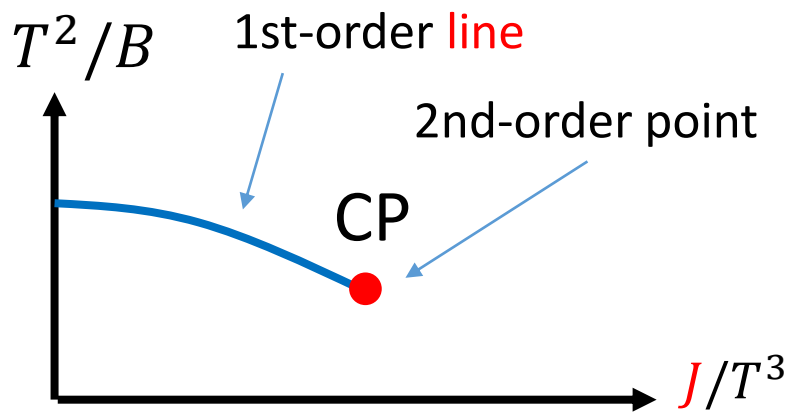
m : 荷電粒子質量 (gap)



When $m = 0$



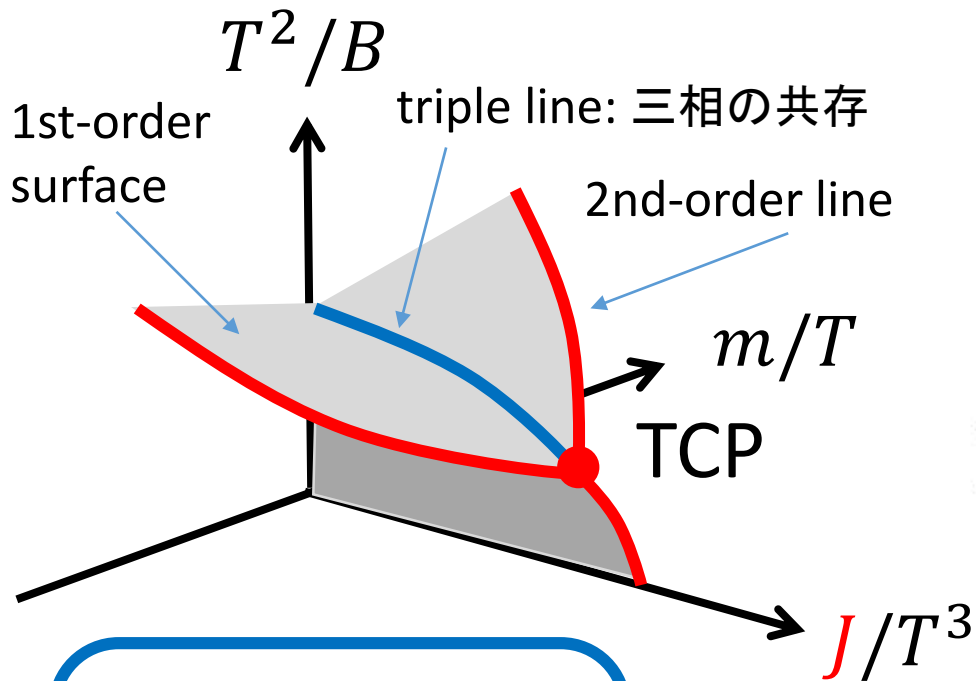
$m = 0.01$



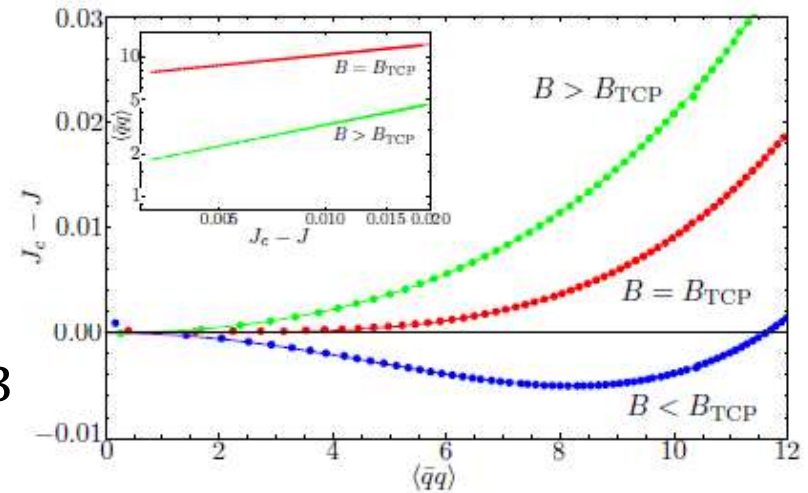
When $m \neq 0$

臨界指数

J を用いよう: $\langle \bar{q}q \rangle \propto (J_c - J)^\beta$



- なぜ平均場の値？
- $N_c \rightarrow \infty$
 - 三重臨界点での上部臨界次元=3



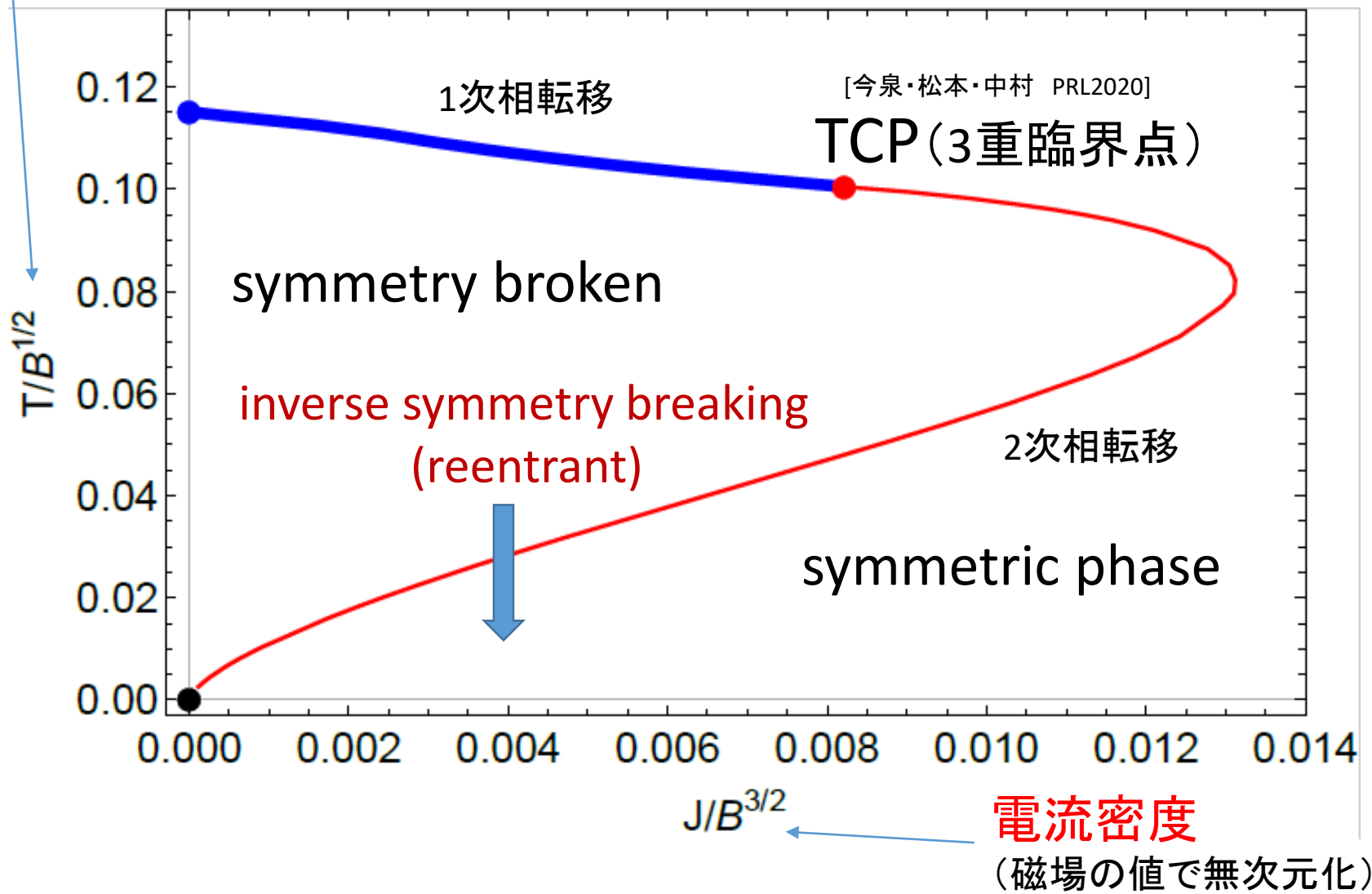
平衡系の
Landau理論では
 $\beta = 1/2$ at CP
 $\beta = 1/4$ at TCP

$\beta = 0.4993 \approx 1/2$ at CP
 $\beta = 0.2503 \approx 1/4$ at TCP

着目系が接する
熱浴の温度
(磁場の値で無次元化)

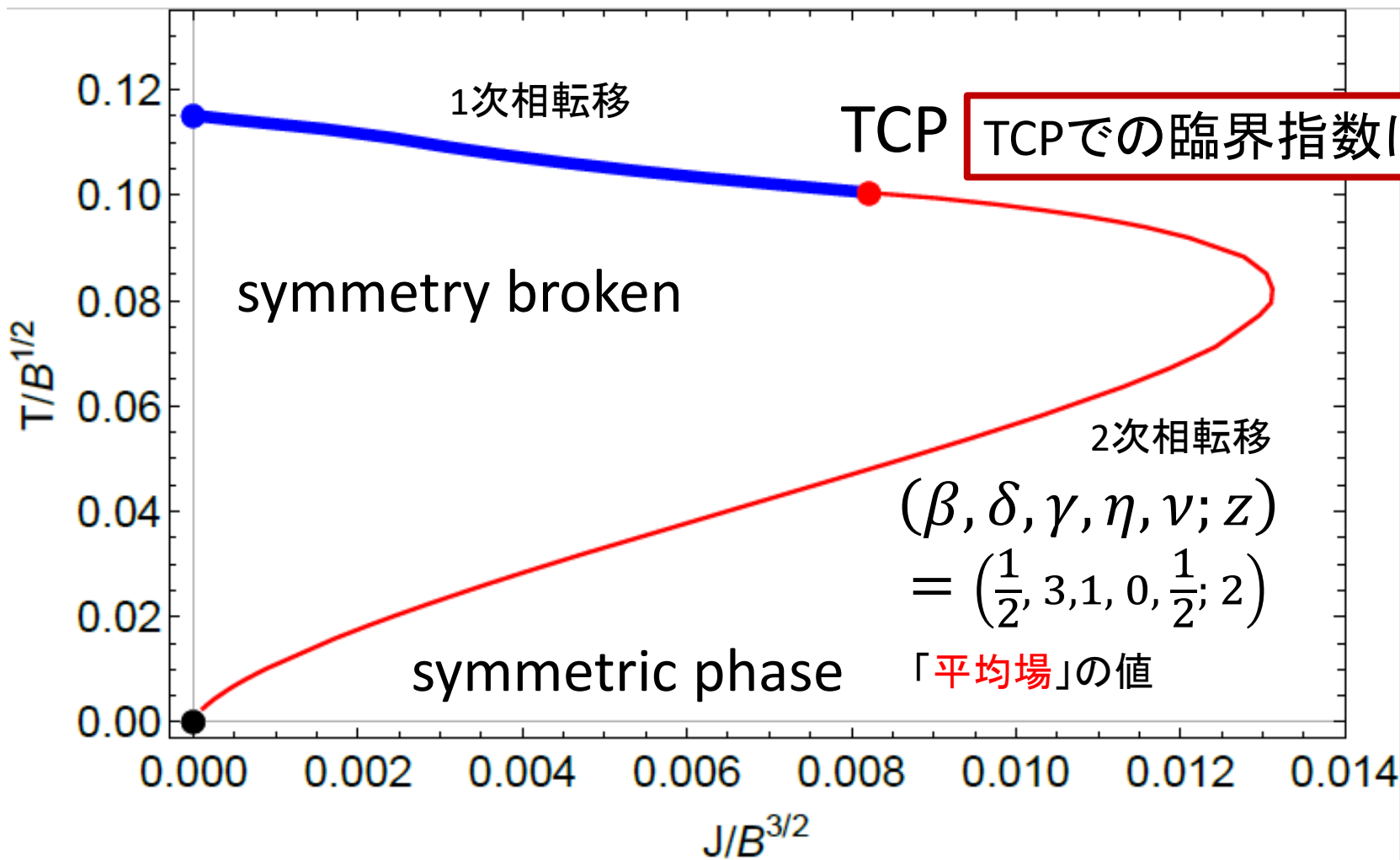
相図

電流の存在で
対称性が回復する

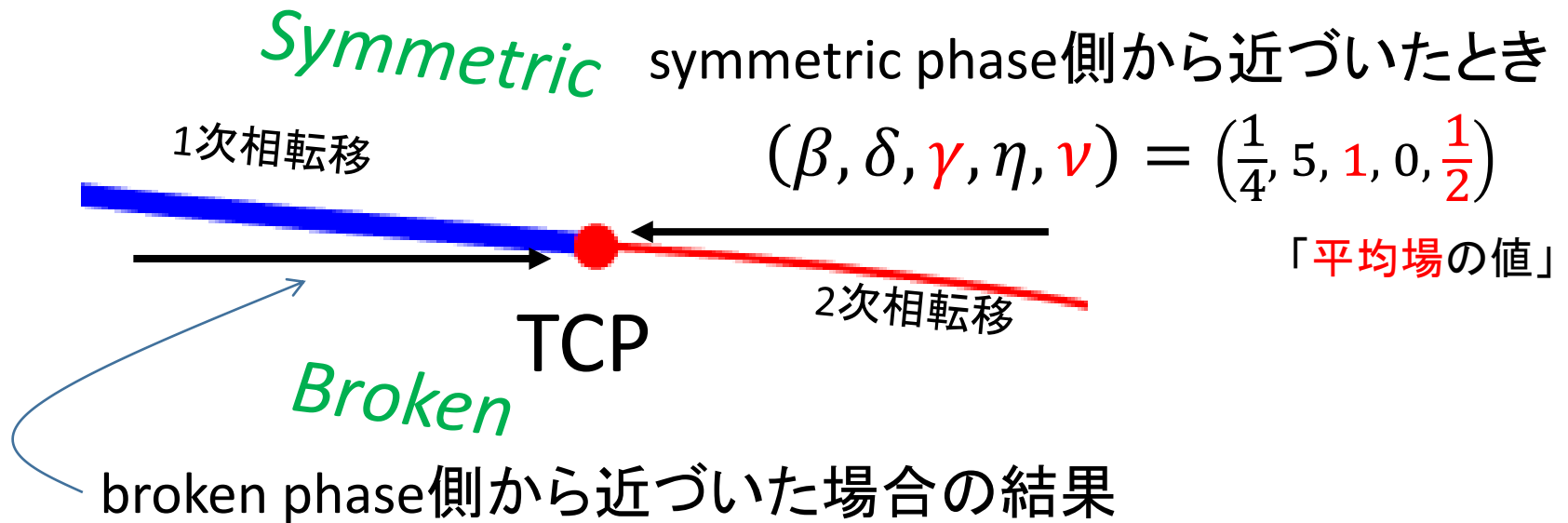


臨界指数

$(T - T_c)/T_c$ の代わりに $(J - J_c)/J_c$ を用いて定義



TCPにおける臨界指数



$$(\beta, \delta, \gamma, \eta, \nu) = \left(\frac{1}{4}, 5, 0.58, 0, 0.29\right)$$

γ, ν について、異なる値が得られた。

※ α については今回は議論していない。

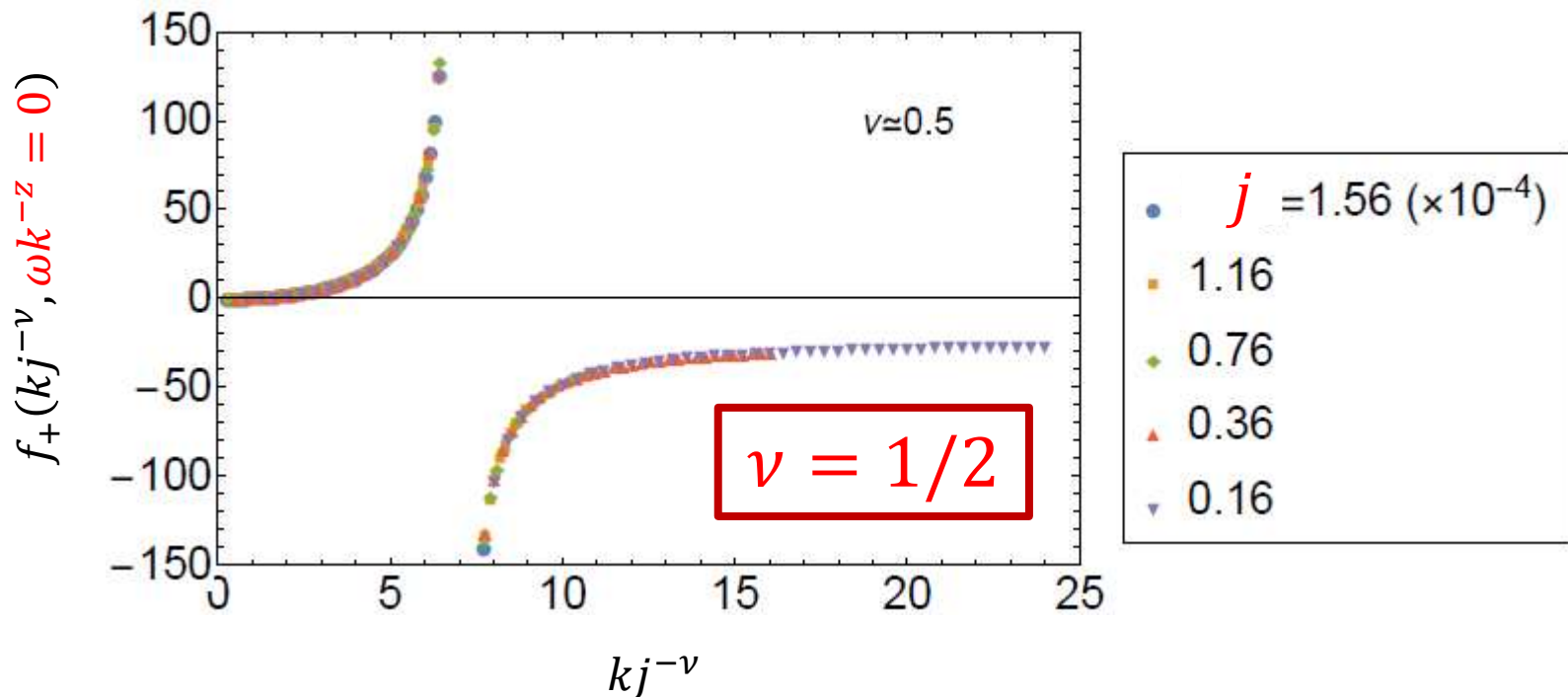
Symmetric phase 側

秩序変数の2点遅延グリーン関数

$$G^R(\omega, k; j) \sim |k|^{-2+\eta} f_+(kj^{-\nu}, \omega k^{-z})$$

$$j = (J - J_c)/J_c$$

TCP直上のstaticな解析から $\eta = 0$.



Symmetric phase からTCPに近づいた場合

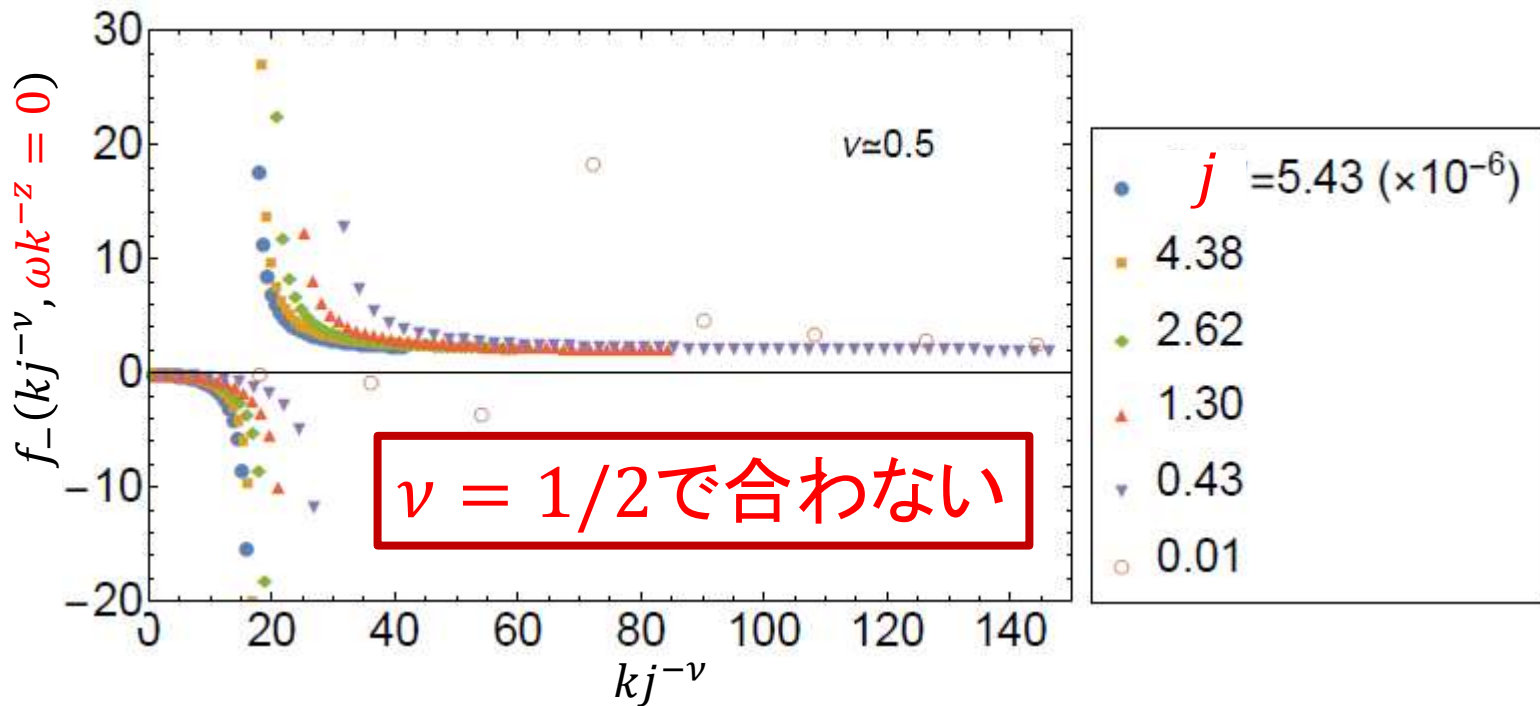
Broken phase 側

秩序変数の2点遅延グリーン関数

$$G^R(\omega, k; j) \sim |k|^{-2+\eta} f_-(kj^{-\nu}, \omega k^{-z})$$

$$j = (J - J_c)/J_c$$

TCP直上のstaticな解析から $\eta = 0$.



Broken phase 側からTCPに近づいた場合

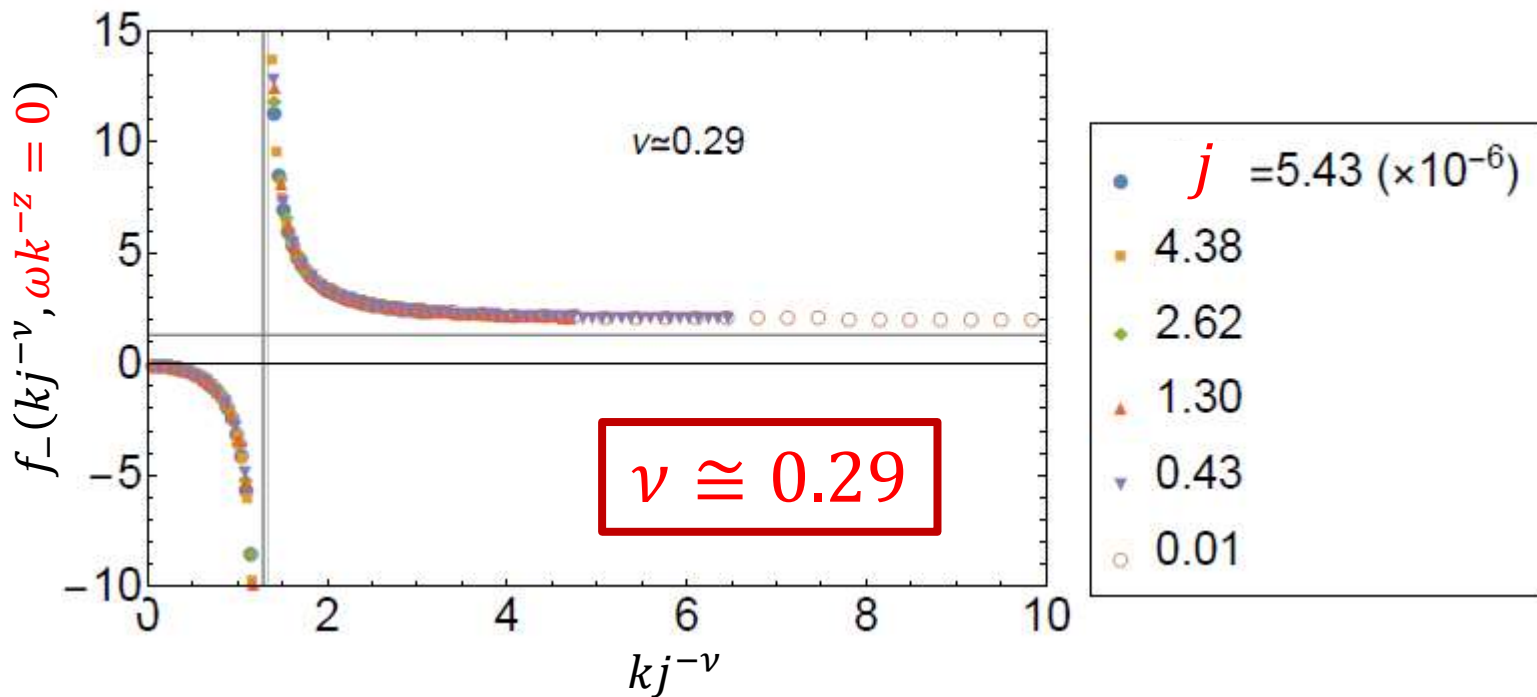
Broken phase 側

秩序変数の2点遅延グリーン関数

$$G^R(\omega, k; j) \sim |k|^{-2+\eta} f_-(kj^{-\nu}, \omega k^{-z})$$

$$j = (J - J_c)/J_c$$

TCP直上のstaticな解析から $\eta = 0$.



Broken phase 側からTCPに近づいた場合

既存のscaling則との比較

Rushbrooke: $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$

Griffiths: $\beta(1 + \delta) = 2 - \alpha$

Fisher: $\nu(2 - \eta) = \gamma$

Josephson: $\nu d = 2 - \alpha$

■ TCP: symmetric phase 側: $(\beta, \delta, \gamma, \eta, \nu) = \left(\frac{1}{4}, 5, 1, 0, \frac{1}{2}\right)$

($d = 3$ とすれば) 全て満たす。

■ TCP: broken phase 側: $(\beta, \delta, \gamma, \eta, \nu) = \left(\frac{1}{4}, 5, 0.58, 0, 0.29\right)$

Fisher: $\nu(2 - \eta) = \gamma$: 満たす

Rushbrooke + Griffiths : $\gamma = \beta(\delta - 1)$: 満たさない

既存のscaling則を満たす形で
 α を設定することができない。

まとめ

- 系 : $N=4$ SYM + $N=2$ HM (3d Dirac半金属に類似の系)
- 現象: 定常電流 J 存在下のchiral対称性の破れの相転移
- 手法: AdS/CFT対応(D3-D7系)
- 定常電流 J は、この系の対称性を回復させる方向に作用することが判明した。
- $J \neq 0$ のNESSにて発現する新奇な三重臨界点(TCP)を発見した。
- この三重臨界点(TCP)における臨界指数を J に対する秩序変数のスケーリングから定義したところ、broken phase側とsymmetric phase側で、 γ 、 ν について不一致が見られた。

今後検討が必要な項目

- 有効温度を用いた解析
- (非平衡定常状態に対して) α を定義する試み
- Large- N_c 、 $d=3$ (平衡系TCPの上部臨界次元) にも
かかわらず、なぜ平均場の値とならない？
- なぜ非対称となる？
- 新しいuniversality class?
- 電流誘起のinverse symmetry breaking (reentrant):
フラストレートした系との関係？
- 同じ微視的理論で $J = 0$ でTCPが現れる設定
との比較

[Evans et al. JHEP 09 (2009) 021]

20世紀の物理学

光電効果

Einstein 1905

ブラウン運動

相対性理論

これらは全く**独立な**理論に見えた。

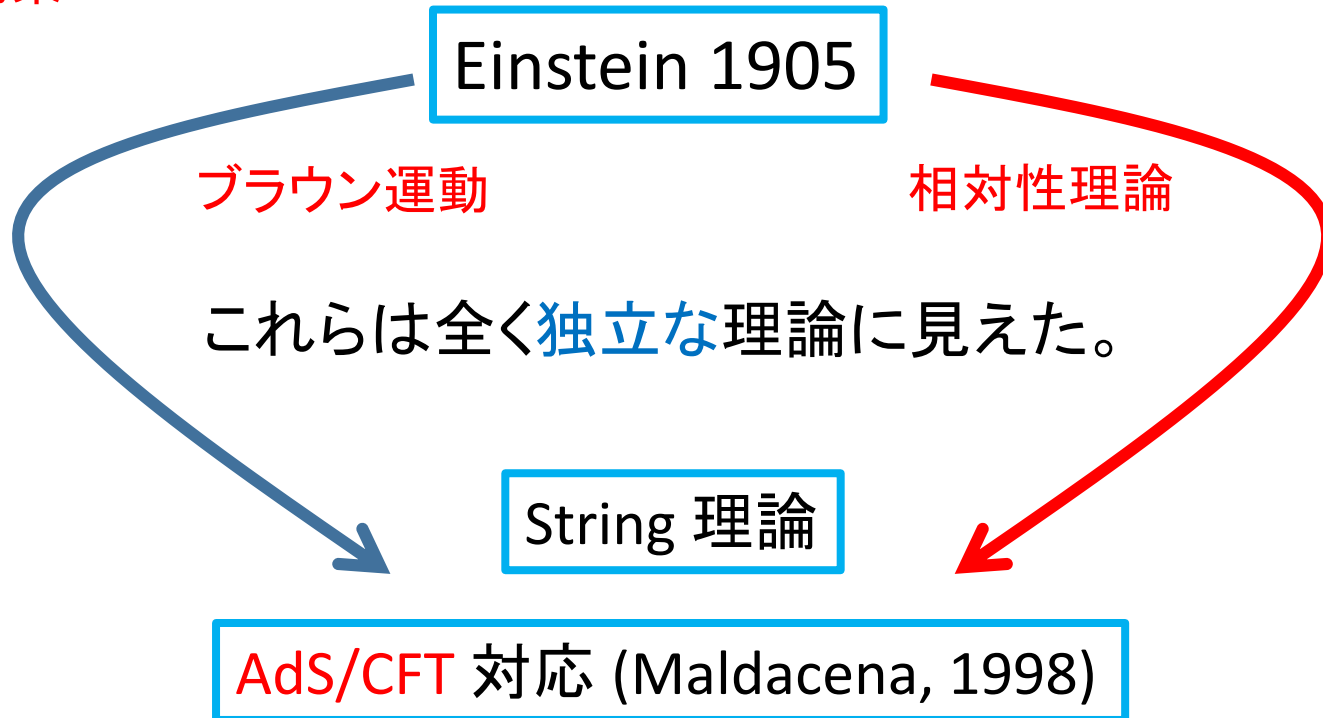
String 理論

AdS/CFT 対応 (Maldacena, 1998)

100年が経過してみると、これらの間に
予想外の関係性が見えてきた。

21世紀の物理学

光電効果

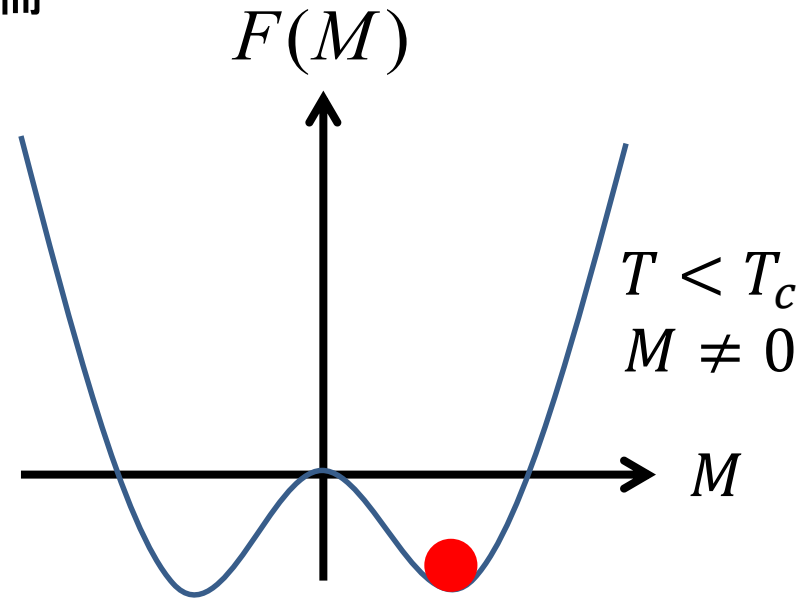
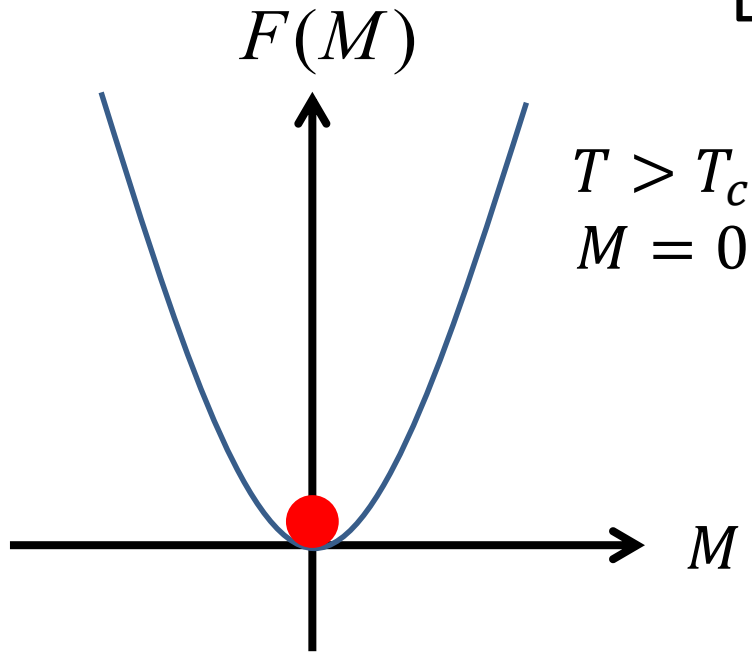


既存の分野を超えた共同研究から
新たな物理が生まれるのではないか。

Appendix
臨界現象について

平衡系の2次相転移

Landau理論



Landauの擬自由エネルギー

$$F(M) = F_0 + aM^2 + bM^4 - HM$$

M : 秩序変数(磁化) H : 磁場

$$a = k(T - T_c)$$

臨界現象と臨界指数

臨界点近傍での**秩序変数** (磁化) の振る舞い

$H = 0$ ($= H_c$) において

$$M \propto (T_c - T)^\beta \quad \beta = \frac{1}{2} \quad (\text{Landau理論})$$

$$\because 0 = \frac{\partial F}{\partial M} = 2aM + 4bM^3, \quad M = \sqrt{-\frac{a}{2b}} = \sqrt{\frac{k(T_c - T)}{2b}}$$

$T = T_c$ において ($a = 0$)

$$M \propto |H - H_c|^{1/\delta} \quad \delta = 3 \quad (\text{Landau理論})$$

$$\because 0 = \frac{\partial F}{\partial M} = 2aM + 4bM^3 - H, \quad M = \left(\frac{H}{4b}\right)^{1/3}$$

臨界現象と臨界指数

臨界点近傍での感受率の振る舞い

感受率 χ

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H}$$

臨界振幅

$$\chi = A \left| \frac{T - T_c}{T_c} \right|^{-\gamma} \quad \gamma = 1 \quad (\text{Landau理論})$$

∴

$$0 = \frac{\partial F}{\partial M} = 2aM + 4bM^3 - H \quad \chi_{M=0} = \frac{1}{2a} = \frac{1}{2k(T - T_c)}$$

$$T > T_c (M = 0) : \quad \chi_{M=0} = \frac{1}{2a} = \frac{1}{2k(T - T_c)}$$

$$T < T_c (M \neq 0) : \quad \chi_{M \neq 0} = \frac{1}{2a + 12b(-a/2b)} = \frac{1}{4k(T_c - T)}$$

$$\text{臨界振幅比:} \quad \chi_{M=0} / \chi_{M \neq 0} = 2$$

臨界現象と臨界指数

臨界点近傍での比熱の振る舞い

比熱 $C_v = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$

$$C_v \propto |T - T_c|^{-\alpha} \quad \alpha = 0 \quad (\text{Landau理論})$$

$$F(M) = F_0 + aM^2 + bM^4 = F_0 - \frac{k^2 (T - T_c)^2}{4b}$$

臨界現象と臨界指数

自由エネルギーから得られるもの

Landau理論

$$\alpha \quad C_v \propto |T - T_c|^{-\alpha} \quad \alpha = 0$$

$$\beta \quad M \propto |T - T_c|^\beta \quad \beta = \frac{1}{2}$$

$$\delta \quad M \propto |H - H_c|^{1/\delta} \quad \delta = 3$$

$$\gamma \quad \chi \propto |T - T_c|^{-\gamma} \quad \gamma = 1$$

臨界振幅比 $\chi_{M=0}/\chi_{M \neq 0} = 2$

臨界現象と臨界指数

相関関数から得られるもの

秩序変数の相関関数 $G(r) = \langle \delta M(r) \delta M(0) \rangle$

$$G(r) \propto \frac{e^{-r/\xi}}{r^{d-2+\eta}}$$

$$\text{相関長 } \xi \propto |T - T_c|^{-\nu}$$

平均場理論 (Landau理論) の2次相転移では

$$\eta = 0, \nu = 1/2$$

動的臨界指数: 秩序変数の緩和時間 $\tau \propto \xi^z$