2025/12/3 @東京女子大学理論物理研究室セミナー

不確定性関係の新たな展開

— Robertson-Schrodinger不等式の一般化 —

真弓愛菜　芝浦工業大学

Joint Work with : **G. Kimura, H. Ohno, J. Lee, D. Chruściński**

- ∗ Linear Algebra Appl., 700, 35-49 (2024) **arXiv:2403.04199**
- ∗ Phys. Rev. A 110, 062215 (2024) **arXiv:2406.12280**
- ∗ **arXiv:2504.20404**

G. Kimura, H. Yamashita

- ∗ **arXiv:2505.19861**

本日の内容

【前半】 不確定性関係の基礎

- 初期の展開
- Robertson・Schrödingerの定式化

【後半】 新たな定式化の紹介

- Type 1：交換子のノルムを用いた拡張
- Type 2：Robertsonタイプの係数の一般化

自己紹介：真弓愛菜

- 芝浦工業大学　修士2年
- 所属：量子情報システム研究室（木村研）

  量子基礎論 / 量子情報科学
- 学部では機械工学を専攻

  B3の冬まで量子力学を知りませんでした …
- 量子開放系・不確定性関係・量子相関限界　ほか

  ↑ 本日の発表はこれ

本日の内容

【前半】 不確定性関係の基礎

- 初期の展開
- Robertson・Schrödingerの定式化

【後半】 新たな定式化の紹介

- Type 1：交換子のノルムを用いた拡張
- Type 2：Robertsonタイプの係数の一般化

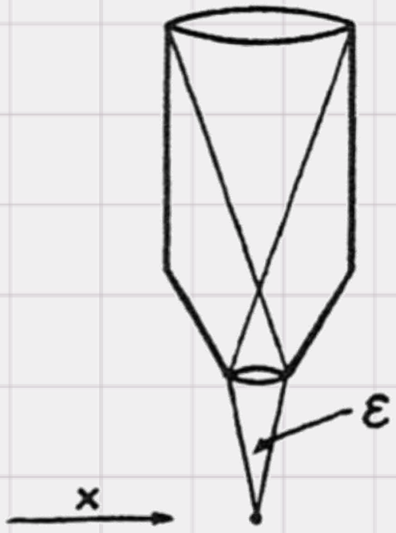
Heisenbergによる最初の提唱(1927,1930)

■ 電子の位置と運動量の測定

$$\Delta x \Delta p_x \sim h$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\sin\varepsilon},\ \Delta p_x \sim \frac{h}{\lambda}\sin\varepsilon$$

（λ：光子の波長）



γ-線顕微鏡
思考実験 (1930)

- ➢ 位置 x を精密に測定すると運動量 p_x に乱れが生じる
- ➢ 不確定性 $\Delta x, \Delta p_x$ の定義が曖昧

Kennard(1927)・Weyl(1928) らによる定式化

■ 位置と運動量の標準偏差に対する不等式

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

位置の**標準偏差**　Δx

運動量の**標準偏差**　Δp_x

（ $\hbar$: 換算プランク定数 ）

- 最初の数学的な定式化
  - 不確定性を標準偏差（分散）として扱う
- 1927年：Kennard が導出
- 1928年：Weyl による別証明

標準偏差（分散）について

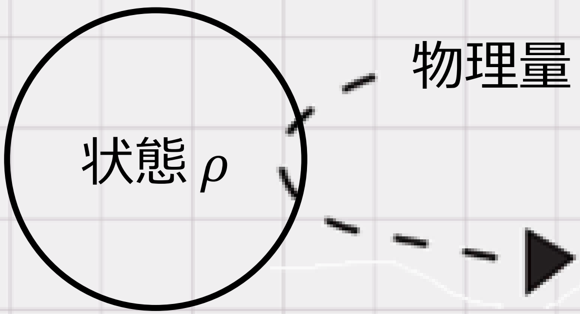
■ 量子論の基礎ざっくり復習

ρ : 密度行列

$\rho \geq 0, \ \mathrm{Tr}\rho = 1$

A : エルミート行列

$A = A^\dagger$



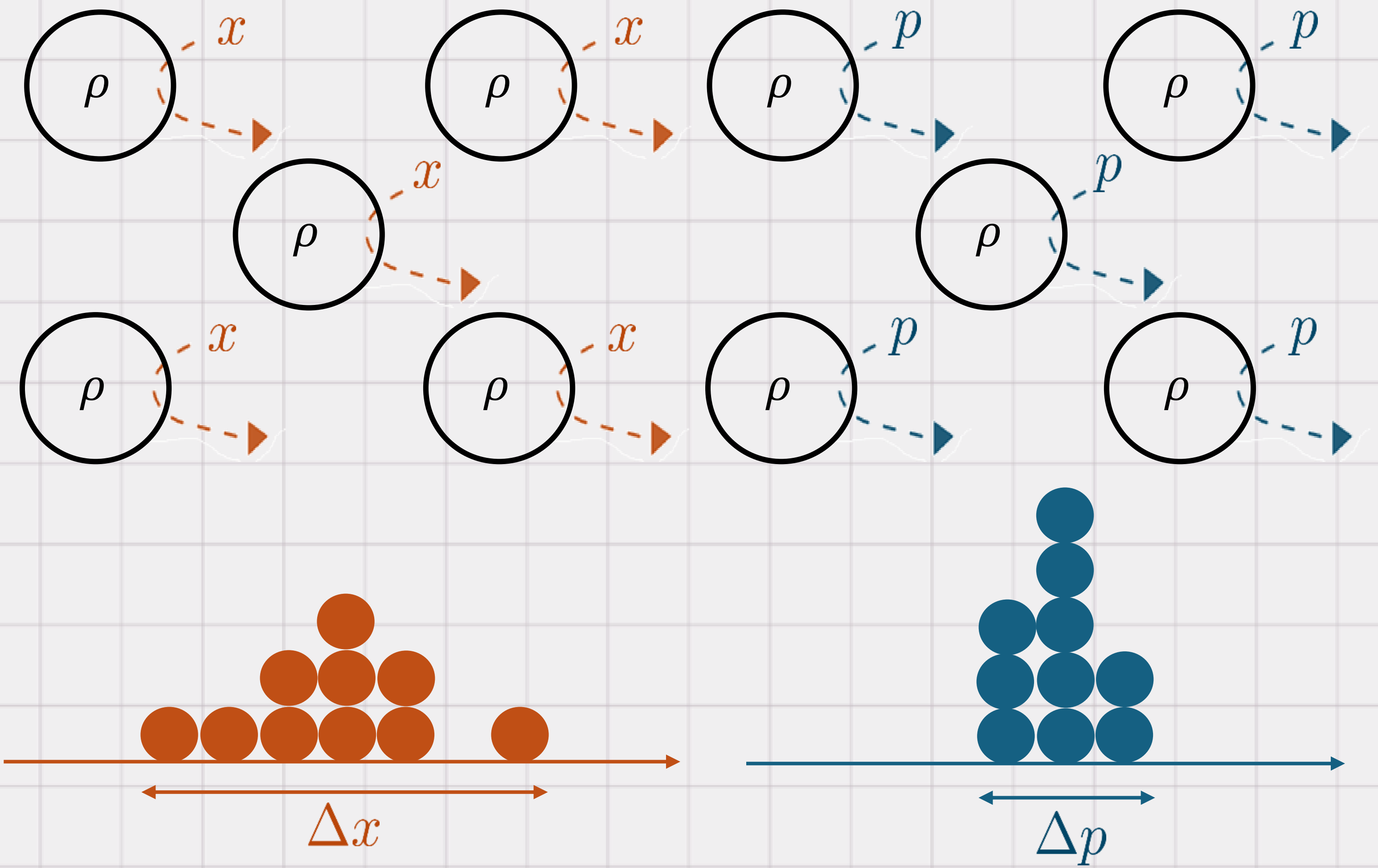
測定値 a を
確率 $P(a|\rho, A)$ で得る

期待値　$\langle A \rangle_\rho := \mathrm{Tr}(A\rho)$

分散　$\sigma_\rho(A)^2 := \left\langle (A - \langle A \rangle_\rho)^2 \right\rangle_\rho = \langle A^2 \rangle_\rho - \langle A \rangle_\rho^2$

標準偏差（分散）について

■ イメージ



標準偏差（分散）について

■ イメージ

Kennard (Weyl) の不等式

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

位置の標準偏差　Δx

運動量の標準偏差　Δp_x

標準偏差（分散）について

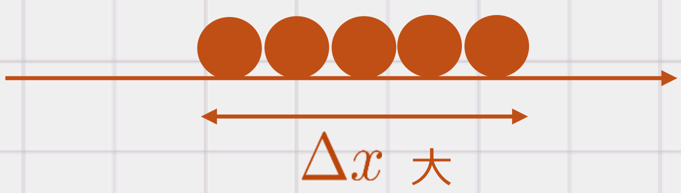
■ イメージ

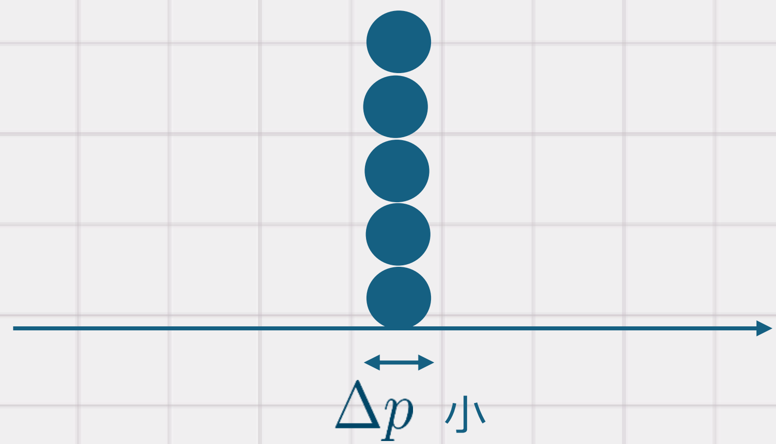
Kennard (Weyl) の不等式

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

位置の標準偏差　Δx

運動量の標準偏差　Δp_x





Kennard(1927)・Weyl(1928) らによる定式化

■ 位置と運動量の標準偏差に対する不等式

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

位置の**標準偏差** Δx

運動量の**標準偏差** Δp_x

（ $\hbar$: 換算プランク定数 ）

- 最初の数学的な定式化

  不確定性を標準偏差（分散）として扱う

- 1927年：Kennard が導出
- 1928年：Weyl による別証明

Robertson(1929) による定式化

■ 一般の物理量に対する不等式

$$\sigma_\rho(A)^2\sigma_\rho(B)^2 \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle_\rho|^2$$

期待値 $\langle A\rangle_\rho := \mathrm{Tr}(A\rho)$

分散 $\sigma_\rho(A)^2 := \left\langle (A-\langle A\rangle_\rho)^2 \right\rangle_\rho = \langle A^2\rangle_\rho - \langle A\rangle_\rho^2$

交換子 $[A,B] := AB - BA$

➢ 標準的な定式化

多くの初等的な教科書にも掲載

➢ 非可換な物理量は同時に確定した値を持たない

Schrödinger(1930) による拡張

■ 一般の物理量に対する不等式

$$\sigma_\rho(A)^2\sigma_\rho(B)^2 \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle_\rho|^2 + \mathrm{Cov}_\rho(A,B)^2$$

期待値	$\langle A\rangle_\rho := \mathrm{Tr}(A\rho)$
分散	$\sigma_\rho(A)^2 := \left\langle (A - \langle A\rangle_\rho)^2 \right\rangle_\rho = \langle A^2\rangle_\rho - \langle A\rangle_\rho^2$
交換子	$[A,B] := AB - BA$
共分散	$\mathrm{Cov}_\rho(A,B)^2 := \left\langle \frac{AB+BA}{2} \right\rangle_\rho - \langle A\rangle_\rho \langle B\rangle_\rho$

- 準古典相関を含む一般化
- 2準位系 & 純粋状態のときは常に等式

簡単な証明

- Cauchy-Schwarz 不等式

$$\|X\|_{\mathrm{F}}\|Y\|_{\mathrm{F}} \geq |\langle X, Y\rangle|$$

$\langle X, Y\rangle := \mathrm{Tr} X^\dagger Y$: Hilbert-Schmidt 内積

$\|X\|_{\mathrm{F}} := \sqrt{\langle X, X\rangle}$: Frobenius ノルム

- 新しい演算子を定義する

$$\tilde{A} := A - \langle A\rangle_\rho$$

$$\tilde{B} := B - \langle B\rangle_\rho$$

- $X = \tilde{A}\sqrt{\rho},\ Y = \tilde{B}\sqrt{\rho}$ としてC-S 不等式を適用

$$\|\tilde{A}\sqrt{\rho}\|_{\mathrm{F}}^2\|\tilde{B}\sqrt{\rho}\|_{\mathrm{F}}^2 \geq |\langle \tilde{A}\sqrt{\rho}, \tilde{B}\sqrt{\rho}\rangle|^2$$

簡単な証明（続き）

$$\tilde{A} := A - \langle A\rangle_\rho,\ \tilde{B} := B - \langle B\rangle_\rho$$

$$\underline{\|\tilde{A}\sqrt{\rho}\|_{\mathrm{F}}^2\|\tilde{B}\sqrt{\rho}\|_{\mathrm{F}}^2 \geq |\langle\tilde{A}\sqrt{\rho}, \tilde{B}\sqrt{\rho}\rangle|^2}$$

- 左辺 : $\|\tilde{A}\sqrt{\rho}\|_{\mathrm{F}}^2 = \mathrm{Tr}(\tilde{A}\sqrt{\rho})^\dagger\tilde{A}\sqrt{\rho}$
$$= \mathrm{Tr}\sqrt{\rho}\tilde{A}\tilde{A}\sqrt{\rho} = \mathrm{Tr}\tilde{A}^2\rho$$
$$= \left\langle(A - \langle A\rangle_\rho)^2\right\rangle_\rho = \sigma_\rho(A)^2$$

- 右辺 : $|\langle\tilde{A}\sqrt{\rho}, \tilde{B}\sqrt{\rho}\rangle_\rho|^2 = |\ \mathrm{Tr}(\tilde{A}\sqrt{\rho})^\dagger\tilde{B}\sqrt{\rho}\ |^2$
$$= |\ \mathrm{Tr}\tilde{A}\tilde{B}\rho\ |^2 = |\langle\tilde{A}\tilde{B}\rangle_\rho|^2$$
$$= \left|\ \left\langle\frac{\tilde{A}\tilde{B} + \tilde{B}\tilde{A}}{2}\right\rangle_\rho + i\left\langle\frac{\tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A}}{2i}\right\rangle_\rho\ \right|^2$$
$$= \underline{\left|\left\langle\frac{AB + BA}{2}\right\rangle_\rho - \langle A\rangle_\rho\langle B\rangle_\rho\right|^2 + \left|\left\langle\frac{AB - BA}{2i}\right\rangle_\rho\right|^2}$$

不確定性関係の初期の展開

- 1927 : Heisenberg
  - 不確定性関係の提唱
- 1927 : Kennard
  - 位置と運動量に関する不等式
- 1928 : Weyl
  - Kennardの不等式の別証
- 1929 : Robertson
  - Kennard不等式を一般の物理量に拡張
- 1930 : Schrödinger
  - Robertsonに準古典項を含む不等式を提示

その他の定式化（一例）

- ■ 状態準備に関する不確定性関係
  - ➢ 分散積
    Kennard (1927); Weyl (1928); Robertson (1929); Schrödinger (1930)
  - ➢ 分散和
    Maccone & Pati (2014), etc.
  - ➢ 不確定性領域
    Li and Qiao (2015), etc.
  - ➢ エントロピー
    Deutsch (1983); Massaen and Uffink (1988), etc.
  - ➢ 他にもたくさん : Fisher info., Wigner-Yanase skew info., maximum prob. …

- ■ 測定型の不確定性関係
  - ➢ 同時測定における推定量の誤差
    Arthurs-Kelly-Goodman (1965, 1988)
  - ➢ 誤差と擾乱
    Ozawa (2004); Branciard (2013)
  - ➢ 推定誤差 / 推定誤差と擾乱
    Watanabe-Sagawa-Ueda (2011)

宣伝（もっと知りたい方へ）

- 量子論の基礎
  - 石坂智・小川朋宏・河内亮周・木村元・林正人
    「量子情報科学入門 第2版」（共立出版，2024）

- 不確定性関係の網羅的な解説
  - 谷村省吾「多様化する不確定性関係」電子版（2016）
    https://t.co/IM7bWHmsGr
  - Y. Watanabe, “Formulation of Uncertainty Relation Between Error and Disturbance in Quantum Measurement by Using Quantum Estimation Theory”, Springer Thesis (2014).

本日の内容

【前半】 不確定性関係の基礎

- 初期の展開
- Robertson・Schrödingerの定式化

【後半】 新たな定式化の紹介

- Type 1：交換子のノルムを用いた拡張
- Type 2：Robertsonタイプの係数の一般化

新たな定式化（概要）

－Schrödinger不等式の拡張－

$$\sigma_\rho(A)^2\sigma_\rho(B)^2 \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle_\rho|^2 + \mathrm{Cov}_\rho(A,B)^2 \ {\color{red}+c(\rho)f_\rho([A,B])}$$

期待値	$\langle A\rangle_\rho := \mathrm{Tr}(A\rho)$
分散	$\sigma_\rho(A)^2 := \left\langle (A-\langle A\rangle_\rho)^2 \right\rangle_\rho = \langle A^2\rangle_\rho - \langle A\rangle_\rho^2$
交換子	$[A,B] := AB - BA$
共分散	$\mathrm{Cov}_\rho(A,B)^2 := \left\langle \frac{AB+BA}{2} \right\rangle_\rho - \langle A\rangle_\rho\langle B\rangle_\rho$

- 混合状態のときに現れるタイトな下限
- 状態の固有値と交換子に依存して決まる

➡ Type 1
➡ Type 2

Kimura, Mayumi, Ohno, Lee, Chruściński (2025)
Kimura, Mayumi, Yamashita (2025)

Schrödinger不等式の拡張：Type 1

$$\sigma_\rho(A)^2\sigma_\rho(B)^2 \geq \frac{1}{4}|\langle [A,B]\rangle_\rho|^2 + \mathrm{Cov}_\rho(A,B)^2 + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\|[A,B]\|_\rho^2$$

$\lambda_1,\ \lambda_2$ ：ρ の最小固有値，2番目に小さい固有値

$\|A\|_\rho := \mathrm{Tr}A^\dagger A\rho$ ：ρ ノルム（詳細は次頁）

* Phys. Rev. A 110, 062215 (2024)
* Linear Algebra Appl., 700, 35-49 (2024)
* arXiv:2504.20404

Schrödinger不等式の拡張：Type 1

- ρ に依存した内積・ノルム

$$\langle X, Y \rangle := \mathrm{Tr} X^\dagger Y \quad \blacktriangleright \quad \langle X, Y \rangle_\rho := \mathrm{Tr} X^\dagger Y \rho$$ ：ρ 内積

$$\|X\|_\mathrm{F} := \sqrt{\langle X, X \rangle} \quad \blacktriangleright \quad \|X\|_\rho := \sqrt{\langle X, X \rangle_\rho}$$ ：ρ ノルム

- ➢ ρ ノルムによる分散の表現

$$\|\tilde{A}\|_\rho^2 = \mathrm{Tr}\tilde{A}^2\rho = \left\langle (A - \langle A \rangle_\rho)^2 \right\rangle_\rho = \sigma_\rho(A)^2$$

$$\tilde{A} := A - \langle A \rangle_\rho$$

Schrödinger不等式の拡張：Type 1

- ρ に依存した内積・ノルム

$$\langle X, Y \rangle := \mathrm{Tr} X^\dagger Y \quad ▶ \quad \langle X, Y \rangle_\rho := \mathrm{Tr} X^\dagger Y \rho$$

：ρ 内積

$$\|X\|_{\mathrm{F}} := \sqrt{\langle X, X \rangle} \quad \|X\|_\rho := \sqrt{\langle X, X \rangle_\rho}$$

：ρ ノルム

➢ ρ 内積についての CS 不等式 → Schrodinger不等式

$$\|\tilde{A}\|_\rho^2 \|\tilde{B}\|_\rho^2 \geq |\langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle_\rho|^2$$

$$\Leftrightarrow \sigma_\rho(A)^2 \sigma_\rho(B)^2 \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B] \rangle_\rho|^2 + \mathrm{Cov}_\rho(A, B)^2$$

Schrödinger不等式の拡張：Type 1

■ 問題：任意の（エルミート）行列 A, B に対して
最適な係数 $c(\rho)$ は何か？

$$\|A\|_\rho^2 \|B\|_\rho^2 \geq c(\rho) \|[A, B]\|_\rho^2$$

ρ ノルムによる一般化

Böttcher-Wenzel 不等式 (2008)

$$\|A\|_{\mathrm{F}}^2 \|B\|_{\mathrm{F}}^2 \geq \frac{1}{2} \|[A, B]\|_{\mathrm{F}}^2$$

A. Mayumi, G. K., H. Ohno, D. Chruściński, Phys. Rev. A **110**, 062215 (2024).

Schrödinger不等式の拡張：Type 1

■ 定理 1

任意の**複素行列** A，任意の**正規行列** B，および密度行列 ρ に対して，次の不等式が成り立つ：

$$\|A\|_\rho^2\|B\|_\rho^2 \geq \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\|[A,B]\|_\rho^2$$

ここで，λ_1 と λ_2 は ρ の最小固有値および2番目に小さい固有値である.

この不等式はタイトである
（ 等号が成立するような(エルミート)行列 A,B が存在する ）．

$$\tilde{A} := A - \langle A\rangle_\rho \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\sigma_\rho(A)^2\sigma_\rho(B)^2 \geq \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\|[A,B]\|_\rho^2}$$

Linear Algebra Appl. **700**, 35 (2024).　arXiv:2504.20404 (2025).

Schrödinger不等式の拡張：Type 1

■ 補題 1

任意の複素行列Aと正規行列Bについて，係数 $c(\rho) \geq 0$ と密度行列 ρ に対して不等式

$$\|A\|_\rho^2 \|B\|_\rho^2 \geq c(\rho) \|[A, B]\|_\rho^2$$

が成り立つならば，下記の不等式も成り立つ：

$$\underbrace{\|A\|_\rho^2 \|B\|_\rho^2 - |\langle A, B \rangle_\rho|^2}_{\text{Schwarz不等式の両辺の差}} \geq c(\rho) \|[A, B]\|_\rho^2$$

$\tilde{A} := A - \langle A \rangle_\rho$

$c(\rho) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$

$$\sigma_\rho(A)^2 \sigma_\rho(B)^2 \geq \underbrace{|\langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle_\rho|^2}_{\text{Schrödingerの下限}} + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \|[A, B]\|_\rho^2$$

補足：定理1 の証明（スケッチ）

Proof. Using the fact that Y is a normal matrix, it admits an eigenvalue decomposition of the form $Y = \sum_i y_i \left|i\right\rangle\!\left\langle i\right|$, where $\left|i\right\rangle$ is an orthonormal basis of eigenvectors. Then,

$$[X,Y] = (\sum_i \left|i\right\rangle\!\left\langle i\right|)XY - (\sum_i y_i \left|i\right\rangle\!\left\langle i\right|)X = \sum_i X_i Y_i$$

where $X_i := \left|i\right\rangle\!\left\langle i\right| X$ and $Y_k := Y - y_k \mathbb{I}$. Since $X_i^\dagger X_j = \delta_{ij} X^\dagger \left|i\right\rangle\!\left\langle i\right| X$, we have

$$\|[X,Y]\|_\omega^2 = \mathrm{Tr}\Big(\sum_i X_i Y_i\Big)^\dagger \Big(\sum_j X_j Y_j\Big)\omega = \sum_i \left\langle \xi_i \middle| Y_i \omega Y_i^\dagger \middle| \xi_i \right\rangle$$

where $\left|\xi_i\right\rangle := X^\dagger \left|i\right\rangle$. On the other hand,

$$\|X\|_\omega^2 = \mathrm{Tr}\big(X^\dagger X \omega\big) = \mathrm{Tr}\big(X \omega X^\dagger\big) = \sum_i \left\langle i \middle| X \omega X^\dagger \middle| i \right\rangle = \sum_i \left\langle \xi_i \middle| \omega \middle| \xi_i \right\rangle,$$

and therefore,

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \|X\|_\omega^2 \|Y\|_\omega^2 - \|[X,Y]\|_\omega = \sum_i \left\langle \xi_i \middle| \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \|Y\|_\omega^2 \omega - Y_i \omega Y_i^\dagger \middle| \xi_i \right\rangle. \quad \geq 0$$

補足：補題1 の証明

$$\|A\|_\rho^2\|B\|_\rho^2 \geq c(\rho)\|[A,B]\|_\rho^2$$
$$\Rightarrow \|A\|_\rho^2\|B\|_\rho^2 - |\langle A,B\rangle_\rho|^2 \geq c(\rho)\|[A,B]\|_\rho^2$$

$$^\forall t \in \mathbb{C} \quad [A,B] = [A+tB, B]$$

$$\underline{\|A+tB\|_\rho^2}\|B\|_\rho^2 \geq c\|[A+tB,B]\|_\rho^2 = c\|[A,B]\|_\rho^2$$

$$t = -\frac{\overline{\langle A,B\rangle_\rho}}{\|B\|_\rho^2}$$

$$\|A+tB\|_\rho^2 = \|A\|_\rho^2 + 2\mathrm{Re}(t\langle A,B\rangle_\rho) + |t|^2\|B\|_\rho^2$$
$$= \|A\|_\rho^2 - \frac{|\langle A,B\rangle_\rho|^2}{\|B\|_\rho^2}$$

Type 1 まとめ

$$\sigma_\rho(A)^2\sigma_\rho(B)^2 \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle_\rho|^2 + \mathrm{Cov}_\rho(A,B)^2$$

$$+\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\|[A,B]\|_\rho^2$$

- $\lambda_1 = 0$ のときは消える
  （Schrödinger不等式に帰着）
- ρ が正則行列のときに厳密な限界を与える
- 混合状態であるほど顕著な寄与

$\lambda_1,\ \lambda_2$ ： ρ の最小固有値，2番目に小さい固有値

$\|A\|_\rho := \mathrm{Tr}A^\dagger A\rho$ ： ρ ノルム

* Phys. Rev. A 110, 062215 (2024) * Linear Algebra Appl., 700, 35-49 (2024) * arXiv:2504.20404

量子ビット系では恒等式に

$$\sigma_\rho(A)^2\sigma_\rho(B)^2 = \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle_\rho|^2 + \mathrm{Cov}_\rho(A,B)^2 + \underbrace{\frac{1-P(\rho)}{2}}_{\text{混合度合い}}\underbrace{\|[A,B]\|_{\mathrm{F}}^2}_{\text{非可換度合い}}$$

純粋度

$$\frac{1}{d} \le P(\rho) := \mathrm{Tr}\rho^2 \le 1$$

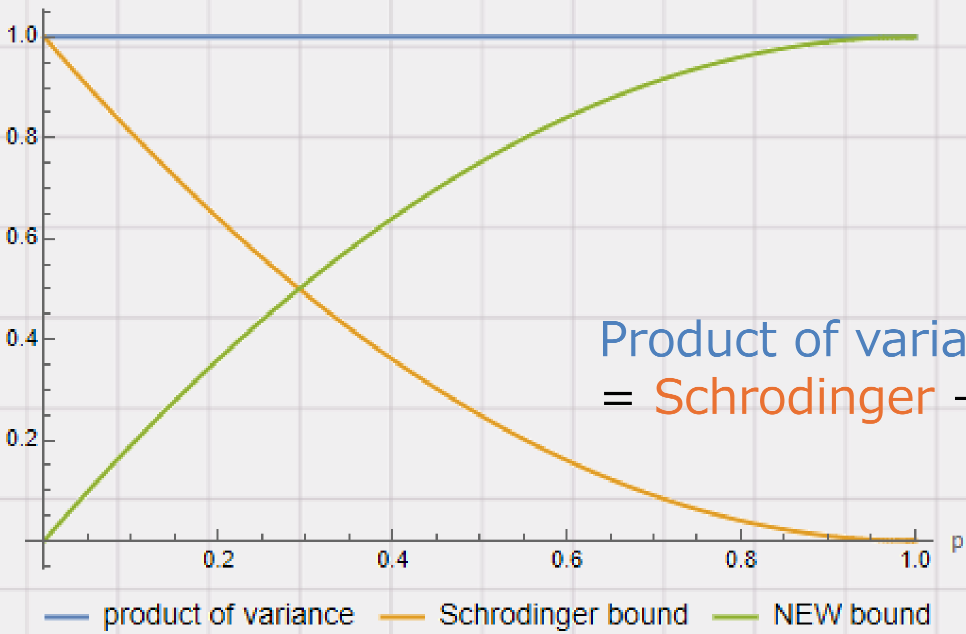
➢ 分散の積 = 非可換性の期待値 + 共分散
+ 系の混合度×非可換性のノルム

∗ Phys. Rev. A 110, 062215 (2024) ∗ Linear Algebra Appl., 700, 35-49 (2024) ∗ arXiv:2504.20404

量子ビット系の簡単な例

$$\sigma_\rho(A)^2\sigma_\rho(B)^2 = \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle_\rho|^2 + \mathrm{Cov}_\rho(A,B)^2 + \frac{1-P(\rho)}{2}\|[A,B]\|_{\mathrm{F}}^2$$

$$\rho = \frac{p}{2}\mathbb{I} + (1-p)|0\rangle\langle 0|,\ \ A = \sigma_x,\ \ B = \sigma_y$$



$$\frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle_\rho|^2 + \mathrm{Cov}_\rho(\mathrm{A},\mathrm{B})^2 = (1-p)^2$$

$$\frac{1-P(\rho)}{2}\|[A,B]\|_\rho^2 = p(2-p)$$

Product of variances
= Schrodinger + Ours

Schrödinger不等式の拡張：Type 1

$$\sigma_\rho(A)^2\sigma_\rho(B)^2 \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle_\rho|^2 + \mathrm{Cov}_\rho(A,B)^2 + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\|[A,B]\|_\rho^2$$

$\lambda_1,\ \lambda_2$ ：ρ の最小固有値，2番目に小さい固有値

$\|A\|_\rho := \mathrm{Tr}A^\dagger A\rho$ ：ρ ノルム（詳細は次頁）

* Phys. Rev. A 110, 062215 (2024)
* Linear Algebra Appl., 700, 35-49 (2024)
* arXiv:2504.20404

Schrödinger不等式の拡張：Type 2

Type 1

$$\|A\|_\rho^2\|B\|_\rho^2 \geq c(\rho)\|[A,B]\|_\rho^2$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_\rho(A)^2\sigma_\rho(B)^2 \geq \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\|[A,B]\|_\rho^2$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_\rho(A)^2\sigma_\rho(B)^2 \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle_\rho|^2 + \mathrm{Cov}_\rho(A,B)^2 + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\|[A,B]\|_\rho^2$$

Type 2

$$\|A\|_\rho^2\|B\|_\rho^2 \geq c(\rho)|\langle[A,B]\rangle_\rho|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_\rho(A)^2\sigma_\rho(B)^2 \geq \frac{(\lambda_1+\lambda_d)^2}{4(\lambda_d-\lambda_1)^2}|\langle[A,B]\rangle|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_\rho(A)^2\sigma_\rho(B)^2 \geq \frac{(\lambda_d+\lambda_1)^2}{4(\lambda_d-\lambda_1)^2}|\langle[A,B]\rangle_\rho|^2 + \mathrm{Cov}_\rho(A,B)^2$$

Kimura, Mayumi, Yamashita (2025)

Type 2 の証明

$$\rho = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_d)$$

Split into Diagonal / Off-Diagonal Parts $A = A_d + A_n,\ B = B_d + B_n$

$$\begin{cases} \|A\|_\rho^2 = \|A_d\|_\rho^2 + \|A_n\|_\rho^2 \geq \|A_n\|_\rho^2 \\ |\langle [A_n, B_n] \rangle_\rho| = |\langle [A, B] \rangle_\rho| \end{cases}$$

$$\left|\mathrm{Tr}[A,B]\rho\right|^2 = \left|\sum_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i)\left(a_{ji}b_{ij} - a_{ij}b_{ji}\right)\right|^2 \leq 4\left|\sum_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i)a_{ij}\overline{b_{ji}}\right|^2.$$

Schwarz Ineq.

$$\frac{1}{4(\lambda_d - \lambda_1)^2}\left|\mathrm{Tr}[A,B]\rho\right|^2 \leq \left|\sum_{i<j}\frac{\lambda_j - \lambda_i}{\lambda_d - \lambda_1}a_{ij}\overline{b_{ij}}\right|^2 \leq \left(\sum_{i<j}\frac{\lambda_j - \lambda_i}{\lambda_d - \lambda_1}|a_{ij}|^2\right)\left(\sum_{i<j}\frac{\lambda_j - \lambda_i}{\lambda_d - \lambda_1}|b_{ij}|^2\right).$$

$$\frac{\lambda_j - \lambda_i}{\lambda_d - \lambda_1} \leq \frac{\lambda_i + \lambda_j}{\lambda_1 + \lambda_d}$$

$$\leq \left(\sum_{i<j}\frac{\lambda_i + \lambda_j}{\lambda_1 + \lambda_d}|a_{ij}|^2\right)\left(\sum_{i<j}\frac{\lambda_i + \lambda_j}{\lambda_1 + \lambda_d}|b_{ij}|^2\right).$$

$$= \frac{1}{(\lambda_1 + \lambda_d)^2}\|A\|_\rho^2\|B\|_\rho^2$$

Kimura, Mayumi, Yamashita (2025)

最大混合状態のケース

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_d \iff \rho = \rho_{\max} = \frac{\mathbb{I}}{d}$$

$$\sigma_\rho(A)^2\sigma_\rho(B)^2 \geq \underbrace{\frac{(\lambda_d+\lambda_1)^2}{4(\lambda_d-\lambda_1)^2}}_{\infty}\underbrace{|\langle[A,B]\rangle_\rho|^2}_{0} + \mathrm{Cov}_\rho(A,B)^2$$

$$\left(\begin{array}{l} \rho_n \ (n=1,2,\cdots) \\ \lambda_1 = \frac{1}{d}-\frac{1}{n},\ \lambda_i = \frac{1}{d}+\frac{1}{n(d-1)} \ (i \geq 2) \end{array}\right) \quad \rho_{\max} = \lim_{n\to\infty}\rho_n$$

▶ $$\sigma_{\rho_{\max}}(A)^2\sigma_{\rho_{\max}}(B)^2 \geq \frac{1}{d^2}\|[A,B]\|_{\mathrm{op}}^2 + \mathrm{Cov}_\rho(A,B)^2$$

$\|A\|_{\mathrm{op}}$ ：作用素ノルム

Kimura, Mayumi, Yamashita (2025)

まとめ

d=2では常に等号

Type1:

$$\sigma_\rho(A)^2\sigma_\rho(B)^2 \geq \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle_\rho|^2 + \mathrm{Cov}_\rho(A,B)^2 + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\|[A,B]\|_\rho^2$$

Type2:

$$\sigma_\rho(A)^2\sigma_\rho(B)^2 \geq \frac{(\lambda_d+\lambda_1)^2}{4(\lambda_d-\lambda_1)^2}|\langle[A,B]\rangle_\rho|^2 + \mathrm{Cov}_\rho(A,B)^2$$

- Another Family of Uncertainty Relation

$$\|A\|_\rho^2\|B\|_\rho^2 \geq c(\rho)\|[A,B]\|_p^2 \leftarrow \min_{A=A^\dagger,B=B^\dagger}\frac{\|A\|_\rho^2\|B\|_\rho^2}{\|[A,B]\|_p^2}$$

$$\|X\|_p := (\mathrm{Tr}|X|^p)^{\frac{1}{p}}$$

Kimura, Mayumi, Ohno, Lee, Chruściński, arXiv:2504.20404 (2025)
Kimura, Mayumi, Yamashita, arXiv:2505.19861 (2025)