

電子の磁石としての強さを決めて、 物理法則を検証する

仁尾 真紀子 (理研)

2023年11月17日

東京女子大学素粒子論研究室セミナー

based on the QED collaboration
w/ 青山龍美(東大)、早川雅司(名古屋大)、
late 木下東一郎(Cornell U, UMass Amherst)

じーまいなすつー

Muon g-2 実験のニュース

➤ 2001/02/09 New York Times

Muon g-2 ブルックヘブン国立研究所(BNL)の測定結果発表

[Tiniest of Particles Pokes Big Hole in Physics Theory](#)

最小粒子が物理理論に巨大な穴を穿つ

➤ 2021/04/07 New York Times

Muon g-2 フェルミ国立研究所(Fermilab)の測定結果発表

[A Tiny Particle's Wobble Could Upend the Known Laws of Physics](#)

微粒子の振動が既知の物理法則をひっくり返すかも？

➤ 2023/08/10 New York Times

Muon g-2 フェルミ国立研究所(Fermilab)の測定結果発表

[Physicists Move One Step Closer to a Theoretical Showdown](#)

物理屋、理論的対立に一步近づく

日本では、マイナビニュースのみ？ ほぼ報道なし

Hot news!

ミューオンへの宇宙実験2021

ニュース > 科学・IT

「ミュー粒子」が素粒子物理学の予測外れる性質示す... 未知の素粒子存在が影響か

朝日新聞
DIGITAL

素粒子特

有料会員記 2021/04/12 19:50

石倉徹也 2



物質を構成する素
論」の予測を外れる

News

ニューストップ | 動物 | 古代 | 環境 | 旅&文化 | 宇宙&科学 | 動画 | 雑誌

宇宙&科学

素粒子物理学を覆すミューオンの挙動、未知の物理



379



72



メール



コピー

2021.05.04 #科学

物理学界に衝撃…「宇宙の秘密」を解くかもしれない「ノーベル賞級大発見」の中身

物理界の根幹を揺るがす「大発見」



佐藤 瑤 物理学者

プロフィール



マネー現代

物理界の根幹を揺るがす「大発見」

、米フェルミ研究所

ツイート

いいね! 1,154

B!



NATIONAL GEOGRAPHIC



0年前に別の米研究所での実

今日の目標

- Muon g-2 実験を行う意義を理解する
- Muon g-2 実験の原理を理解する
- Muon g-2 の理論計算がどのようなものかを知る
- ついでに、Muonのそっくりさん電子についても

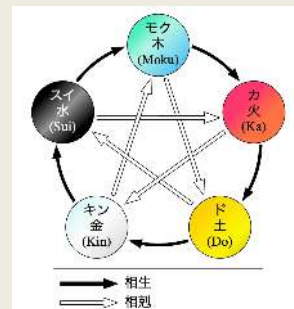
「物」は何からできているか？

人類が知性を持って以来の、根源的な問い

- ギリシア哲学(紀元前4世紀~18,19世紀)
アリストテレスの4元素 土・水・空気・火
- 中国 (紀元前7世紀頃)
五行思想 土・金・水・木・火



© Marie-Lan Nguyen
/ Wikimedia Commons



Wikipedia 五行思想

素粒子の標準模型

+ 一般相対論

現在の物理学の到達点

- 何からできているか=matter

クォーク と レプトン

- どう組み合わせるか=force

- 電磁気力 光子
- 弱い力 Z, W[±] ボソン

¹³⁷Cs(セシウム) のβ崩壊

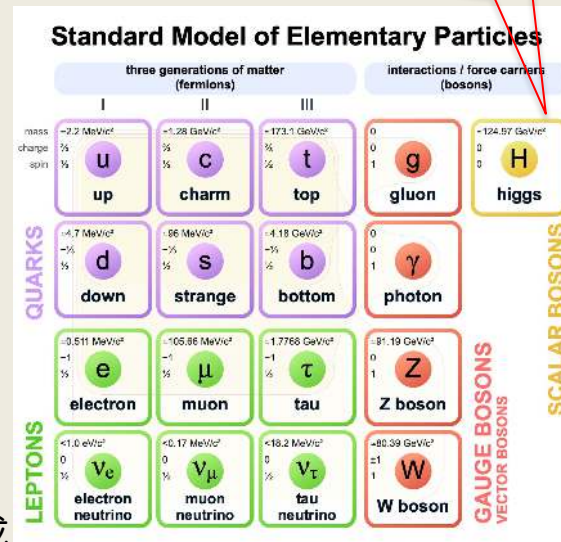
- 強い力 グルーオン

クォークからハドロン(pとかnとか) を形成

あれ、重力は？

一般相対論 (時間と空間の幾何学)

2012年
発見



<https://ja.wikipedia.org/wiki/標準模型> より

標準模型(SM)は究極に正しいか？

多くの「なぜ？」に答えられない

- なぜ世代数は3？
- なぜ世代毎の素粒子の質量に $O(10^2)$ の差がある？
- なぜ18個ものパラメタがある？ (19個という人もいます。)
- なぜ世代間混合はクォークだけ？レプトンは？

小林-益川行列

ニュートリノ振動

- なぜゲージ群は $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ？ SMのみ

-
- 重力の量子論はどうなる？ 重力

宇宙の誕生時の記述には必ず必要ははず

- 暗黒物質、暗黒エネルギーの正体は？

Beyond the Standard Model

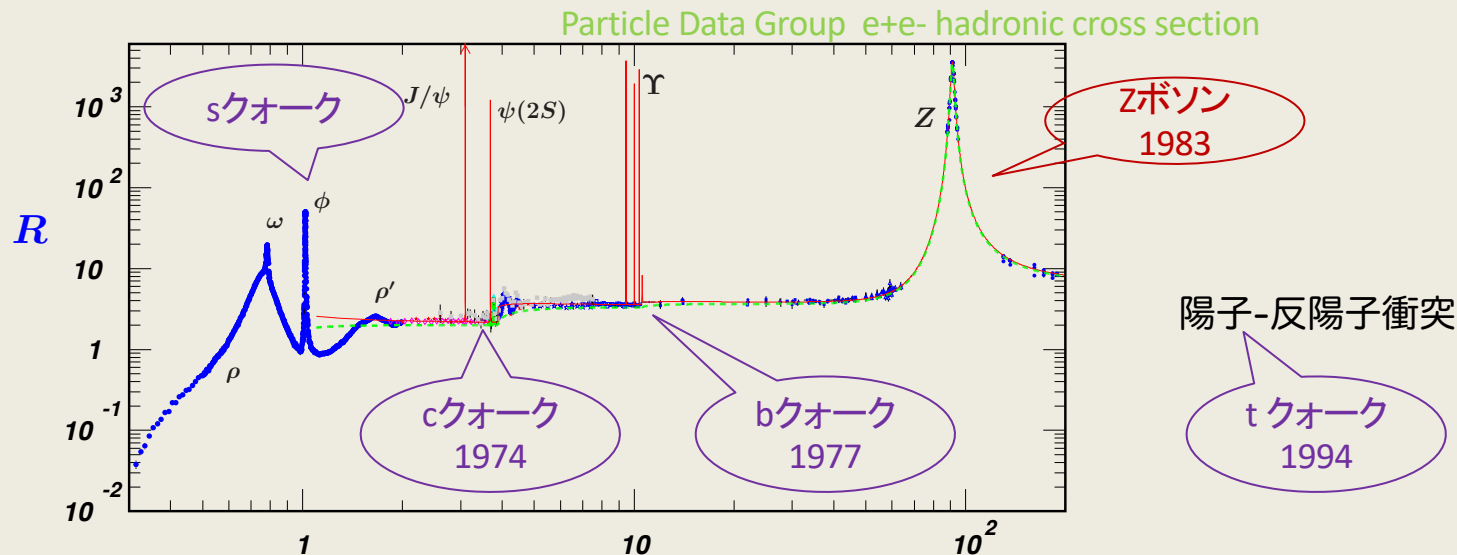
標準模型を超える新物理 (BSM)がある! 多数派意見

でも、それ(BSM)何? 候補の理論、いろいろ



BSMの兆候を捉えるには？

加速器実験 CERN LHC 2012年ヒッグス発見まで
電子-陽電子(陽子)衝突 → クォーク



1973年頃にはSMは理論として完成 \sqrt{s} [GeV]

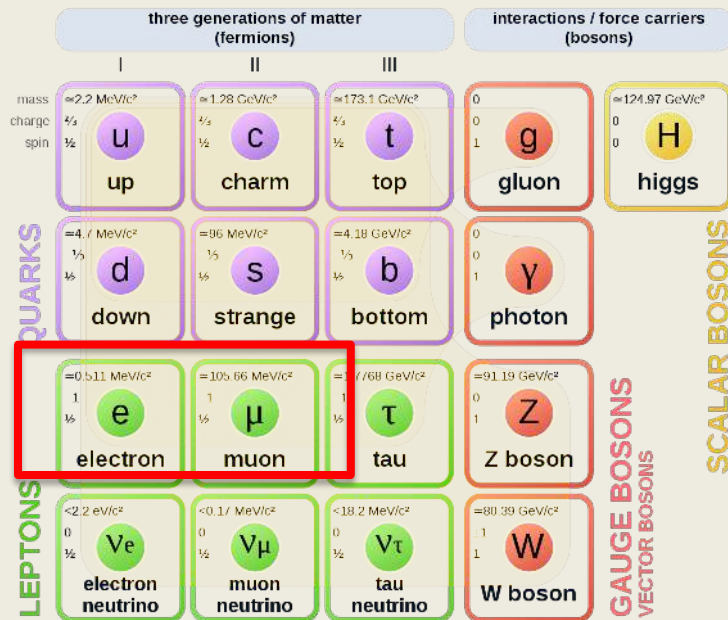
新粒子(=BSM)を直接に発見できる v.s. 高エネルギーになると建設(の費用)が大変

荷電レプトン

単一粒子として観測可能な荷電素粒子は、3種類のみ

electron	0.5 MeV
muon	105.7 MeV
tau	1776.9 MeV

Standard Model of Elementary Particles



素粒子なので、内部構造の複雑さを考えなくて良い

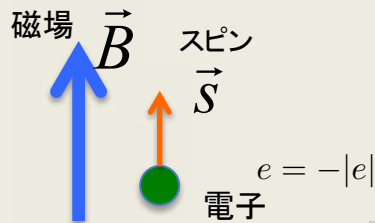
- 陽子 (“ふわふわ”している 陽子荷電半径の謎)
- LHC P+ P+ 散乱実験 観測データの精度に限界

荷電粒子なので、電磁場を使った多様な実験が可能

- e+e- 散乱実験、水素原子のエネルギー準位

非加速器実験

電子g-2



ゼーマン効果:磁場中原子(Ga, Na)の スペクトルの分裂
これを詳細に測った

P. Kusch and H. M. Foley, 1948
P. Kusch Nobel Prize 1955



$$H = -\vec{\mu}_e \cdot \vec{B}$$

$$\vec{\mu}_e = g_e \frac{e\hbar}{2m_e} \frac{\vec{s}}{\hbar} + \text{軌道角運動量の寄与}$$

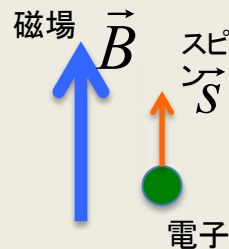
軌道角運動量からのランデg因子の寄与 $g_L = 1$ を仮定

$$g_s = 2(1.00119 \pm 0.00005) \equiv g_e$$

g因子は単位のない無次元の数

これはDirac相対論的量子力学の $g_s = 2$ からずれる

g-2 $\neq 0$ の意味すること



単一電子の磁気能率 g因子の2からの **0.1%** のずれ

g=1 Maxwell 古典電磁気学

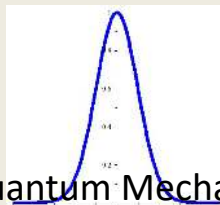
g=2 Dirac 相対論的量子力学からの結論

g-2 $\neq 0$ 電子や光子の真空の揺らぎの証拠

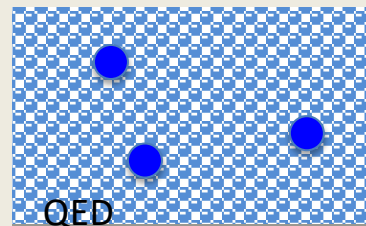
電子が何であるか、「物とは何か」の概念を一新



Classical physics
point particle



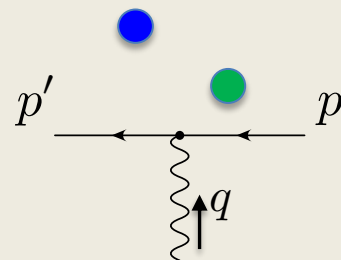
Quantum Mechanics
wave packet



QED
field excitation

Quantum electrodynamics = **量子場**理論としての電磁気学

QEDでの1光子による散乱振幅



真空の揺らぎの効果を考慮すると
C, P, T に不変な振幅の形はこれだけ

$$i\mathcal{M} = -ie\bar{u}(p') \left[\gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_2(q^2) \right] u(p) \tilde{A}_\mu^{\text{cl}}(q)$$

$F_1(q^2), F_2(q^2)$ Form Factor

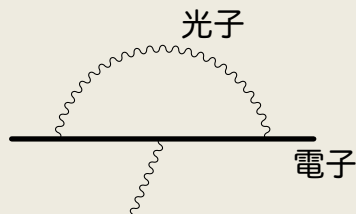
$$= -ie\bar{u}(p') \left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} (F_1(q^2) + F_2(q^2)) \right] u(p) \tilde{A}_\mu^{\text{cl}}(q)$$

$q^2 \rightarrow 0$ $F_1(0) = 1$ 電荷 e が実際の観測量である基本電荷に等しい

On-shell くりこみ条件

$$F_2(0) = \frac{g_l - 2}{2} \equiv a_l$$

QEDによるg-2の計算



定量的な説明は可能か？

- Feynman Diagramによる摂動計算
- ループ計算だが、g-2に寄与する部分は発散がないので簡単に計算できる



Nobel Prize 1965

J. Schwinger 1948

$$\text{expt. : } \frac{g_e - 2}{2} = 0.001\,19\, (5)$$

$$\text{theory : } \frac{g_e - 2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} = 0.001\,161\, \dots$$

QEDの発見

QEDの結合定数 微細構造定数

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.035\,99\dots}$$

e 基本電荷 厳密定義値

$\hbar = h/2\pi$ プランク定数 厳密定義値

c 真空中の光速 厳密定義値

ϵ_0 真空の誘電率 (new SI since May 2019)

Fermilab Muon g-2 実験

$$= -ie\bar{u}(p') \left[\frac{p'^{\mu} + p^{\mu}}{2m} F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_{\nu}}{2m} (F_1(q^2) + F_2(q^2)) \right] u(p) \tilde{A}_{\mu}^{\text{cl}}(q)$$

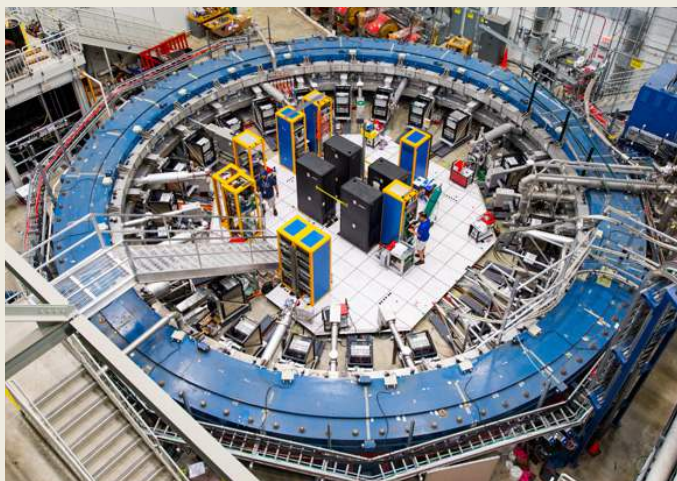
磁場中のミューオンのサイクロトロン運動

ミューオンのスピンの歳差運動

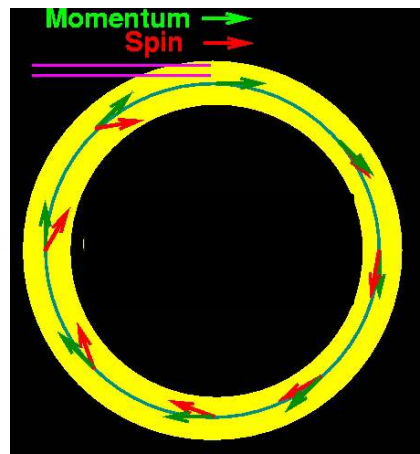
この周波数の差がg-2に比例、gではなくg-2を測定

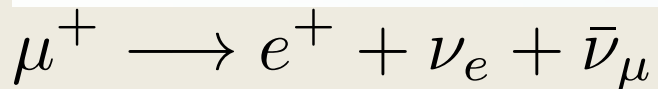
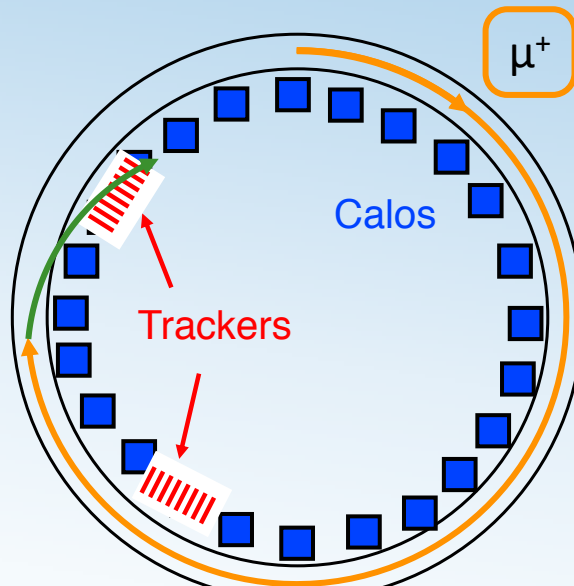
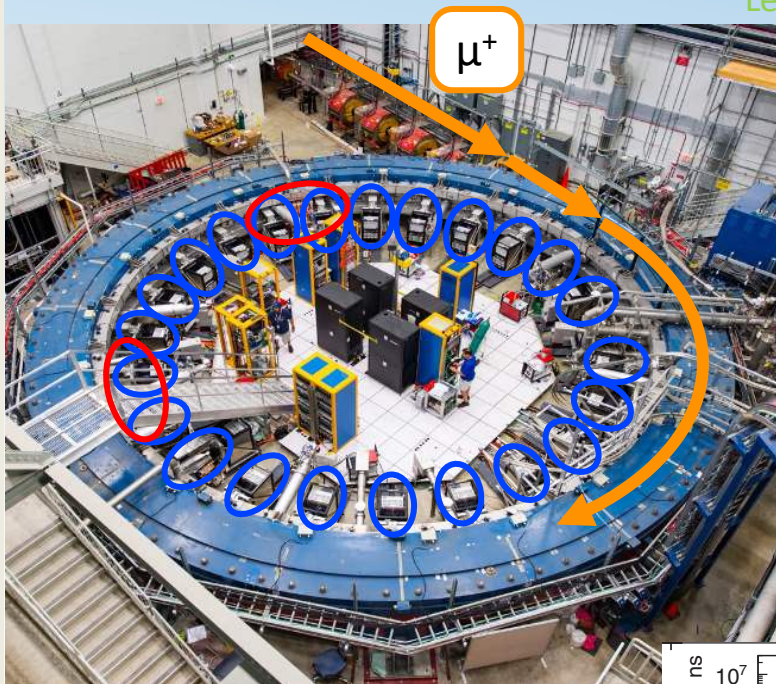
$$\omega_c = eB/(m_{\mu}c)$$

$$\omega_s = (g/2) \times eB/(m_{\mu}c)$$

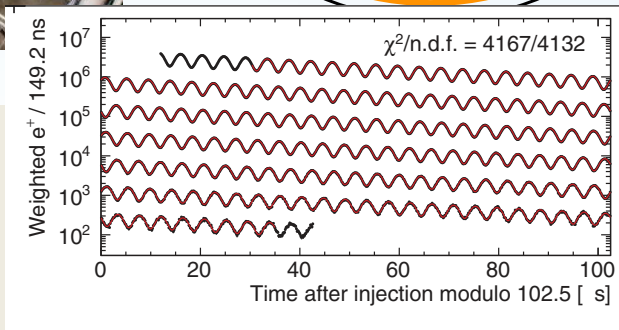


直径 ~14m





ミューオンのスピンの方向に陽電子が放出される



BMT 方程式

電気双極子能率のある場合

SMではほぼ0

$$\vec{\omega}_a = -\frac{e}{m_\mu} \left[a_\mu \vec{B} - \left(a_\mu - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \right) \frac{\vec{\beta} \times \vec{E}}{c} + \frac{\eta}{2} \left(\vec{\beta} \times \vec{B} + \frac{\vec{E}}{c} \right) \right]$$

$$a_\mu = 1/(\gamma^2 - 1), \quad \gamma = \sqrt{1 + 1/a_\mu} = 29.3 \dots$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad v/c = 0.999 \dots$$

CERN 1960年代

BNL (ブルックヘブン研究所 NY) 1980~2000頃

Fermilab (フェルミ研究所 IL) 2013~now

マジック γ 実験

$$\gamma = 29.3, \quad p = 3.1 \text{ GeV}/c$$

- 電場Eの影響をなくす
- 磁場Bを決めると、リング半径が決まる
1.45 T 7.11m
- 寿命 $64.4 \mu\text{s} \leftarrow 2.2 \mu\text{s}$

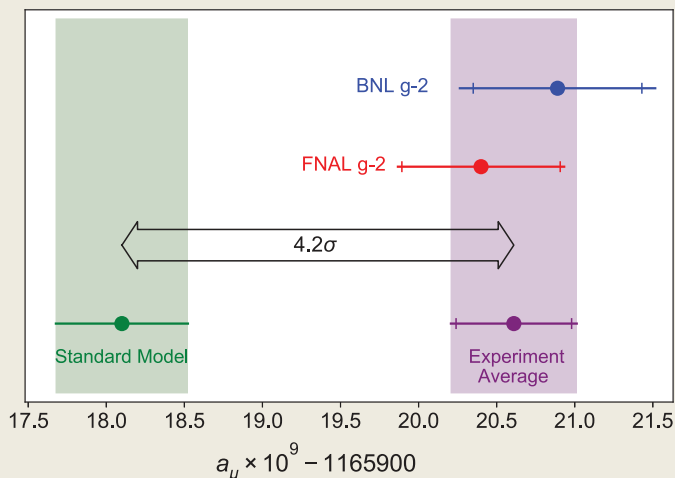


BNL からFermilab への
超伝導リングのお引越
The Big Move

Fermilab Run1 result 2021年発表

$$a_\mu \equiv (g_\mu - 2)/2$$

$$a_\mu(\text{FNAL}) = 116\,592\,040(54) \times 10^{-11} \quad (0.46\text{ppm})$$



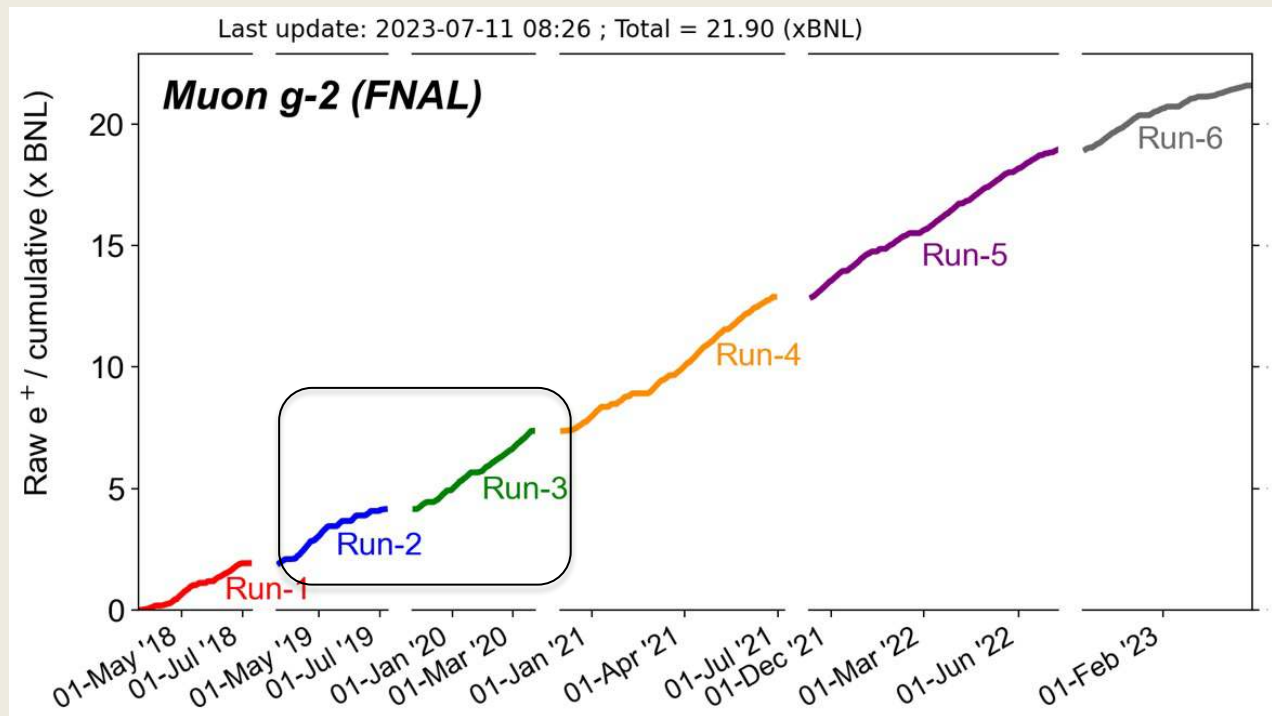
Phys. Rev. Lett. 126, 141801(2021)

- BNLの結果とほぼ同じ精度に到達
- BNLの結果と矛盾しない
- FNALと理論値の差は3.3 σ 偏差値だと83
- BNLと理論値の差は3.7 σ だった 偏差値だと87
- BNL+FNALの平均と理論値の差は 4.2 σ に拡大 偏差値だと92

5 σ (偏差値100)なら SMを超えた現象が見えていると言える

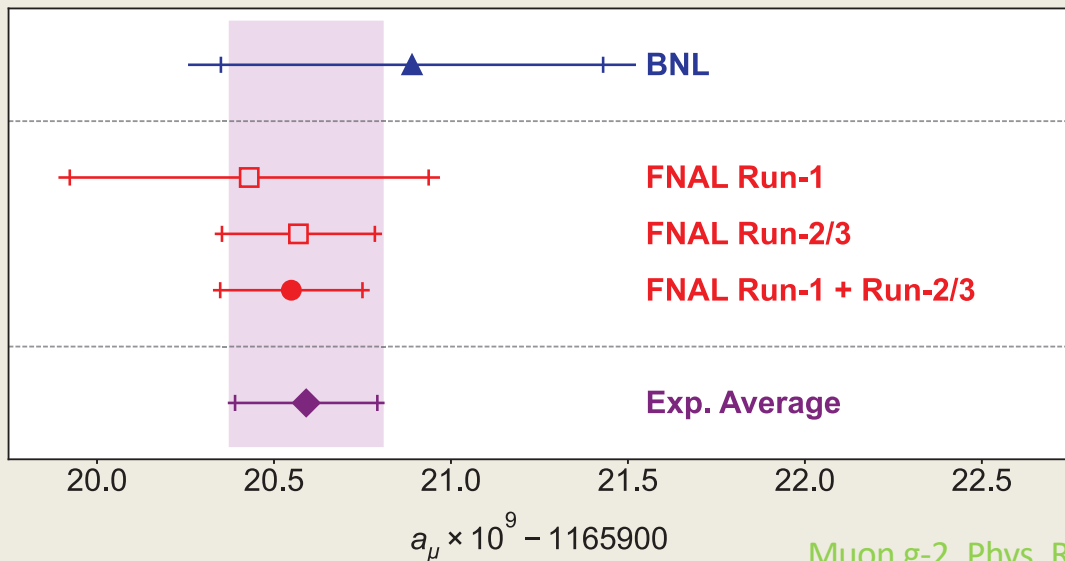
Fermilab 最終的には20 X BNL にデータ統計量を増やす
Run2(2019), Run3(2020), Run4(2021) \rightarrow 不確かさを現在の1/4 に

Fermilab データ収集



Fermilab Run2&3 results

2023年発表



- センターの値はほぼ動かず
- 不確かさがBNLの半分

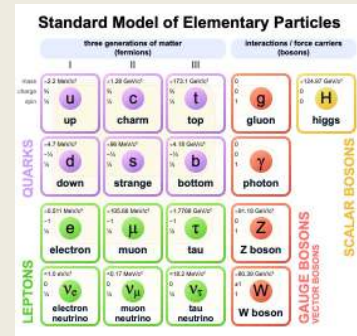
比較すべきSM理論値が揺れている

Muon g-2, Phys. Rev. Lett.131, 161802(2023)

$$a_\mu(\text{FNAL}) = 116\,592\,055 (24) \times 10^{-11} \quad (0.20\text{ppm})$$

$$a_\mu(\text{exp}) = 116\,592\,059 (22) \times 10^{-11} \quad (0.19\text{ppm})$$

標準模型(SM)でのg-2理論値



荷電レプトンのg-2

$$a_l = a_l(\text{QED}) + a_l(\text{hadron}) + a_l(\text{Weak})$$

電磁気力
 e, μ, τ, γ

強い力
quark が絡んだもの

弱い力
W, Z を含んだもの

電子	99.9999999985 %	1.5 ppb	0.025 ppb
ミューオン	99.994 %	59 ppm	1.3 ppm

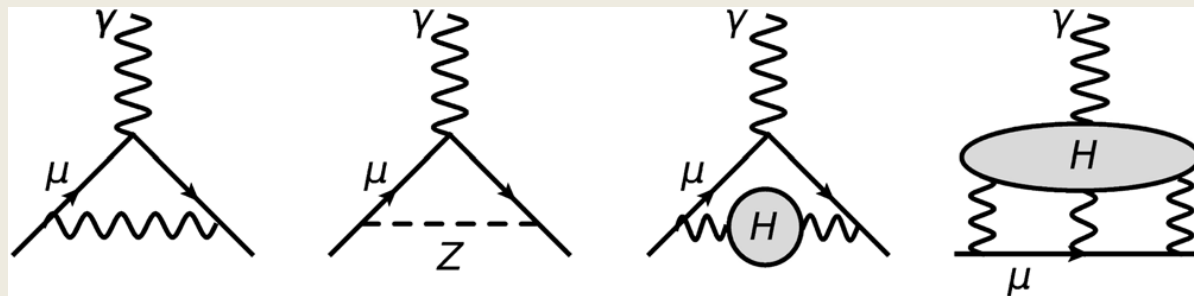
ppb=10⁻⁹, ppm=10⁻⁶

電子とミューオンの質量差が原因

$$\frac{m_\mu}{m_e} = \frac{105\text{MeV}}{0.51\text{MeV}} = 206$$

SM ファインマン図

Muon g-2, Phys. Rev. Lett.126, 141801(2021)



電磁気力

QED

弱い力

強い力

ハドロン真空偏極

ハドロン光光散乱

実験の精度にあわせるためには、
多くの図の寄与を計算する必要がある

ミュオン 0.1 ppm

電子 0.01 ppb

ミュオン $g-2$ SM 理論値

目標 0.1 ppm

- QED は電子 $g-2$ の応用でよくわかっている-> 後述

- Weakはそもそも1 ppm の寄与

1 loop + 2 loop leading + 2 loop 残り全部

1972年

2003+2013年

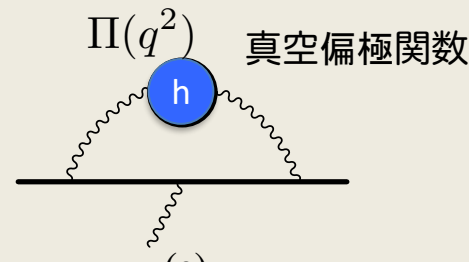
2018年

問題なし

- 59ppmも寄与するハドロンの寄与をどう決めるか？

- ハドロン実験の結果を使う または Lattice QCD 計算

Muon g-2ハドロンの寄与



- ミューオン $105 \text{ MeV} < \text{QCD } \Lambda$
クォーク描像のQCD摂動計算は使えません
- ハドロンは真空偏極(VP)として現われる
- ハドロン生成の断面積から分散関係と光学定理を用いて求める

$$R(s) \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}$$

分散関係 $\Pi(q^2)$ の複素平面での解析性

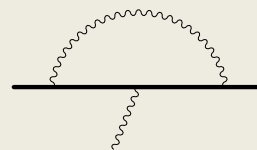
$$\frac{\text{Re}\Pi(q^2)}{q^2} = \frac{1}{\pi} \int_{m_\pi^2}^{\infty} ds \frac{\text{Im}\Pi(q^2)}{s(s-q^2)}$$

光学定理 S行列のユニタリ性($S+S^\dagger=1$)

$$2\text{Im}\mathcal{M} = \sum_f \sigma_f$$

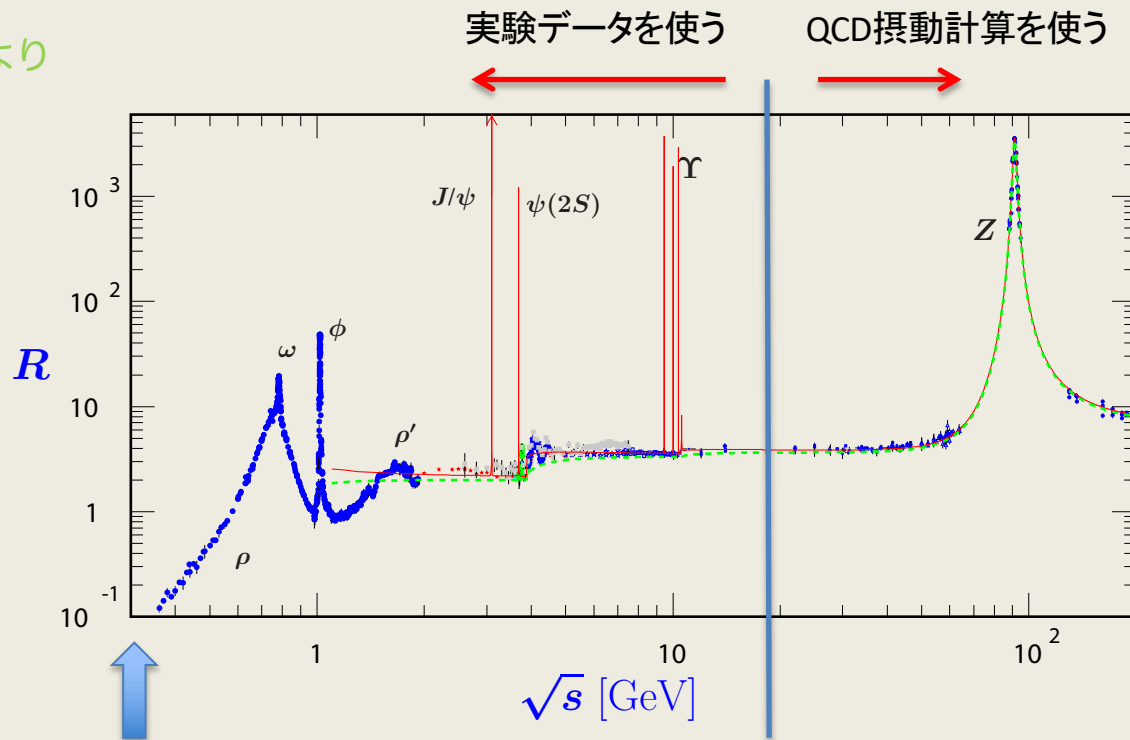
$$a_\mu = \frac{\alpha^2}{3\pi^2} \int_{m_\pi^2}^{\infty} \frac{ds}{s} R(s) K_\mu(s)$$

g-2 の2nd-orderの寄与で
決まる積分カーネル



$e+e^- \rightarrow \text{hadrons} (+ \gamma)$

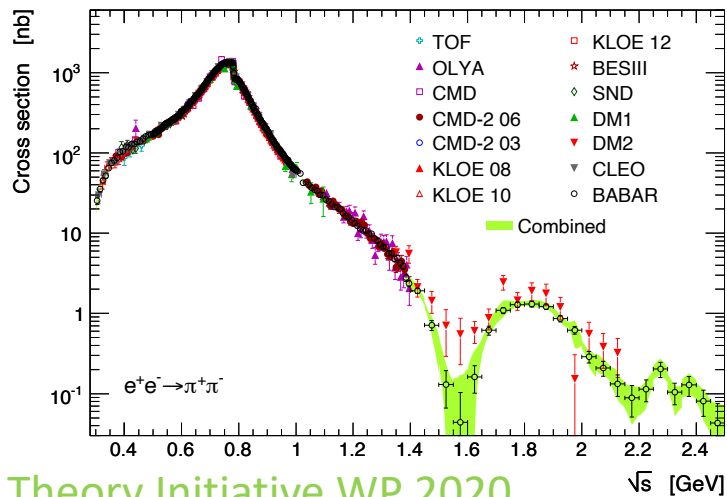
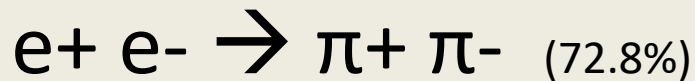
PDG2019より



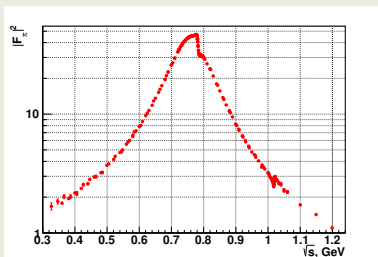
ミュオンの質量スケール
~100 MeV

Radiative return ($e+e^- \rightarrow \text{hadron} + \gamma$) によって
固定Sのマシンで 実質Sを変化させることができる！

CMD3 との相対的な比較

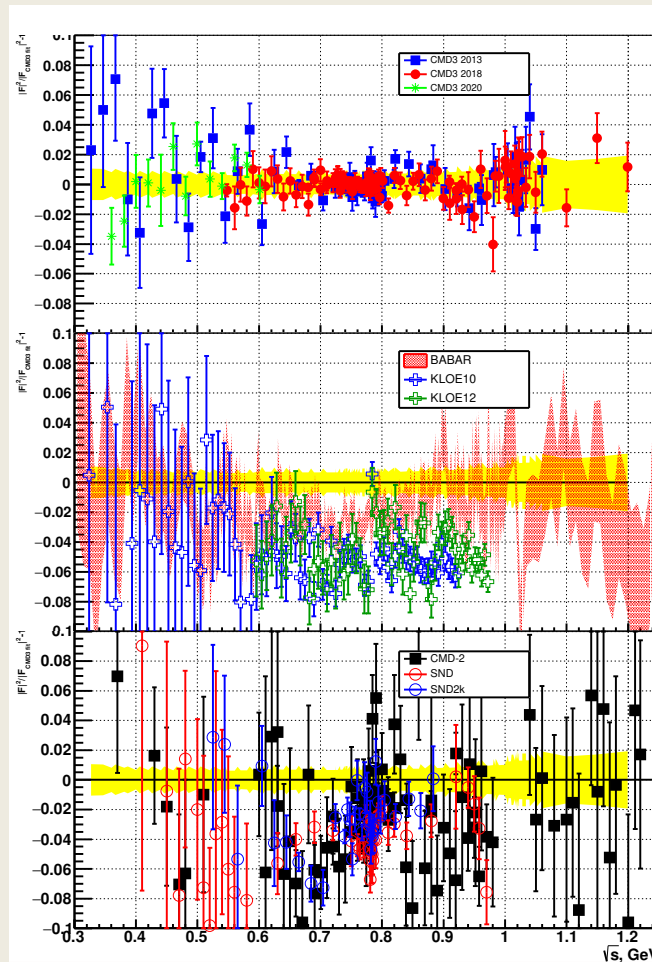


Theory Initiative WP 2020



2023年3月
Novosibirskの
結果

CMD-3, 2023, arXiv: 2309.12910

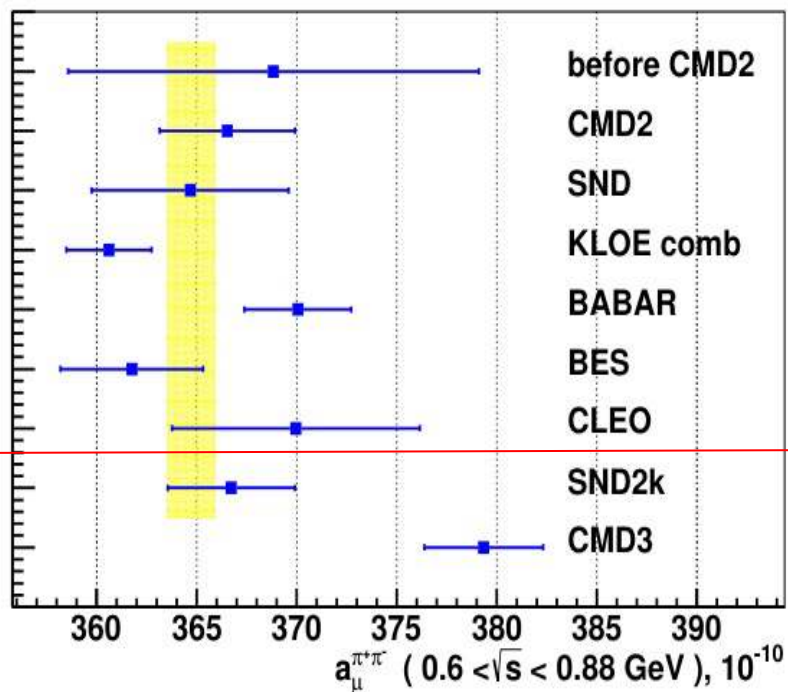


CMD2との
差

BaBar、
KLOEとの
差

同じ加速器の
SNDとの
差

$\pi^+ \pi^-$ からミュオン $g-2$ への寄与



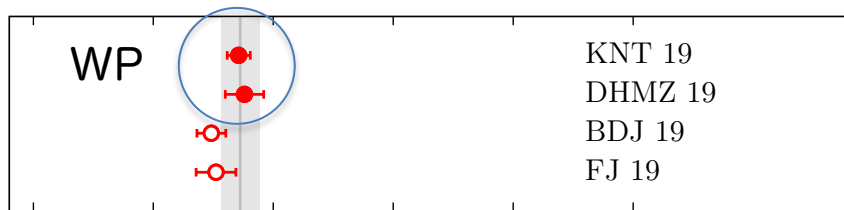
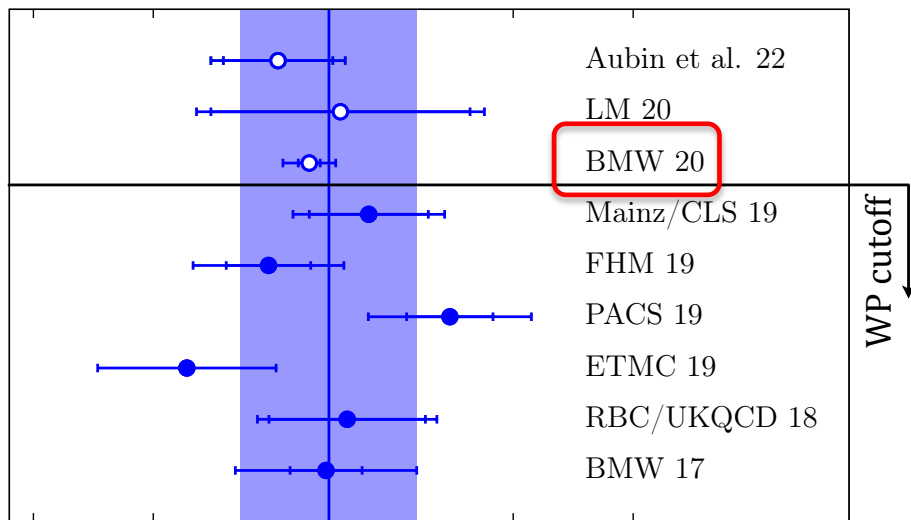
CMD-3の結果

- CMD2
- KLOE
- BABAR
- SND2k

全てと有意な差がある

Lattice QCD の結果とは整合

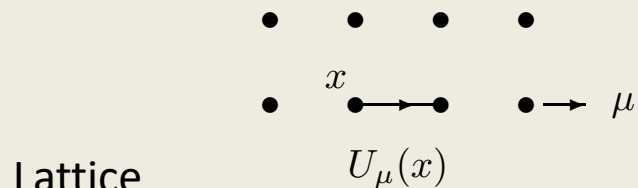
Lattice QCD によるハドロン真空偏極



650 700 750

$a_\mu^{\text{hvp}} \cdot 10^{10}$

H. Wittig arXiv:2306.04165



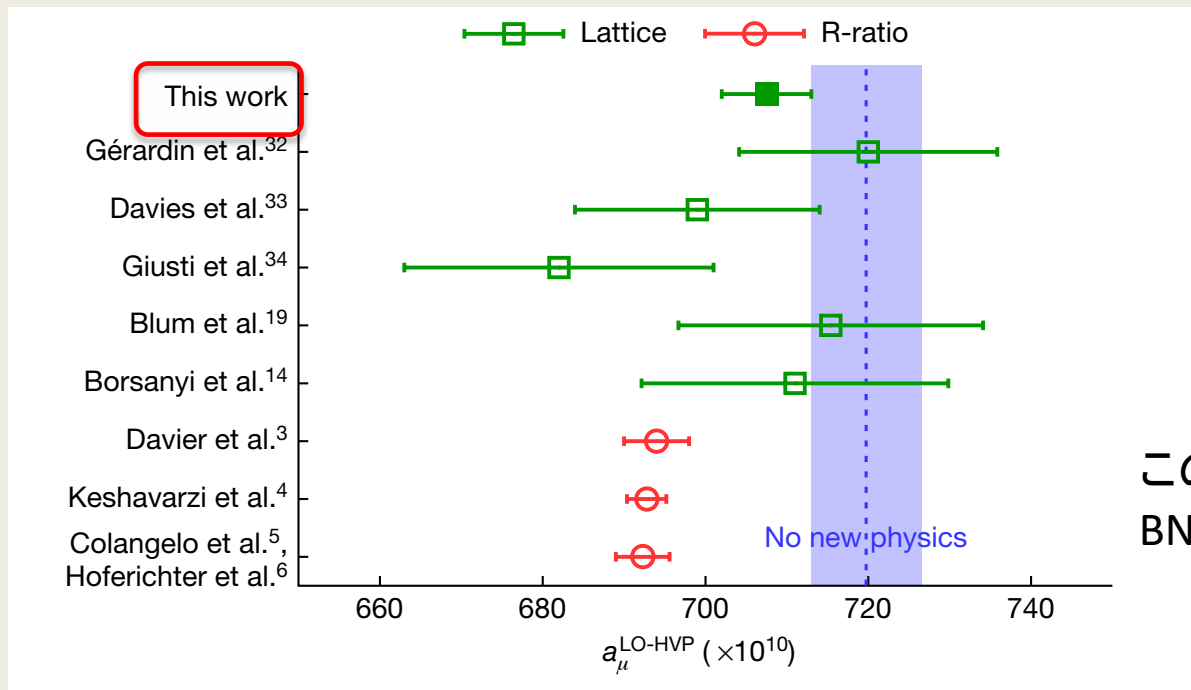
時空間を離散化
有限自由度
数値シミュレーションで経路
積分を実行

R-ratio

格子QCDからのハドロン真空の寄与

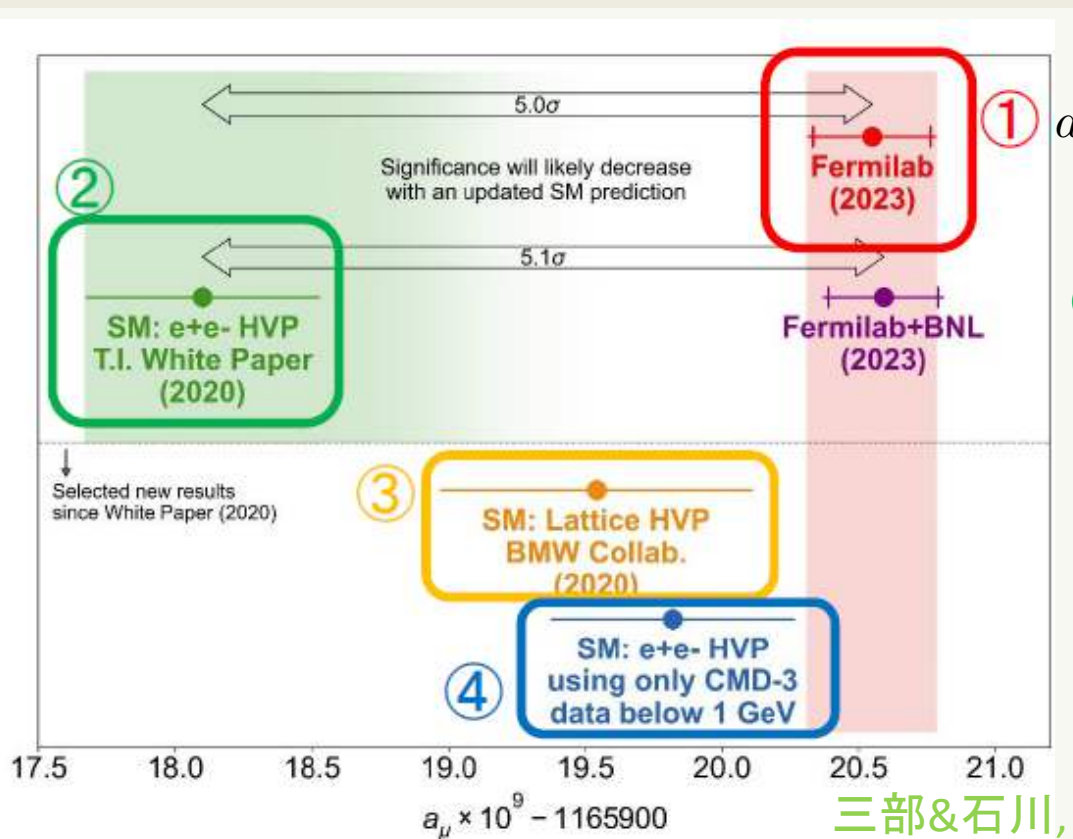
Fermilab 1st result の発表と同じ日に出版されたnatureの論文

BMW collaboration
Nature 2021



この不確かさは
BNL実験のもの

Muon g-2 実験とSMの現状まとめ



$$\textcircled{1} a_\mu(\text{FNAL}) = 116\,592\,055(24) \times 10^{-11}$$

$$\textcircled{2} a_\mu(\text{FNAL}) - a_\mu(\text{SM:WP}) = +245(49) \times 10^{-11}$$

$$\textcircled{3} a_\mu(\text{FNAL}) - a_\mu(\text{SM:BMW}) = +101(60) \times 10^{-11}$$

$$\textcircled{4} a_\mu(\text{FNAL}) - a_\mu(\text{SM:CMD-3}) = +49(55) \times 10^{-11}$$

g-2 の精度を追う：電子実験

ミュオン：

Weak decay π decayで生成 スピンの向きが揃う

μ decay スピンの方向を教えてくれる

電子（陽電子）：

最も軽い荷電レプトンなので崩壊しない

1970年代の状況

Jackson EM book, section 11.11

$$a_{e^-} = 115\,965.77 (35) \times 10^{-8}$$

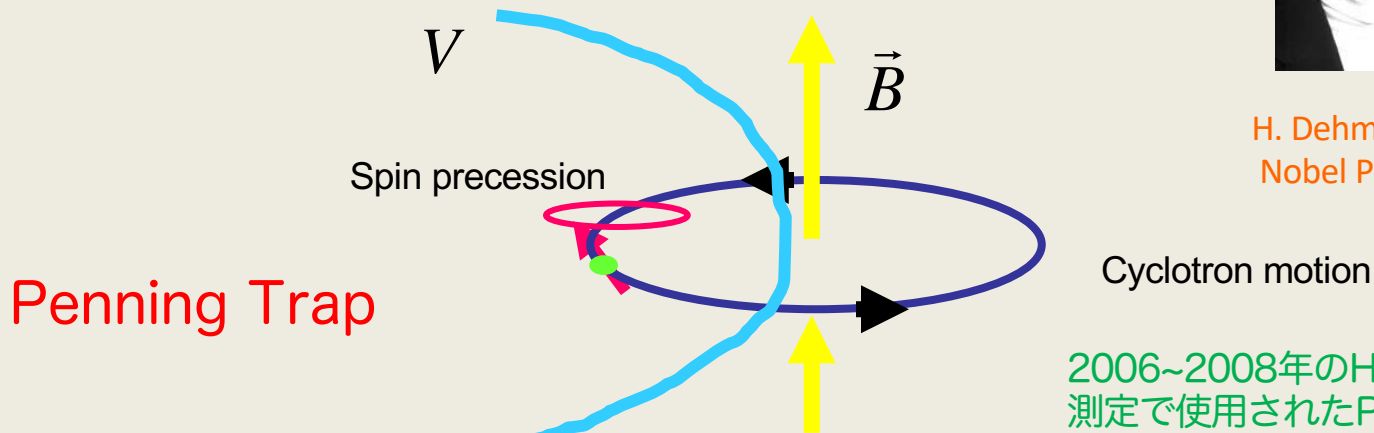
$$a_{e^+} = 116\,030 (122) \times 10^{-8}$$

$$a_{\mu^\pm} = 116\,616 (31) \times 10^{-8}$$

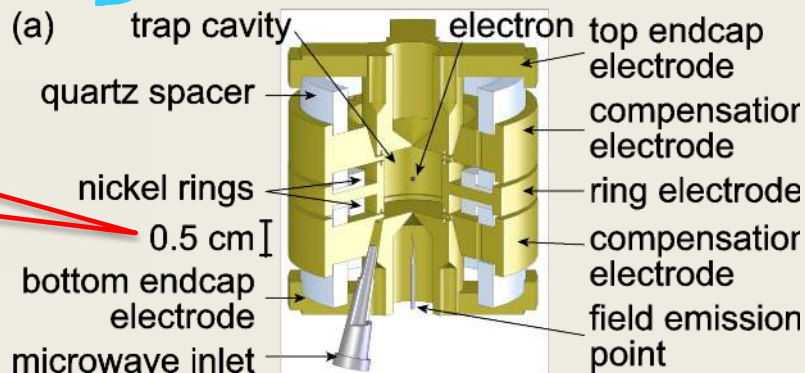
1 電子を電磁場で捕獲



H. Dehmelt,
Nobel Prize 1989



0.5cm!



超低温
~200mK 程度

電子のP-trapでのエネルギー準位

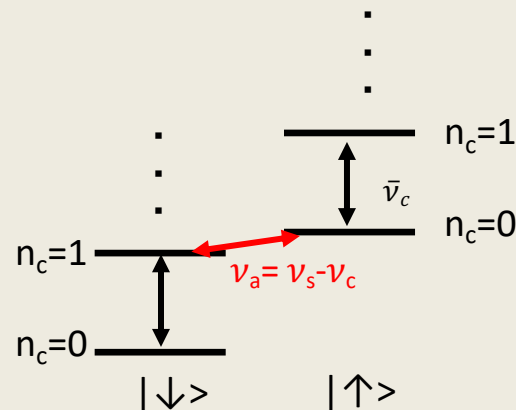
サイクロトロン運動 + スピン歳差運動
(調和振動子)

$$H = \hbar\omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_s \frac{\sigma_z}{2}$$

$$\omega_c = \frac{eB}{m_e}, \quad \omega_s = \frac{g}{2}\omega_c$$

$$\omega_s - \omega_c = a_e \omega_c \equiv \omega_a$$

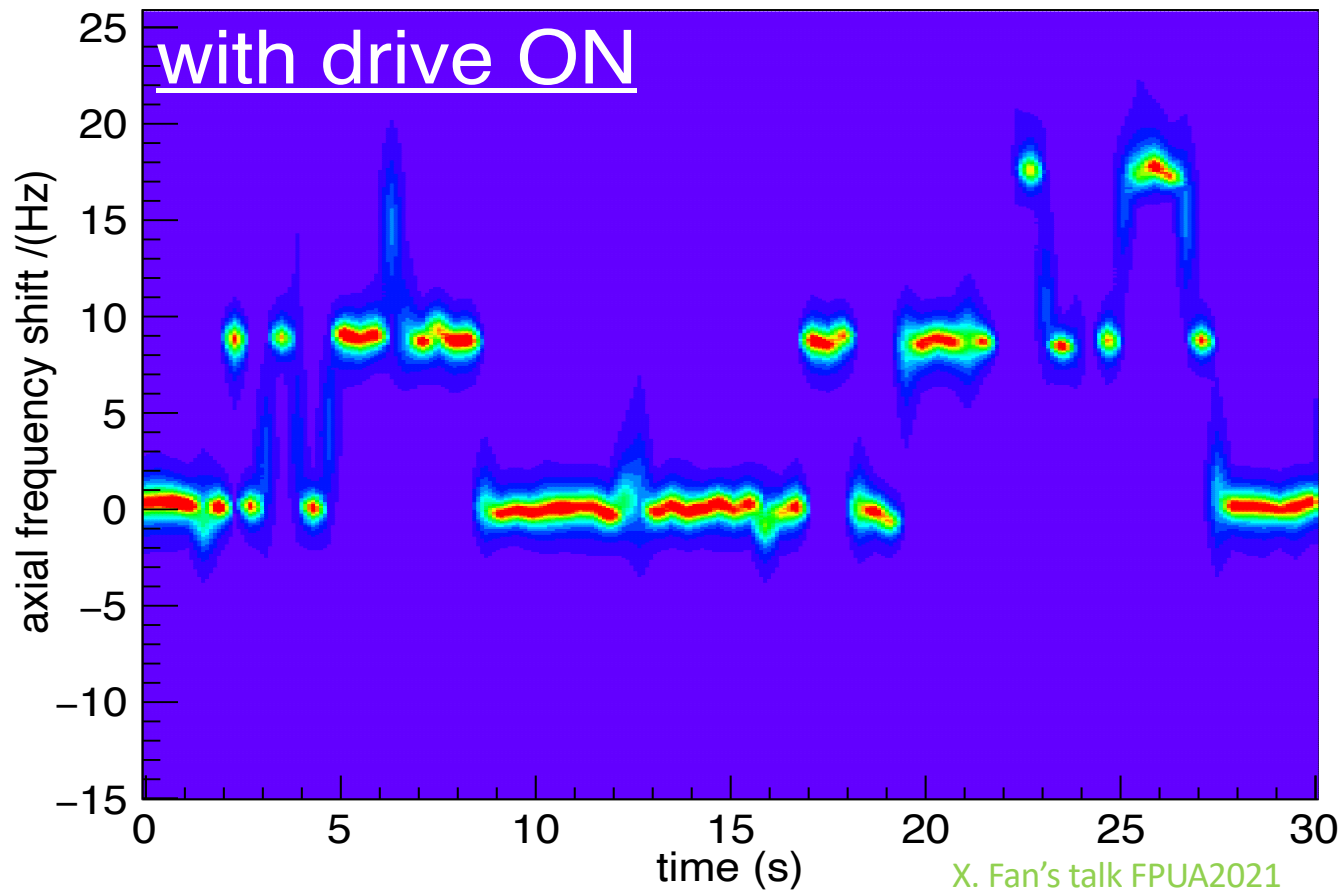
この周波数から
 $a_e = (g-2)/2$ を決める



X. Fan's talk FPUA2021

ランダウ準位

$g=2$ なら 超対称性のある系

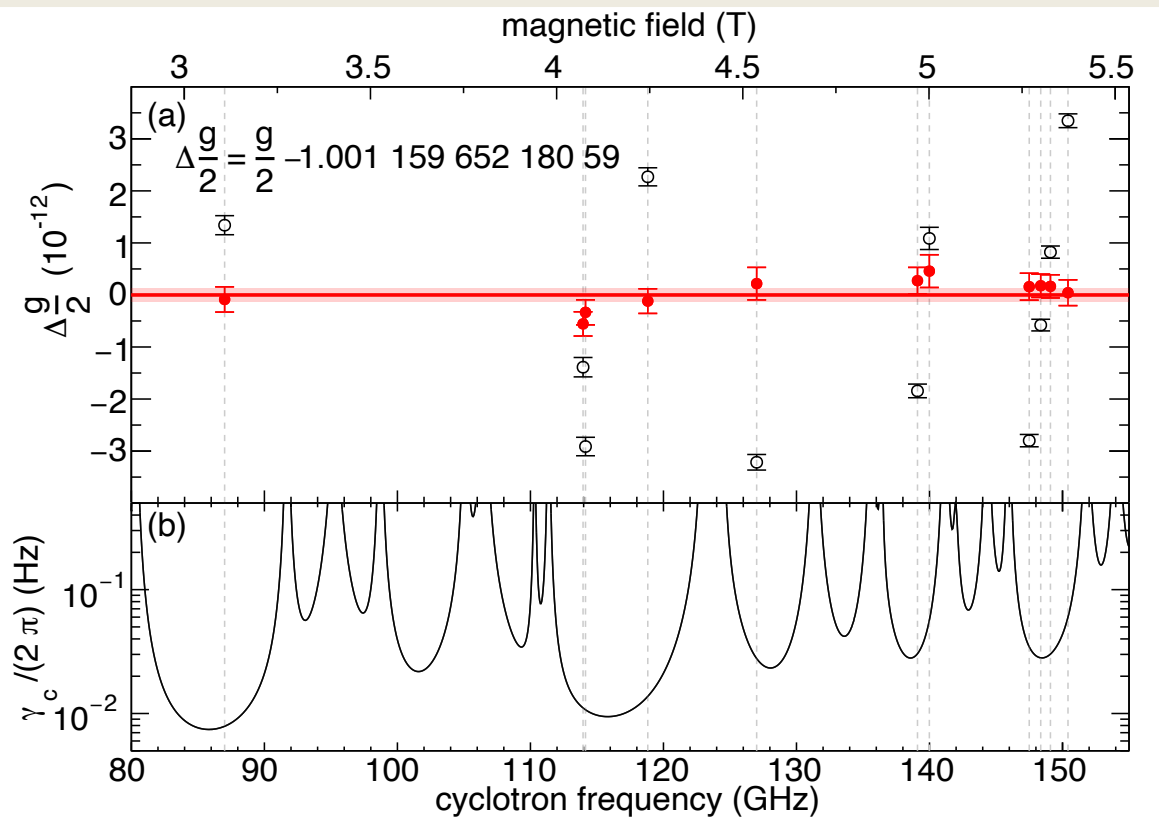


← $n_c=2$

← $n_c=1$

← $n_c=0$

Harvard 2008 → Northwestern 2022



複数の磁場Bの値で
計測を実施

X. Fan et al. PRL 2023

標準模型(SM)でのg-2理論値

荷電レプトンのg-2

$$a_l = a_l(\text{QED}) + a_l(\text{hadron}) + a_l(\text{Weak})$$

電磁気力

e, μ, τ, γ

強い力

quark が絡んだもの

弱い力

W, Z を含んだもの

電子	99.9999999985 %
ミューオン	99.994 %

1.5 ppb
59 ppm

0.025 ppb
1.3 ppm

Well known

ppb= 10^{-9} , ppm= 10^{-6}

電子とミューオンの質量差が原因

$$\frac{m_\mu}{m_e} = \frac{105\text{MeV}}{0.51\text{MeV}} = 206$$

QED 電子g-2

- g 因子は次元のない数
- 質量依存性は比でしか入らない
- 電子は軽いので、重い粒子の効果は小さい

$$a_e(\text{QED}) = A_1 + A_2 \left(\frac{m_e}{m_\mu} \right) + A_2 \left(\frac{m_e}{m_\tau} \right) + A_3 \left(\frac{m_e}{m_\mu}, \frac{m_e}{m_\tau} \right)$$

2.4ppb

- A_1 の数値計算 → **ここはパラメタ変更で計算可**
- A_1 muon g-2 でも同じ値

微細構造定数 α

g-2実験値と比較するためには α の値が必要
標準模型18個の入力パラメタの一つ

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137.035\ 99\dots}$$

この α の表現は
SI 単位系です

0.1 ppb の精度が欲しい ~ 10桁

最近、ようやくこの精度で α が決定された

微細構造定数 α の決定法

1. 電子g-2を使う

$$a_e(\text{expt.}) = a_e(\text{SM theory}; \alpha)$$

α を解く 電子g-2での実験と理論の比較には使えない

2. 原子干渉計から決めた原子の質量 h/M を使う

$$\alpha = \left[\frac{h}{M} \times \frac{A_r(M)}{A_r(m_e)} \times \frac{2R_\infty}{c} \right]^{1/2}$$

不確かさを支配

原子質量単位
P-trap 実験で決める

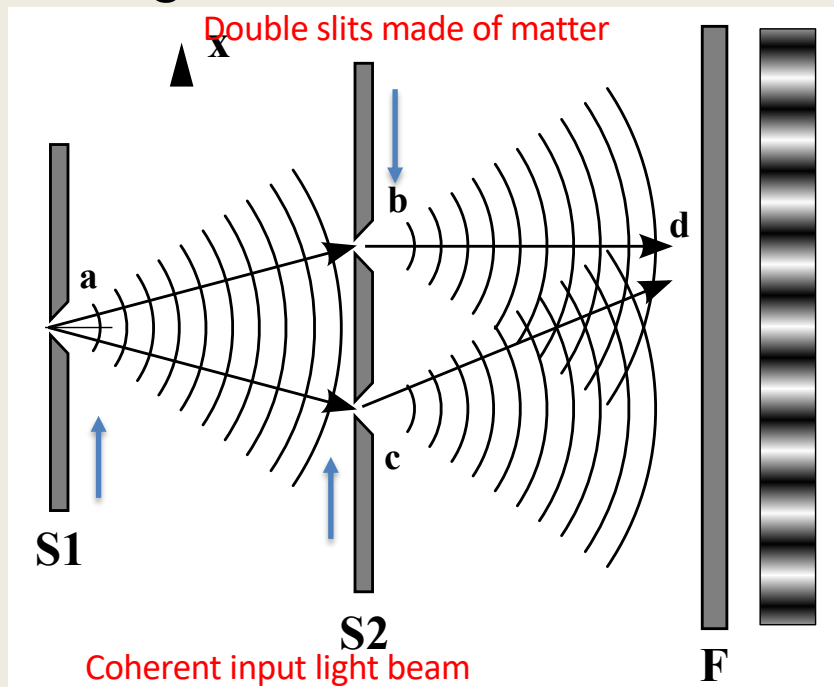
リュードベリ定数
水素原子で決める

Atom

Light Interferometer

この方法で初めて
 h/M を測定したのは
S. Chu 1997 Nobel Prize

Young's-double slit interferometer of light



Difference in paths makes
an interference pattern

原子干渉計

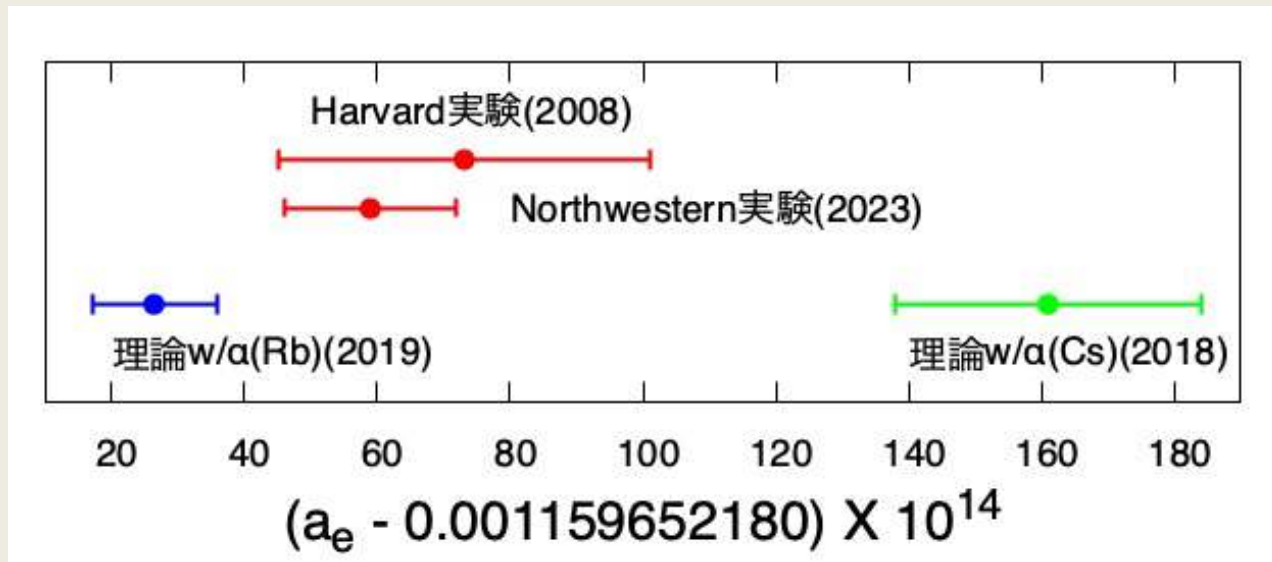
光 \rightarrow 2準位原子 $|0\rangle + |1\rangle$
原子 \rightarrow 光(レーザー)

1個の原子は、
重ね合わせの状態を保ったまま、
違う2つの経路を通る

Diagram for the double-slit experiment

https://en.wikipedia.org/wiki/Double-slit_experiment#/media/File:Doubleslit.svg

電子g-2 実験と理論の現状



$$a_e(\text{exp}) = 1\,159\,652\,180.59(13) \times 10^{-12}$$

$$a_e(\text{th}_{\alpha(\text{Rb})}) = 1\,159\,652\,180.265(93)(11)(9)[94] \times 10^{-12}$$

$$a_e(\text{th}_{\alpha(\text{Cs})}) = 1\,159\,652\,181.616(\overset{\alpha}{229})(\overset{\text{QED}}{11})(\overset{\text{hadron}}{9})(\overset{\text{total}}{229}) \times 10^{-12}$$

QED 電子g-2の摂動計算

$$a_e(\text{QED}) = A_1 + A_2 \left(\frac{m_e}{m_\mu} \right) + A_2 \left(\frac{m_e}{m_\tau} \right) + A_3 \left(\frac{m_e}{m_\mu}, \frac{m_e}{m_\tau} \right)$$

$$A_1 = A_1^{(2)} \frac{\alpha}{\pi} + A_1^{(4)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + A_1^{(6)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + A_1^{(8)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 + A_1^{(5)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^5 + \dots$$

$A_1^{(2n)}$: 一切の観測量によらず、QEDの原理だけで決まる数

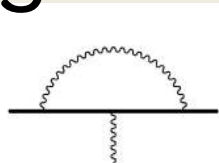
どのオーダーまで必要か？

$$\left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^5 = 0.067 \dots \times 10^{-12}$$

QED 電子g-2 $A_1^{(2n)}$

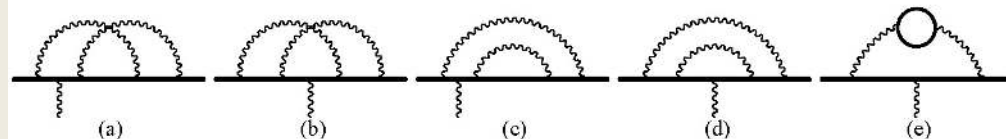
これらのファインマン図を頑張って計算する

2nd
1 diagram



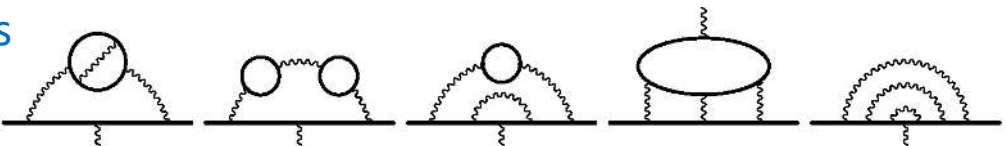
解析解

4th
7 diagrams



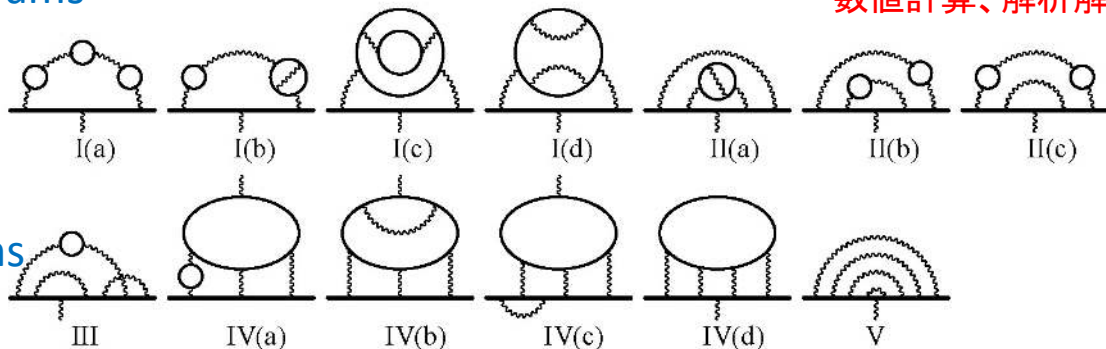
解析解

6th
72 diagrams



数値計算、解析解(1996)

8th
891 diagrams

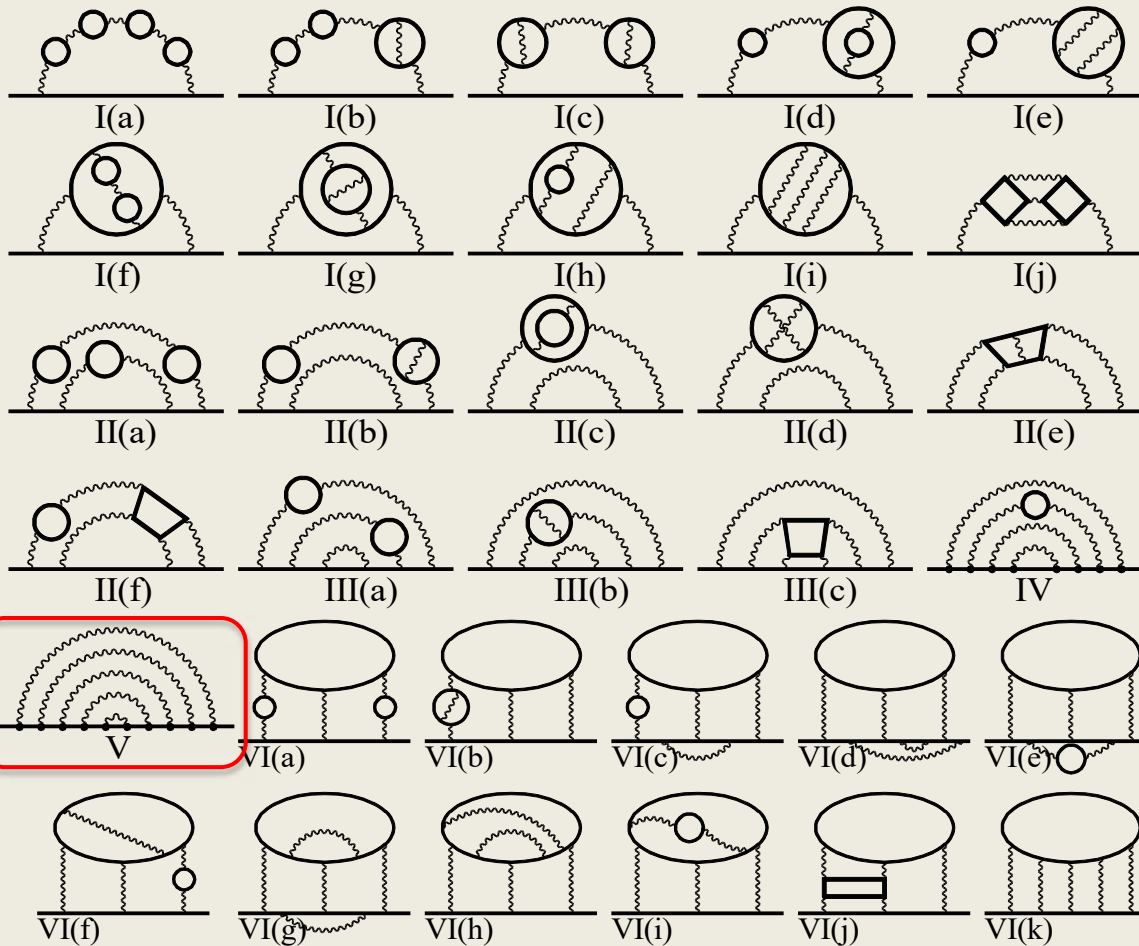


数値計算、ほぼ解析解(2017)

QED 電子g-2 $A_1^{(10)}$

数値計算のみ

10th
12672
diagrams



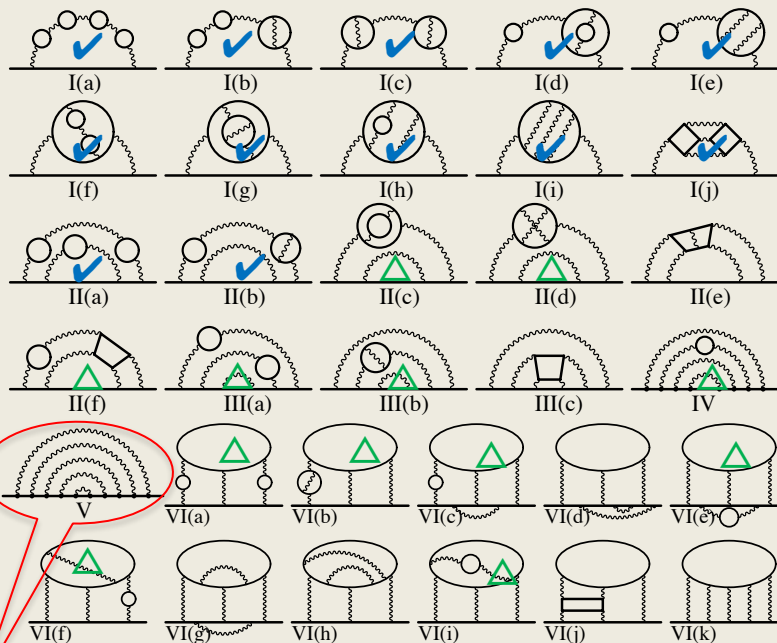
10th-order calculation $A_1^{(10)}$

12,672 vertex diagrams

Some of them are doubly checked

Baikov et al. 2013

Laporta et al. 1994

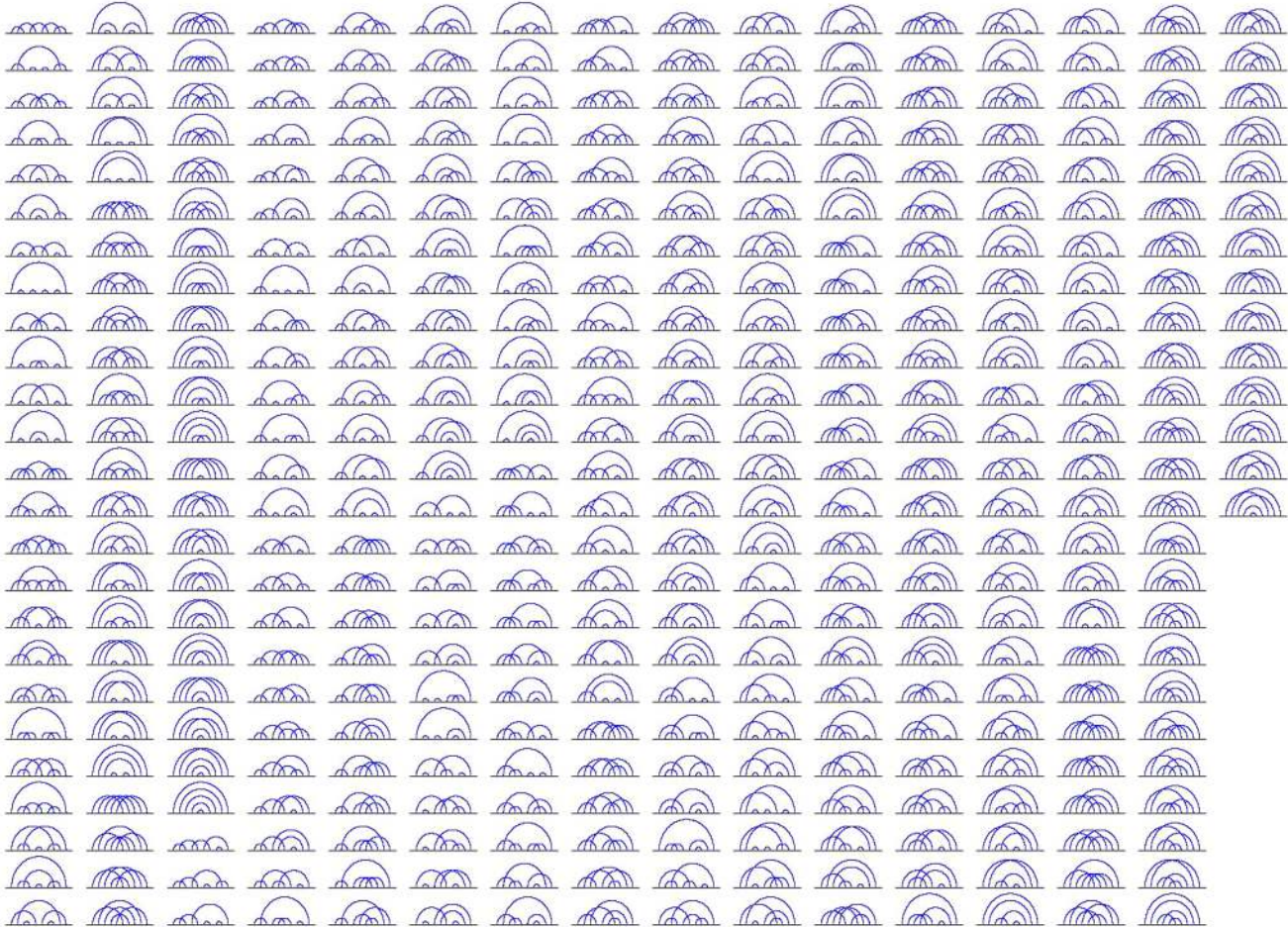


✓ Independent check confirms the result

△ Easy extension from the computer programs for the 8th-order numerical calculation

6354 vertex diagrams of this type are the hardest ones to evaluate

389 self-energy like diagrams representing 6,354 diagrams in Set V



QED results 1948 ~ now

Coefficient $A_i^{(2n)}$	Value (Error)
$A_1^{(2)}$	0.5
$A_2^{(2)}(m_e/m_\mu)$	0
$A_2^{(2)}(m_e/m_\tau)$	0
$A_3^{(2)}(m_e/m_\mu, m_e/m_\tau)$	0
$A_1^{(4)}$	-0.328 478 965 579 193 ...
$A_2^{(4)}(m_e/m_\mu)$	0.519 738 676 (24) $\times 10^{-6}$
$A_2^{(4)}(m_e/m_\tau)$	0.183 790 (25) $\times 10^{-8}$
$A_3^{(4)}(m_e/m_\mu, m_e/m_\tau)$	0
$A_1^{(6)}$	1.181 241 456 587 ...
$A_2^{(6)}(m_e/m_\mu)$	-0.737 394 164 (24) $\times 10^{-5}$
$A_2^{(6)}(m_e/m_\tau)$	-0.658 273 (79) $\times 10^{-7}$
$A_3^{(6)}(m_e/m_\mu, m_e/m_\tau)$	0.1909 (1) $\times 10^{-12}$
$A_1^{(8)}$	-1.912 245 764 ...
$A_2^{(8)}(m_e/m_\mu)$	0.916 197 070 (37) $\times 10^{-3}$
$A_2^{(8)}(m_e/m_\tau)$	0.742 92 (12) $\times 10^{-5}$
$A_3^{(8)}(m_e/m_\mu, m_e/m_\tau)$	0.746 87 (28) $\times 10^{-6}$
$A_1^{(10)}$	6.737 (159)
$A_2^{(10)}(m_e/m_\mu)$	-0.003 82 (39)
$A_2^{(10)}(m_e/m_\tau)$	$\mathcal{O}(10^{-5})$
$A_3^{(10)}(m_e/m_\mu, m_e/m_\tau)$	$\mathcal{O}(10^{-5})$

Uncertainty comes from
muon-electron mass ratio
tau-electron mass ratio

Uncertainty comes from
numerical integration

Higher order QED for electron g-2

- 10th-order will soon be established
- Is the 12th-order needed? Cvitanovic, Lautrap, Pearson, 1978, PRD

Order n	2	4	6	8	10	12	14
# of diag.	1	7	72	891	12,672	202,770	3,602,880
contribution	+ 0.5	-0.33 ...	+1.18...	-1.91...	+6.7...	-50 ~ +50	?

Just a guess

$$\pm 50 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^6 \sim 0.8 \times 10^{-14}$$

δa_e	Current experimental uncertainty	13×10^{-14}
	10-fold improved exp. uncertainty	1.4×10^{-14}
	20-fold improved α uncertainty	1.1×10^{-14}

The QED 12th-order term must be evaluated.

QED 12th-order g-2 calculation

If two numerical methods, AHKN and Volkov, are combined,

a numerical estimate of the 12th-order might be possible

- Need sufficient computational resources
GPU clusters
- Need a more reliable numerical integration algorithm

Other directions:

R. Kitano, H. Takaura, S. Hashimoto arXiv:2103.10106, JHEP05,119(2021)

- Lattice QED

6th-order g-2 has been obtained R. Kitano, H. Takaura, arXiv:2210.05569

10th-order g-2 w/o fermion loop

- 8th-order analytic loop calculation program “SYS” by S. Laporta

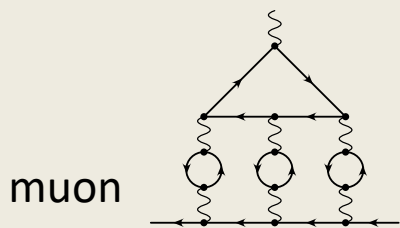
how many new master integrals appear in 10th and in 12th orders?
S. Laporta, arXiv:1704.06996, PRD77,232(2017)

Too difficult?

QED muon g-2 12th-order

R. Yamazaki, master thesis 2023, Saitama Univ.

Leading だけなら簡単？ 全て電子のループ

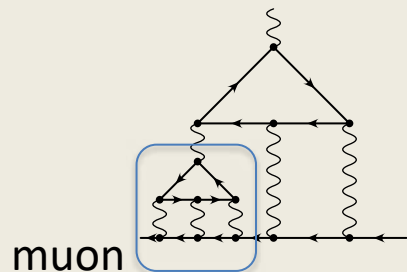


これが12th-orderの主寄与 $\propto \pi^2 \ln^4(m_\mu/m_e) \sim 8000$

他の同様な図を含めても

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^6 \times 4230 = 0.665 \times 10^{-12}$$

当面、無視できる



これは？ $\propto (m_\mu/m_e)^2 \ln(m_\mu/m_e) \sim 2 \times 10^5$

$$m_\mu^2 \frac{dF_1(-s)}{ds} \Big|_{s=0} \propto (m_\mu/m_e)^2 = 40,000$$

数値計算結果

$$\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^6 \times 145.7(1.9) = 0.22 \times 10^{-13}$$

当面、無視できる

Feynman Vertex 図360個
積分16個, 1個50万行

Thank you

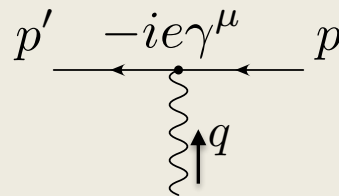
Dirac方程式と QED ラグランジアン

Dirac 方程式 共変微分 ゲージ不変性からの要請

$$(iD_\mu \gamma^\mu - m)\psi(x) = 0, \quad D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu(x)$$

Dirac 方程式を作用積分の停留値として与えるラグランジアン密度

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(iD_\mu \gamma^\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$



1 電子の1光子による散乱振幅

$$i\mathcal{M}(2\pi)\delta(p'^0 - p^0) = -ie\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)\tilde{A}_\mu^{\text{cl}}(q), \quad q = p' - p$$

Gordon Decomposition Identity

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p)$$

非相対論的極限

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad \text{Dirac表現では} \quad \sigma^{ij} = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}$$

電子の非相対論的極限で

$$\mathcal{M} \longrightarrow -\frac{e}{2m} \psi^\dagger \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \psi$$

$$i\epsilon_{ijk}\sigma_k q_j \tilde{A}_i^{\text{cl}}(q) = \vec{\sigma} \cdot (-i\vec{q} \times \vec{A}^{\text{cl}})$$

ψ 2成分スピノール

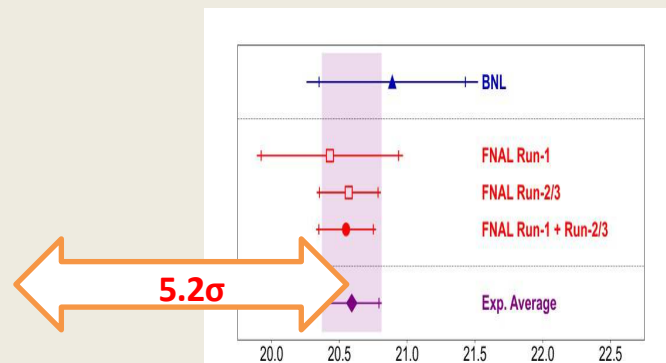
$$H = -\vec{\mu}_e \cdot \vec{B}$$

ハミルトニアンが導出された

$$\vec{\mu}_e = g_e \frac{e\hbar}{2m_e} \frac{\vec{s}}{\hbar}$$

電子のg因子 は $g=2$

標準模型(SM)理論値との比較



標準模型(理論値, 2021)と実験値の差

$$a_\mu^{\text{Exp}} = 116\,592\,059(22) \times 10^{-11}$$

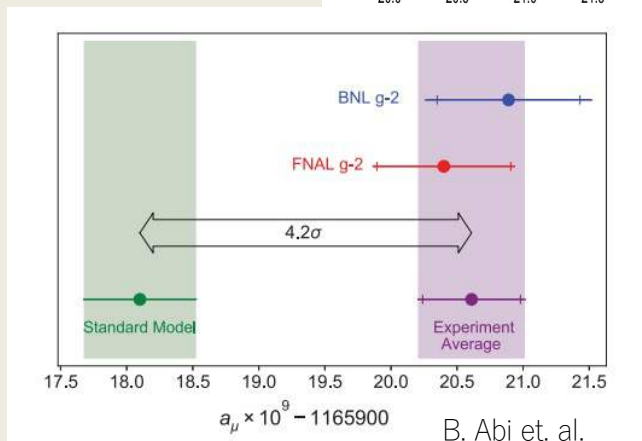
$$a_\mu^{\text{SM}} = 116\,591\,810(43) \times 10^{-11}$$

$$a_\mu^{\text{Exp}} - a_\mu^{\text{SM}} = 249(48) \times 10^{-11}$$

5.2σ

新しい物理が見つかった? → とは言えない

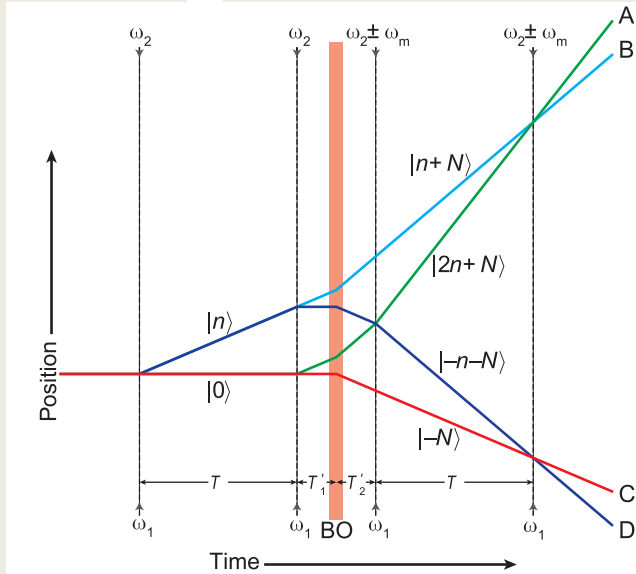
理論値が揺れ動いているから



B. Abi et. al.
(2021)

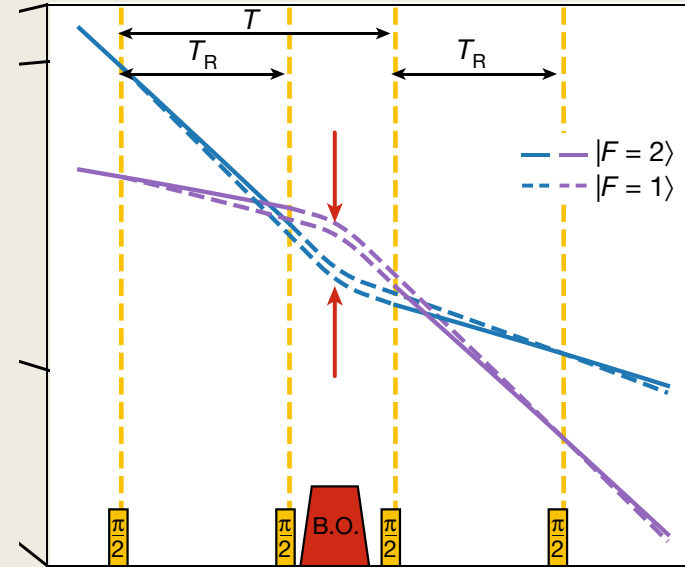
Atom interferometers

$\hbar/m(\text{Cs})$ 2018, Science
Parker et al.



$$\Phi = T \left[8n(n+N) \frac{\hbar k^2}{m_{\text{Cs}}} - 2n\omega_m \right]$$

$\hbar/m(\text{Rb})$ 2020, Nature
Morel et al.

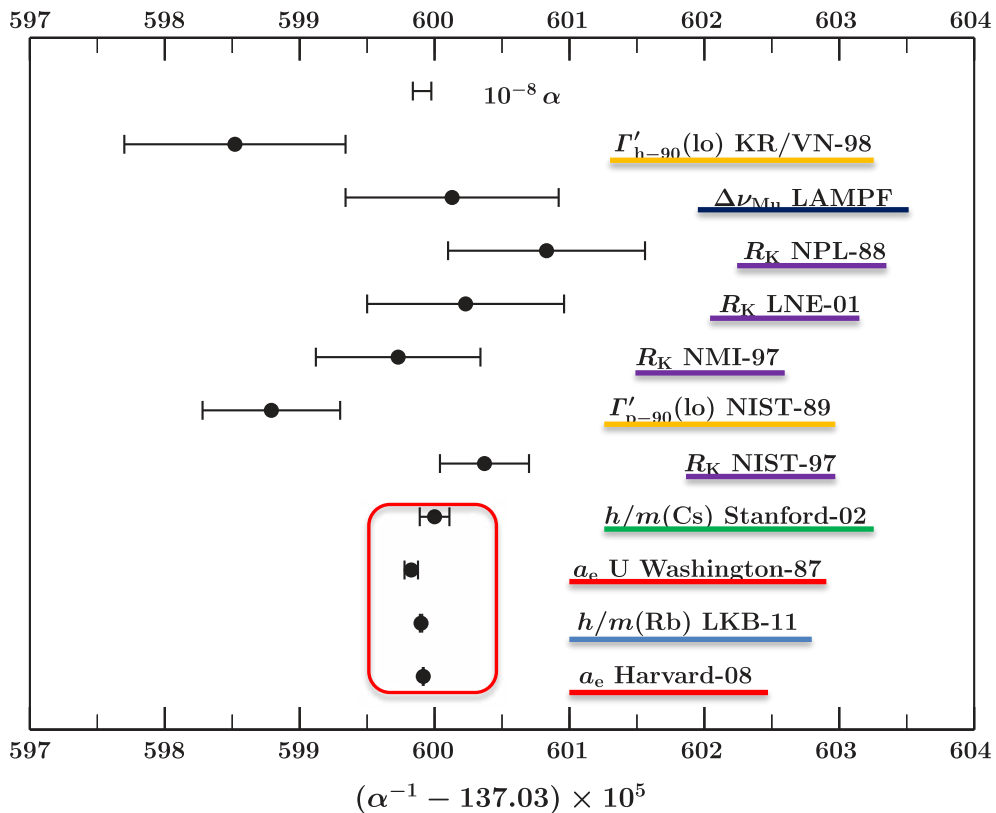


$$\Phi = T_R \left[4N_B \frac{\hbar k_R k_B}{m_{\text{Rb}}} - \delta\omega_R \right]$$

Find difference in Raman frequencies ω_m or $\delta\omega_R$ s. t. $\Phi = 0$

α の値: 2014

CODATA2014, 2016



Proton gyromagnetic ratio

Muonium HFS

Quantum Hall R_K

Cs Interferometer

Rb Interferometer

Electron $g-2$

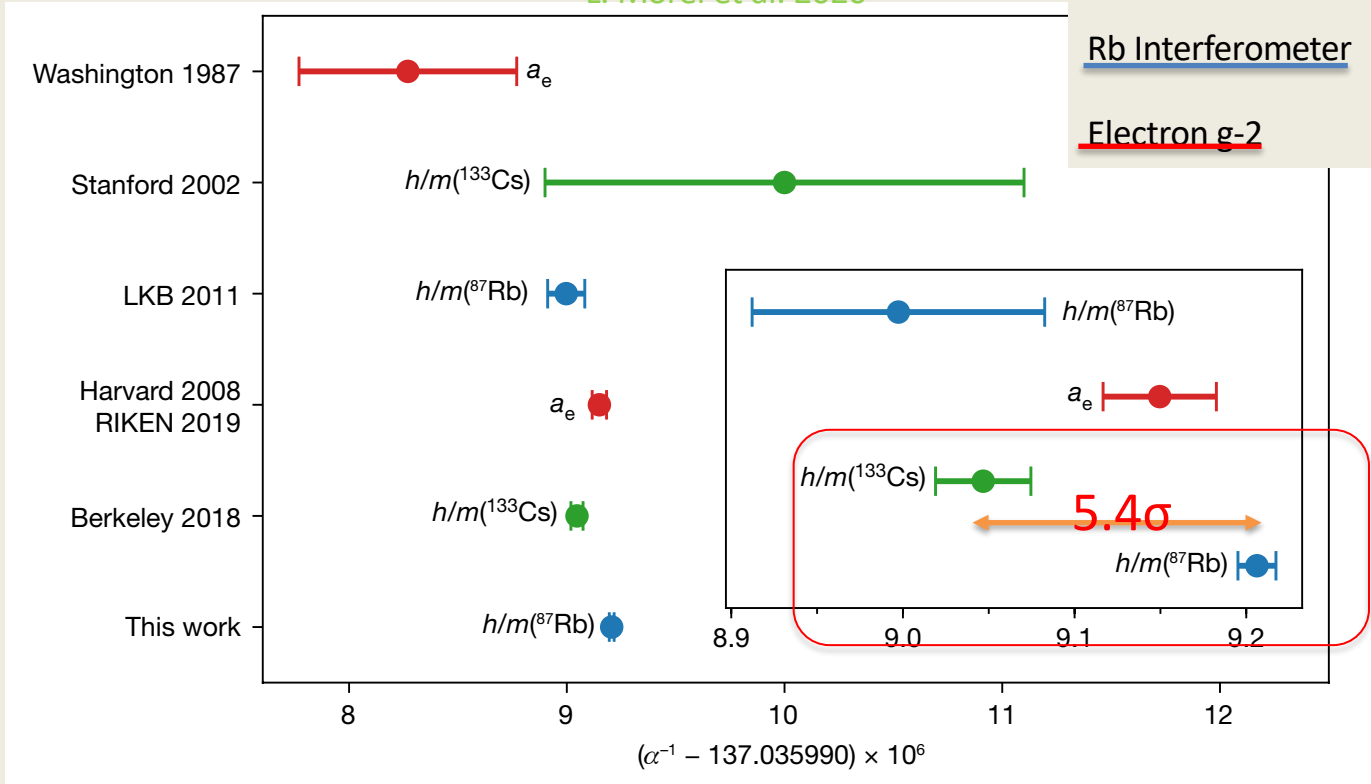
α の値: 2020

L. Morel et al. 2020

Cs Interferometer

Rb Interferometer

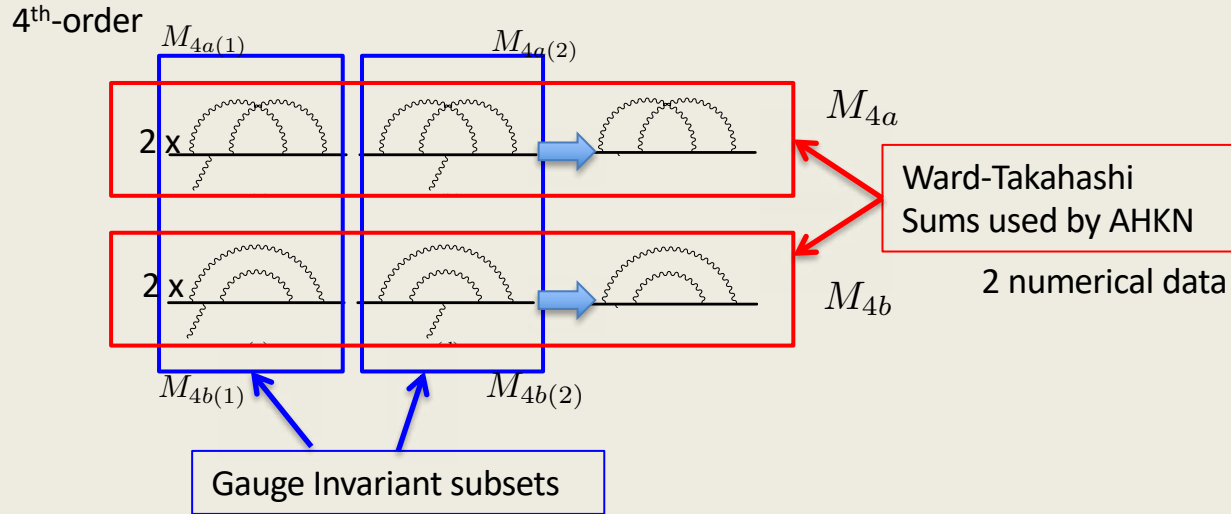
Electron g-2



Ward-Takahashi sum v.s. vertices

AHKN: 389 Ward-Takahashi sums of v-diagrams.

Volkov: 3,213 vertex diagrams.



Every vertices are calculated by Volkov
4 numerical data

Different renormalization scheme

On-shell renormalization constants for a self-energy diagram G :

$L_{G(i)}$ for vertex renormalization

B_G for wave-function renormalization

Volkov used IR-free and Ward-Takahashi identity holds:

$$BV_G + \sum_{i=1}^{2n-1} LV_{G(i)} = 0$$

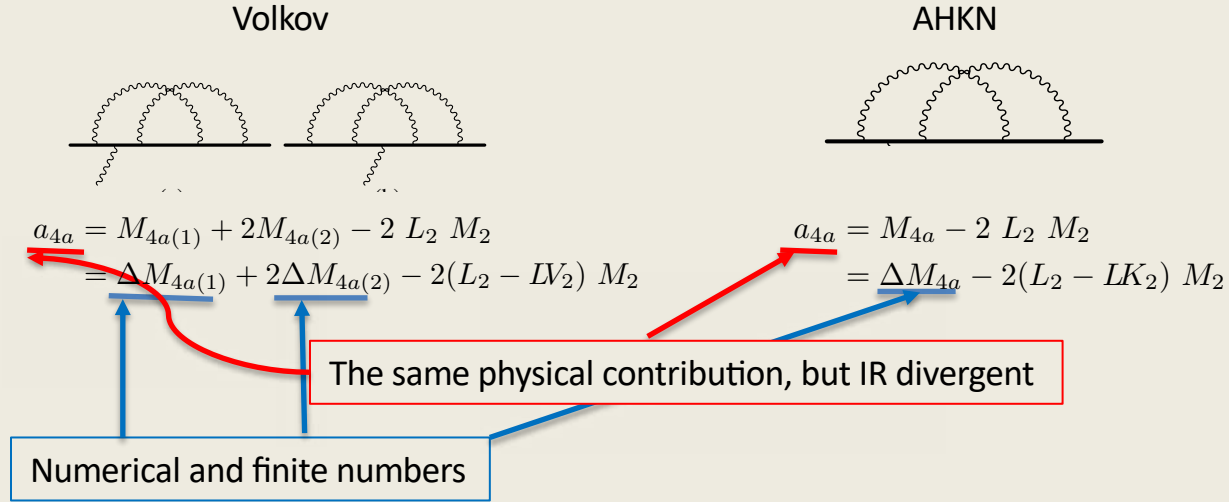
We used IR free, easy-to-determine, but breaking WT-identity:

$$BK_G + \sum_{i=1}^{2n-1} LK_{G(i)} + \Delta LB_G = 0$$

Finite renormalization

Restore the gauge invariance

Connection bw Volkov and AHKN



$$\Delta M_{4a} - (\Delta M_{4a(1)} + 2\Delta M_{4a(2)}) = 2 \delta L_2 M_2$$

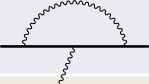
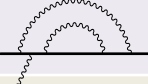
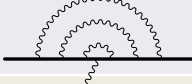
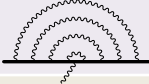
where $\delta L_2 = LV_2 - LK_2$

New calculation of

$$\delta L_{n(i)}$$

Difference of vertex renormalization constants $\delta L_{n(i)}$
 numerically calculated for $n=2,4,6,8$

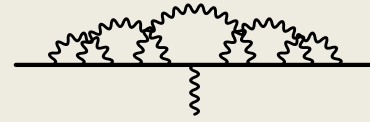
(#) # of independent diagrams

Order n	2	4	6	8
# of vertex diagrams	1	6 (4)	50 (38)	518(269)
				

269 x 1 hour x 40 core ~ 10,000 core x hours

very small calculation compared to the 10th-order g-2

X001 as an example



$$\begin{aligned}
 \Delta M_{X001} - \sum_{i=1}^9 \Delta M_{X001(i)} &= \Delta M_2 \left(-3(\delta L_{4a1})^2 - 6\delta L_2 \delta L_{6f1} + 12(\delta L_2)^2 \delta L_{4a1} \right. \\
 &\quad \left. - 5(\delta L_2)^4 + 2\delta L_{01v1} \right) \\
 &+ \Delta M_{01} (2\delta L_2) \\
 &+ \Delta M_{6f} (2\delta L_{4a1} - 3(\delta L_2)^2) \\
 &+ \Delta M_{4a} (2\delta L_{6f1} - 6\delta L_2 \delta L_{4a1} + 4(\delta L_2)^3)
 \end{aligned}$$

Numerical integrals
Symbolic expression

$$\begin{aligned}
 \text{l.h.s} &= -0.16083 (334) - 0.58095 (534) \\
 &= -0.74178 (630) \\
 \text{r.h.s} &= -0.73854\dots \\
 \text{l.h.s} - \text{r.h.s} &= -0.00324 (630)
 \end{aligned}$$

Substitute numerical values for lower-order symbols

A. Hirayama, JPS 2021 spring meeting

X001 safely pass the numerical check.

Two results of $A_1^{(10)}$ [Set V]

AHKN	(2018)	7.668 (159)
Volkov	(2019)	6.793 (90)
diff.		0.875 (183)

4.8 σ tension!

Is a meaningful difference?

$$0.875 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^5 = 0.059 \times 10^{-12}$$

The uncertainty of the current experiment:

$$\delta a_e(\text{NW}) = 0.13 \times 10^{-12}$$

Test of the 10th-order Set V

All WT-sums, X001 – X389, safely passed the test

- Numerical evaluation of each WT-sum of diagrams are consistent between AHKN and Volkov
- No analytic error in either AHKN or Volkov

Why does the difference arise?

- When the many integrals are summed, **hidden bias** in numerical integration shows up

sum over 389 integrals for AHKN

3,213 integrals for Volkov

- Deeper investigation of numerical integration is in progress

理研の所内計算機が
有料になって、辛い