

一般確率論 ～古典・量子論の基礎付けから量子情報理論への応用まで～

荒井駿 (Hayato Arai)

NTT コミュニケーション科学基礎研究所 情報基礎理論研究グループ/基礎数学センタ

東京女子大 理論物理研究室セミナー

自己紹介 荒井駿 (Hayato Arai)

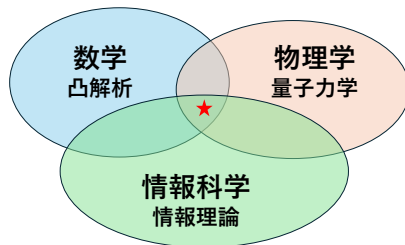


■ 経歴

- 2023 年 名古屋大学多元数理科学研究科 博士 (数理学) 取得 (一般確率論/量子情報理論, 林正人 研)
- 2023-2025 年 理研 RQC 数理量子情報白眉研究チーム (Bartosz Regula チーム)
- 2025 年- 2026 年 東京大学 総合文化研究科 (高木隆司研 学振 PD)
- 2026 年- 現在 NTT コミュニケーション科学基礎研究所 情報基礎理論研究グループ /同 基礎数学センタ

■ 専門

- 一般確率論
- 量子情報理論 (仮説検定, リソース理論)
- (数学的には) 凸解析, 行列解析



発表の概要

- 一般確率論：操作的な公理によって定まる数理モデルを扱う枠組み
- 古典情報理論や量子情報理論以外の無数のモデルが存在
- この発表では、量子情報理論の知識を仮定せずに、一般確率論の概要を含めて簡単に紹介。→私の研究を中心に抜粋して簡単に紹介。
- 一般確率論の主題：量子論の数理モデルの導出（めちゃくちゃ基礎）
- 一般確率論の量子情報への寄与：量子情報理論の対象の解析、数理構造の解析
- 新しい方向性：一般確率モデルの量子論内部での実現（直接的な応用）

発表の概要

- 一般確率論：操作的な公理によって定まる数理モデルを扱う枠組み
- 古典情報理論や量子情報理論以外の無数のモデルが存在
- この発表では、量子情報理論の知識を仮定せずに、一般確率論の概要を含めて簡単に紹介。→私の研究を中心に抜粋して簡単に紹介。
- 一般確率論の主題：量子論の数理モデルの導出（めちゃくちゃ基礎）
- 一般確率論の量子情報への寄与：量子情報理論の対象の解析、数理構造の解析
- 新しい方向性：一般確率モデルの量子論内部での実現（直接的な応用）

Outline

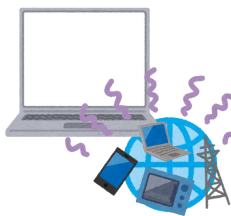
- ① 【前半】 Introduction：一般確率論の定義と意義
- ② 【前半】 一般確率論のこれまでの結果
- ③ 【前半】 前半まとめ
- ④ 【後半】 間主観性による物理量と非古典性の特徴付け
arXiv:2603.01575
- ⑤ 【後半】 一般確率論と量子論の接続：事前情報事後選択を用いた超量子測定の実現
arXiv:2411.01873
- ⑥ まとめ：一般確率論の今後
- ⑦ Appendix

Outline

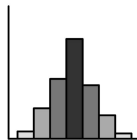
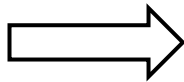
- 1 【前半】 Introduction：一般確率論の定義と意義
- 2 【前半】 一般確率論のこれまでの結果
- 3 【前半】 前半まとめ
- 4 【後半】 間主観性による物理量と非古典性の特徴付け
arXiv:2603.01575
- 5 【後半】 一般確率論と量子論の接続：事前情報事後選択を用いた超量子測定の実現
arXiv:2411.01873
- 6 まとめ：一般確率論の今後
- 7 Appendix

一般確率論とは

- 一般確率論 (General Probabilistic Theories, GPTs) :
プロセス (状態と測定) が**確率分布を生成する**ような数理モデル全体を扱う枠組み
- 古典情報理論, 量子情報理論の数学的一般化
- 古典量子以外の無数の仮想モデルが存在



情報プロセス



確率分布

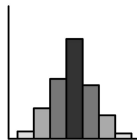
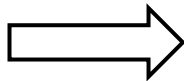
計算, 通信, 暗号に
都合の良いビット

一般確率論とは

- 一般確率論 (General Probabilistic Theories, GPTs) :
プロセス (状態と測定) が**確率分布を生成する**ような数理モデル全体を扱う枠組み
- 古典情報理論, 量子情報理論の数学的一般化
- 古典量子以外の無数の仮想モデルが存在



量子的プロセス

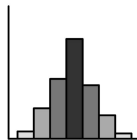
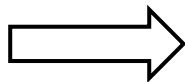
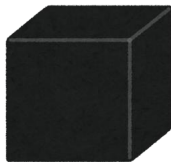


確率分布

計算, 通信, 暗号に
都合の良いビット

一般確率論とは

- 一般確率論 (General Probabilistic Theories, GPTs) :
プロセス (状態と測定) が**確率分布を生成する**ような数理モデル全体を扱う枠組み
- 古典情報理論, 量子情報理論の数学的一般化
- 古典量子以外の無数の仮想モデルが存在



原理的に可能な
プロセス

確率分布

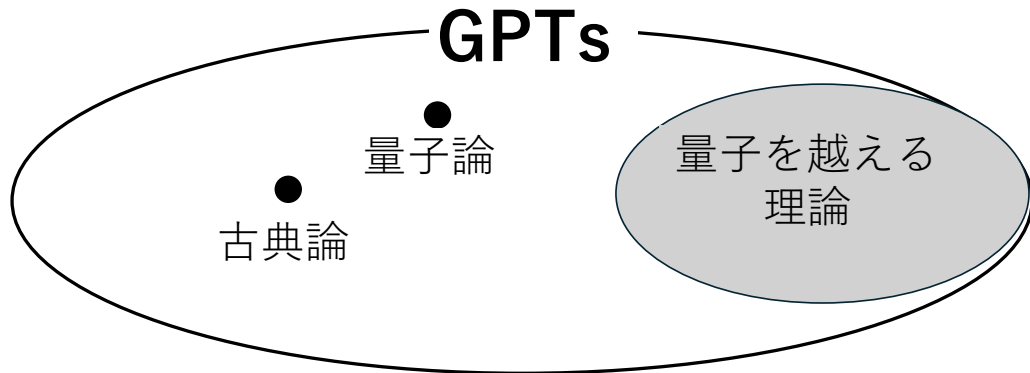
計算, 通信, 暗号に
都合の良いビット

一般確率論とは

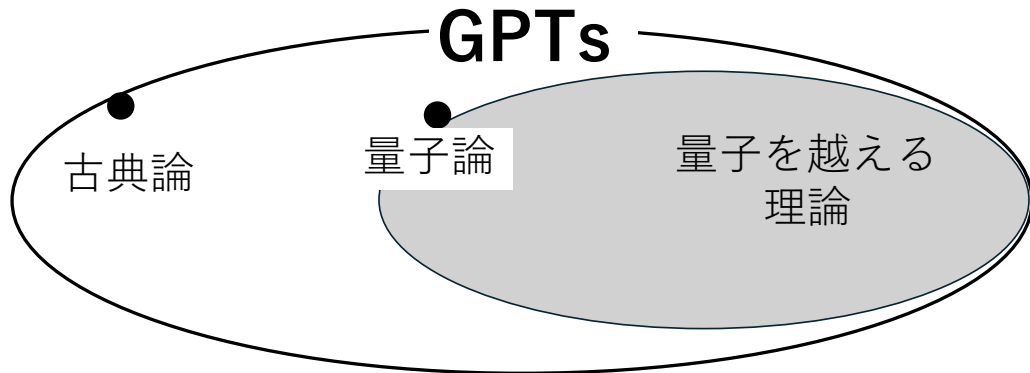
- 一般確率論 (General Probabilistic Theories, GPTs) :
プロセス (状態と測定) が**確率分布を生成する**ような数理モデル全体を扱う枠組み
- 古典情報理論, 量子情報理論の数学的一般化
- 古典量子以外の無数の仮想モデルが存在

- 情報を生成するプロセスが満たす最低限の公理を仮定
- 古典, 量子に限らない様々な数理モデルの性質を議論する
- 数学的/普遍的枠組みから情報理論を理解する

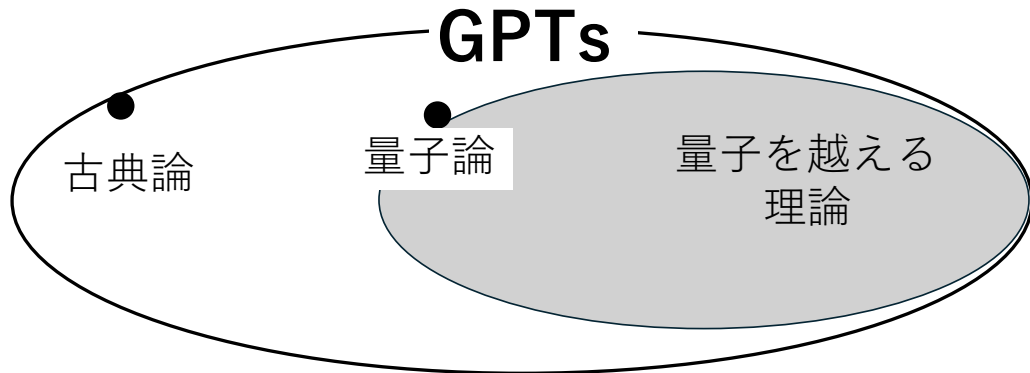
一般確率論とは



一般確率論とは



一般確率論とは



数学的には量子論に漸近するモデルも
遥かに超える理論も存在する

一般確率論とは

- 一般確率論 (General Probabilistic Theories, GPTs) :
状態と測定によって確率分布を生成するような数理モデル全体を扱う枠組み
- 古典情報理論, 量子情報理論の数学的一般化
- 古典量子以外の無数の仮想モデルが存在

- 数学的/普遍的枠組みから情報理論を理解する
- 分かりやすい結果 :
 - ▶ Tirlson's bound (量子の相関限界) を破るモデルが存在 (PR-box) [PR1994]
 - ▶ No Cloning は古典論以外で成り立つ (古典論は唯一情報の複製が可能な理論) [BBLW2006]
 - ▶ No Entanglement は古典論だけの性質 (古典論は唯一相関が許されない理論) [ALPP2022]

一般確率論とは

- 一般確率論 (General Probabilistic Theories, GPTs) :
状態と測定によって確率分布を生成するような数理モデル全体を扱う枠組み
- 古典情報理論, 量子情報理論の数学的一般化
- 古典量子以外の無数の仮想モデルが存在

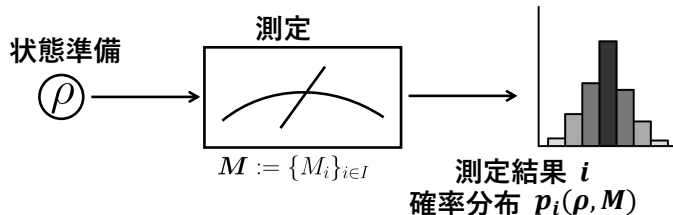
- 数学的/普遍的枠組みから情報理論を理解する
- 分かりやすい結果 :
 - ▶ Tirlson's bound (量子の相関限界) を破るモデルが存在 (PR-box) [PR1994]
 - ▶ No Cloning は古典論以外で成り立つ (古典論は唯一情報の複製が可能な理論) [BBLW2006]
 - ▶ No Entanglement は古典論だけの性質 (古典論は唯一相関が許されない理論) [ALPP2022]
- 大きな謎: 古典量子以外のモデルは物理的に実在しなさそう...?

一般確率論とは

- 一般確率論 (General Probabilistic Theories, GPTs) :
状態と測定によって確率分布を生成するような数理モデル全体を扱う枠組み
 - 古典情報理論, 量子情報理論の数学的一般化
 - 古典量子以外の無数の仮想モデルが存在
 - 数学的/普遍的枠組みから情報理論を理解する
 - 分かりやすい結果 :
 - ▶ Tirlson's bound (量子の相関限界) を破るモデルが存在 (PR-box) [PR1994]
 - ▶ No Cloning は古典論以外で成り立つ (古典論は唯一情報の複製が可能な理論) [BBLW2006]
 - ▶ No Entanglement は古典論だけの性質 (古典論は唯一相関が許されない理論) [ALPP2022]
 - 大きな謎: 古典量子以外のモデルは物理的に実在しなさそう...?
- 古典量子を選択する何らかの原理がある?
- 古典量子以外の仮想モデルの応用可能性は?

操作的公理

- 状態 ρ : 装置の設定 ρ を準備する
- 測定 M : 測定の設定 M を作用し測定結果 i を得る
- 確率生成規則 $p_i(\rho, M)$
- (通信路/操作 : 設定の変更/変換)



操作的公理

- 状態 ρ : 装置の設定 ρ を準備する
- 測定 M : 測定の設定 M を作用し測定結果 i を得る
- 確率生成規則 $p_i(\rho, M)$
- (通信路/操作 : 設定の変更/変換)
- 任意の測定によって生成される確率が等しいならその状態は等しい
 $p_i(\rho, M) = p_i(\rho', M)$ for any $M \Rightarrow \rho \sim \rho'$
- 任意の状態によって生成される確率が等しいならその測定は等しい
- 状態や測定の randomization (coin flip) も再び状態や測定
- 確率生成規則 $p_i(\rho, M)$ は ρ や M に関してアフィンの (randomization を保存)
- 測定選択によって状態が変化しない (未来からの干渉がない)

→ これらの公理からベクトル空間とその上の positive cone の構造が数学的に導出される

準備 : Positive Cone と Dual Cone

$\mathcal{V}$ を内積 $\langle, \rangle$ 付, 有限次元実ベクトル空間

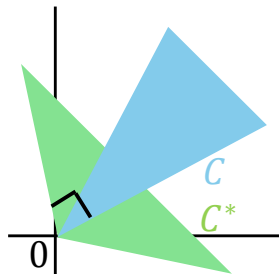
- Positive cone $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}$
 - ▶ 閉凸
 - ▶ $\forall x \in \mathcal{C}, \forall r \geq 0, rx \in \mathcal{C}$
 - ▶ 内点を持つ
- Dual cone $\mathcal{C}^* \subset \mathcal{V}$
 - ▶ $\mathcal{C}^* := \{f \in \mathcal{V}^* \mid f(y) \geq 0 \ \forall y \in \mathcal{C}\}$
 - ▶ $\simeq \{x \in \mathcal{V} \mid \langle x, y \rangle \geq 0 \ \forall y \in \mathcal{C}\}$
- 具体例: 単体 $\mathcal{C} = \Delta_n$ や $\mathcal{C} = \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H})$ は positive cone
→ これらの例では $\mathcal{C}^* \simeq \mathcal{C}$
- $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{C}^* \subset (\mathcal{C}')^*$

Notations

$\mathcal{H}$: 有限次元ヒルベルト空間

$\mathcal{L}_H(\mathcal{H})$: $\mathcal{H}$ 上のエルミート行列全体

$\mathcal{L}_H^+(\mathcal{H})$: $\mathcal{H}$ 上の半正定値行列全体



準備 : Positive Cone と Dual Cone

$\mathcal{V}$ を内積 $\langle, \rangle$ 付, 有限次元実ベクトル空間

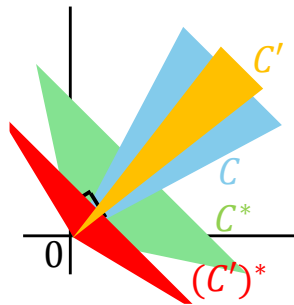
- Positive cone $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}$
 - ▶ 閉凸
 - ▶ $\forall x \in \mathcal{C}, \forall r \geq 0, rx \in \mathcal{C}$
 - ▶ 内点を持つ
- Dual cone $\mathcal{C}^* \subset \mathcal{V}$
 - ▶ $\mathcal{C}^* := \{f \in \mathcal{V}^* \mid f(y) \geq 0 \ \forall y \in \mathcal{C}\}$
 - ▶ $\simeq \{x \in \mathcal{V} \mid \langle x, y \rangle \geq 0 \ \forall y \in \mathcal{C}\}$
- 具体例: 単体 $\mathcal{C} = \Delta_n$ や $\mathcal{C} = \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H})$ は positive cone
→ これらの例では $\mathcal{C}^* \simeq \mathcal{C}$
- $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{C}^* \subset (\mathcal{C}')^*$

Notations

$\mathcal{H}$: 有限次元ヒルベルト空間

$\mathcal{L}_H(\mathcal{H})$: $\mathcal{H}$ 上のエルミート行列全体

$\mathcal{L}_H^+(\mathcal{H})$: $\mathcal{H}$ 上の半正定値行列全体



一般確率モデルの定義

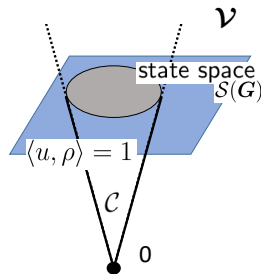
一般確率モデル G は内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 付き $\mathcal{V}$ 上の positive cone $\mathcal{C}$ と正規化元 $u \in \mathcal{C}^*$ によって定まる.

- 状態 $\rho \in \mathcal{S}(G)$
 - ▶ $\rho \in \mathcal{C}$
 - ▶ $\langle u, \rho \rangle = 1$
- 測定 $\{M_i\}_i \in \mathcal{M}(G)$
 - ▶ $M_i \in \mathcal{C}^*$
 - $\Leftrightarrow \langle M_i, \rho \rangle \geq 0 \ (\forall \rho \in \mathcal{C})$
 - ▶ $\sum_i M_i = u$
- 測定値 i を得る確率
 - ▶ $p_i = \langle M_i, \rho \rangle$

→ 一般確率モデルは $G = (\mathcal{V}, \mathcal{C}, u)$ によって定まる

対応表

GPT	量子	古典
$\mathcal{V}, \langle x, y \rangle$	$\mathcal{L}_H(\mathcal{H}), \text{Tr } xy$	$\mathbb{R}^n, x \cdot y$
$\mathcal{C}$	$\mathcal{L}_H^+(\mathcal{H})$	Δ_n
u	$\mathbb{I}$	$\mathbf{1}$



一般確率モデルの定義

一般確率モデル G は内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 付き $\mathcal{V}$ 上の positive cone $\mathcal{C}$ と正規化元 $u \in \mathcal{C}^*$ によって定まる.

- 状態 $\rho (\in \mathcal{S}(G))$
 - ▶ $\rho \in \mathcal{C}$
 - ▶ $\langle u, \rho \rangle = 1$
- 測定 $\{M_i\}_i (\in \mathcal{M}(G))$
 - ▶ $M_i \in \mathcal{C}^*$
 - $\Leftrightarrow \langle M_i, \rho \rangle \geq 0 \ (\forall \rho \in \mathcal{C})$
 - ▶ $\sum_i M_i = u$
- 測定値 i を得る確率
 - ▶ $p_i = \langle M_i, \rho \rangle$

→ 一般確率モデルは $G = (\mathcal{V}, \mathcal{C}, u)$ によって定まる

対応表

GPT	量子	古典
$\mathcal{V}, \langle x, y \rangle$	$\mathcal{L}_H(\mathcal{H}), \text{Tr } xy$	$\mathbb{R}^n, x \cdot y$
$\mathcal{C}$	$\mathcal{L}_H^+(\mathcal{H})$	Δ_n
u	$\mathbb{I}$	$\mathbf{1}$

操作的要請

- $\{p_i\}$ は確率分布
 - $\langle M_i, \rho \rangle \geq 0$
 - $\sum_i \langle M_i, \rho \rangle = 1$

一般確率論のモデルの数学的定義

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の量子論 (QT)

- 状態 ρ (密度行列)
 - $\rho \in \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H})$
 - $\text{Tr } \rho = 1$
 - 測定 $\{M_i\}_i$ (Positive-Operator-Valued Measure)
 - $M_i \in \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H})$
 - $\Leftrightarrow \text{Tr } \rho M_i \geq 0 \ (\forall \rho \in \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H}))$
 - $\sum_i M_i = \mathbb{I}$
 - 状態 ρ に測定 $\{M_i\}$ を適用
 - $\rightarrow$ 測定値 i を確率 $p_i = \text{Tr } \rho M_i$ で得る
- $\rightarrow$ 量子論は $\mathcal{L}_H^+(\mathcal{H})$ で定まる

対応表

GPT	量子	古典
$\mathcal{V}, \langle x, y \rangle$	$\mathcal{L}_H(\mathcal{H}), \text{Tr } xy$	$\mathbb{R}^n, x \cdot y$
$\mathcal{C}$	$\mathcal{L}_H^+(\mathcal{H})$	Δ_n
u	$\mathbb{I}$	$\mathbf{1}$

操作的要請

- $\{p_i\}$ は確率分布である
 - $\text{Tr } \rho M_i \geq 0$
 - $\sum_i \text{Tr } \rho M_i = 1$

一般確率論のモデルの数学的定義

n 次 (n 変数) の古典論 (CT) : $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$,

$\mathcal{C} = \Delta_n := \{(x_k)_k \in \mathbb{R}^n \mid x_k \geq 0\}$,

$u = (1, 1, \dots, 1)$

- 状態 ρ (確率分布)

- ▶ $\rho \in \Delta_n$
- ▶ $\sum_k x_k = 1$

- 測定 $\{M_i\}_i$ (イベントの測定/確率変数/stochastic map)

- ▶ $M_i \in \Delta_n$
- ⇔ $\rho \cdot M_i \geq 0$ ($\forall \rho \in \Delta_n$)
- ▶ $\sum_i M_i = (1, 1, \dots, 1)$
- ▶ 例: $M_{\text{odd}} = (1, 0, 1, \dots)$, $M_{\text{even}} = (0, 1, 0, \dots)$

- 状態 ρ に測定 $\{M_i\}$ を適用

→ 測定値 i を確率 $p_i = \rho \cdot M_i$ で得る

対応表

GPT	量子	古典
$\mathcal{V}, \langle x, y \rangle$	$\mathcal{L}_H(\mathcal{H}), \text{Tr } xy$	$\mathbb{R}^n, x \cdot y$
$\mathcal{C}$	$\mathcal{L}_H^+(\mathcal{H})$	Δ_n
u	$\mathbb{I}$	$\mathbf{1}$

操作的要請

- $\{p_i\}$ は確率分布である
 - ▶ $\rho \cdot M_i \geq 0$
 - ▶ $\sum_i \rho \cdot M_i = 1$

一般確率論における情報処理

- モデル $G = (\mathcal{V}, \langle, \rangle, \mathcal{C}, u)$ が定まると、その上の情報処理に関する命題が成立する

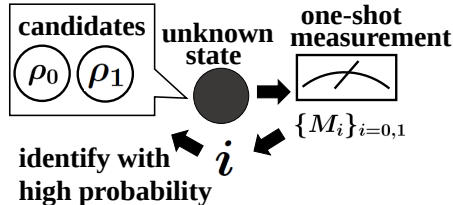
Statement (一般確率モデルの完全識別性と直交性の関係)

モデル G における 2 状態 $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{S}(G)$ が完全識別可能なことと、 $\langle \rho_0, \rho_1 \rangle = 0$ は同値。

※ 2 状態 ρ_0, ρ_1 が完全識別可能とは、ある測定 $\{M_0, M_1\} \in \mathcal{M}(G)$ が存在して、 $p_{ij} := \langle \rho_i, M_j \rangle = \delta_{ij}$ を満たすこと

- この主張は G が古典論か量子論のときには正しい
- 一般には正しくない
(非直交な完全識別可能状態が存在 [AYH2019])

→ あるモデルでは状態識別に関して
古典量子よりも優位



一般確率モデルの具体例

- $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, $\dim(\mathcal{H}_A) = \dim(\mathcal{H}_B) = 2$
 $\mathcal{C} := \{\sum_i p_i A_i \otimes B_i \mid A_i \in \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H}_A), B_i \in \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H}_B), \sum_i p_i = 1\}$ (**separable** な元全体)
- Horodecki's criterion $\rightarrow \mathcal{C}^*$ は **部分転置** Γ によって表される :

$$\mathcal{C}^* := \{Y \in \mathcal{L}_H(\mathcal{H}) \mid \text{Tr } XY \geq 0 \ \forall X \in \mathcal{C}\} = \left\{ \sum_i X_i + \Gamma(Y_i) \mid X_i, Y_i \in \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H}) \right\} \quad (1)$$

$$\Gamma(X) := \left(\begin{array}{cc|cc} x_{11} & \textcolor{red}{x_{21}} & x_{13} & \textcolor{red}{x_{23}} \\ \textcolor{red}{x_{12}} & x_{22} & \textcolor{red}{x_{14}} & x_{24} \\ \hline x_{31} & \textcolor{red}{x_{41}} & x_{33} & \textcolor{red}{x_{43}} \\ \textcolor{red}{x_{32}} & x_{42} & \textcolor{red}{x_{34}} & x_{44} \end{array} \right) \quad \text{for } X = \left(\begin{array}{cc|cc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ \hline x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{array} \right)$$

一般確率モデルの具体例

- $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, $\dim(\mathcal{H}_A) = \dim(\mathcal{H}_B) = 2$
 $\mathcal{C} := \{\sum_i p_i A_i \otimes B_i \mid A_i \in \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H}_A), B_i \in \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H}_B), \sum_i p_i = 1\}$ (**separable** な元全体)
- Horodecki's criterion $\rightarrow \mathcal{C}^*$ は **部分転置** Γ によって表される :

$$\mathcal{C}^* := \{Y \in \mathcal{L}_H(\mathcal{H}) \mid \text{Tr } XY \geq 0 \ \forall X \in \mathcal{C}\} = \left\{ \sum_i X_i + \Gamma(Y_i) \mid X_i, Y_i \in \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H}) \right\} \quad (1)$$

$$\Gamma(X) := \left(\begin{array}{cc|cc} x_{11} & \textcolor{red}{x_{21}} & x_{13} & \textcolor{red}{x_{23}} \\ \textcolor{red}{x_{12}} & x_{22} & \textcolor{red}{x_{14}} & x_{24} \\ \hline x_{31} & \textcolor{red}{x_{41}} & x_{33} & \textcolor{red}{x_{43}} \\ \textcolor{red}{x_{32}} & x_{42} & \textcolor{red}{x_{34}} & x_{44} \end{array} \right) \quad \text{for } X = \left(\begin{array}{cc|cc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ \hline x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{array} \right)$$

一般確率モデルの具体例

- $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, $\dim(\mathcal{H}_A) = \dim(\mathcal{H}_B) = 2$
 $\mathcal{C} := \{\sum_i p_i A_i \otimes B_i \mid A_i \in \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H}_A), B_i \in \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H}_B), \sum_i p_i = 1\}$ (**separable** な元全体)
- Horodecki's criterion $\rightarrow \mathcal{C}^*$ は **部分転置** Γ によって表される :

$$\mathcal{C}^* := \{Y \in \mathcal{L}_H(\mathcal{H}) \mid \text{Tr } XY \geq 0 \ \forall X \in \mathcal{C}\} = \left\{ \sum_i X_i + \Gamma(Y_i) \mid X_i, Y_i \in \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H}) \right\} \quad (1)$$

$$\Gamma(X) := \left(\begin{array}{cc|cc} x_{11} & \textcolor{red}{x_{21}} & x_{13} & \textcolor{red}{x_{23}} \\ \textcolor{red}{x_{12}} & x_{22} & \textcolor{red}{x_{14}} & x_{24} \\ \hline x_{31} & \textcolor{red}{x_{41}} & x_{33} & \textcolor{red}{x_{43}} \\ \textcolor{red}{x_{32}} & x_{42} & \textcolor{red}{x_{34}} & x_{44} \end{array} \right) \quad \text{for } X = \left(\begin{array}{cc|cc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ \hline x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{array} \right)$$

一般確率モデルの具体例

- $\mathcal{C} := \{\sum_i p_i A_i \otimes B_i \mid A_i \in \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H}_A), B_i \in \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H}_B), \sum_i p_i = 1\}$ (**separable** な元全体)
- Horodecki's criterion $\rightarrow \mathcal{C}^*$ は **部分転置 Γ** によって表される :

$$\mathcal{C}^* := \{Y \in \mathcal{L}_H(\mathcal{H}) \mid \text{Tr } XY \geq 0 \ \forall X \in \mathcal{C}\} = \left\{ \sum_i X_i + \Gamma(Y_i) \mid X_i, Y_i \in \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H}) \right\} \quad (2)$$

- $\{M_0, M_1\}$ はこのモデルにおける測定である

$$M_0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \Gamma \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right), \quad M_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

- $\{M_0, M_1\}$ は状態識別 (仮説検定) において量子論を超越する性能を持つ

一般確率モデルの具体例

- $\mathcal{C} := \{\sum_i p_i A_i \otimes B_i \mid A_i \in \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H}_A), B_i \in \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H}_B), \sum_i p_i = 1\}$ (**separable** な元全体)
- Horodecki's criterion $\rightarrow \mathcal{C}^*$ は **部分転置 Γ** によって表される :

$$\mathcal{C}^* := \{Y \in \mathcal{L}_H(\mathcal{H}) \mid \text{Tr } XY \geq 0 \ \forall X \in \mathcal{C}\} = \left\{ \sum_i X_i + \Gamma(Y_i) \mid X_i, Y_i \in \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H}) \right\} \quad (2)$$

- $\{M_0, M_1\}$ はこのモデルにおける測定である

$$M_0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \Gamma \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right), \quad M_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

- $\{M_0, M_1\}$ は状態識別 (仮説検定) において量子論を超越する性能を持つ

Outline

- ① 【前半】 Introduction：一般確率論の定義と意義
- ② 【前半】 一般確率論のこれまでの結果
- ③ 【前半】 前半まとめ
- ④ 【後半】 間主観性による物理量と非古典性の特徴付け
arXiv:2603.01575
- ⑤ 【後半】 一般確率論と量子論の接続：事前情報事後選択を用いた超量子測定の実現
arXiv:2411.01873
- ⑥ まとめ：一般確率論の今後
- ⑦ Appendix

一般確率モデルの分類

- 多角形（多面体）モデル
 - ▶ 状態空間が多角形なモデル
 - ▶ c.f. PR-box : 量子よりも遥かに強い相関を生成できるモデル
 - ▶ 端点の数が有限個であるため数値計算しやすい
- Q-like モデル
 - ▶ 状態空間がエルミート行列で記述されるモデル
 - ▶ c.f. 局所量子モデル：部分系に射影すると量子論と完全に一致する合成系モデル
一般確率論では、部分系のモデルを固定しても合成系のモデルが一意的に決まらない！
- Euclidean Jordan Algebras
 - ▶ 量子論の持つ代数構造の一般化
 - ▶ 本質的に有限種類しかなく、実量子論などが典型例
- その他

量子論を超える情報処理（多種多様なモデルの具体例）

- ベルの不等式を量子よりも強く破るモデル：PR-box [PR1994]
CHSH 値を 4 まで達成可能（量子論では $2\sqrt{2}$ ，古典論では 2）
- PR-box が無制限にあれば，1bit の古典情報だけであらゆるブール関数の結果を正しく伝えることができる（通信複雑性の崩壊） [vDau2005]
 - ▶ n bit2 入力のブール関数 $f(a, b)$ の計算を Bob が行う．Bob は入力 b を知っていて，Alice は入力 a に関する m_n bit の情報を Bob に送る．Bob が間違えずに $f(a, b)$ を計算するのに必要なアリスの送信量 m_n は？
 - ▶ 例：equality $f(a, b) = 1$ only if $a = b$.
 - ▶ Alice と Bob がエンタングルメントを共有していると m_n を少し下げることができる
 - ▶ もし Alice と Bob が PR-box を共有していたら， $m_n = 1$ で良い．
- ゲート型計算機で効率的に解ける最大クラス：AWPP （BQP よりも少し大きい） [Barret2019]
- 非直交状態識別 [AYH2019][YAH2020]

モデルに寄らず成り立つこと

- BB84 プロトコル（量子鍵配送）の安全性（攻撃者が GPT を持っていた場合の情報理論的安全性）[BHK2005]
- 暗号タスクの不可能性（coin flipping, bit commitment）
- 一般凸リソース理論 [TR2022]
- 仮説検定と通信路容量のレートの漸近的一致 [MA2024]

状態識別性能による量子論の特徴付け

- Quantum Helstrom Bound (QHB) : 量子論における 2 状態識別の誤り確率の下限

$$p \operatorname{Tr} \rho_0 M_1 + (1 - p) \operatorname{Tr} \rho_1 M_0 \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \|p\rho_0 - (1 - p)\rho_1\|_1$$

Theorem (ラフな主張 [AH2024])

モデル G において以下は同値

- $G \simeq QT$
- G には、QHB を破る状態と測定組は存在しない
- 量子論と同型でない $\Rightarrow$ QHB を破る (量子を超える) ような 2 状態識別が “常に” 可能
- 意義 1 : 2 状態識別性能はモデルを決定するほど支配的なタスク
- 意義 2 : 状態と測定器がいくつかあり、一部が量子論に属することが分かれば、他の測定器が量子論に反しないことを状態識別性能だけで判定可能。

状態識別性能による量子論の特徴付け

- Quantum Helstrom Bound (QHB) : 量子論における 2 状態識別の誤り確率の下限

$$p \operatorname{Tr} \rho_0 M_1 + (1 - p) \operatorname{Tr} \rho_1 M_0 \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \|p\rho_0 - (1 - p)\rho_1\|_1$$

Theorem ([AH2024])

モデル G において以下は同値

- $G \simeq QT$
- G から Q -like モデル $\tilde{G}$ への以下を満たす埋め込みが存在
 - $\mathcal{S}(\tilde{G}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{L}_H^+(\mathcal{H}))$
 - 任意の状態 $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{S}(\tilde{G})$, 確率 $0 < p < 1$, 測定 $M \in \mathcal{M}(\tilde{G})$ が Q を満たす

- 量子論と同型でない $\Rightarrow$ QHB を破る (量子を超える) ような 2 状態識別が “常に” 可能
- 意義: 2 状態識別性能はモデルを決定するほど支配的なタスク
- 数学的には, 識別可能性に誘導される距離とトレース距離が非整合になるような埋め込みが、量子論以外において常に可能

量子論や古典論の特徴付け（基礎づけ）

- 量子論の特徴付け
 - ▶ システム次元とベクトル空間の次元の条件 [Hardy 2001]
 - ▶ 純粋化が可能 [CDP2011]
 - ▶ 強い対称性 [Barnum2023]
 - ▶ 状態識別性能が QHB を破る [AH2024]
- 古典論の特徴付け
 - ▶ 情報の複製が可能 $\Leftrightarrow$ 古典 [Barret 2007]
 - ▶ 同時測定が常に可能 $\Leftrightarrow$ 古典 [Plavara2016]
 - ▶ エンタングルメントを持ちえない $\Leftrightarrow$ 古典 [ALPP2021]
 - ▶ 粗視化によって客観性 (間主観性) が失われない $\Leftrightarrow$ 古典 [UOA2026]

数理：一般確率論における数学構造

- 量子情報のある種の対象は一般確率モデル
 - ▶ 量子通信路を状態とみなしたモデル [Jencova2013, Hayashi2025]
→ 高階量子演算やその因果構造の解析
 - ▶ エンタングルメント witness を状態とみなしたモデル [NSA2019]
→ エンタングルメント検出や判定、幾何構造の解析
- 代数構造の誘導
 - ▶ 古典論量子論が持つ代数構造と凸構造の関係
→ Euclidean Jordan Algebra (後述)

合成系とエンタングルメント

- 公理：局所的な操作によって生じる確率分布は独立→テンソルベクトル空間の構造
 - ▶ $p_i^A = \langle \rho^A, M_i^A \rangle_A$, $p_j^B = \langle \rho^B, M_j^B \rangle$
 - ▶ $p_{ij}^{AB} = \langle \rho^A \otimes \rho^B, M_i^A \otimes M_j^B \rangle_{AB} = p_i^A p_j^B$
- モデル $(\mathcal{V}^A, \mathcal{C}^A, u^A)$, $(\mathcal{V}^B, \mathcal{C}^B, u^B)$ の合成系は $(\mathcal{V}^A \otimes \mathcal{V}^B, \mathcal{C}, u^A \otimes u^B)$
- $\mathcal{C}$ は一意的に決まらない $\mathcal{C}^A \otimes \mathcal{C}^B \subset \mathcal{C} \subset (\mathcal{C}^{A*} \otimes \mathcal{C}^{B*})^*$
 - ▶ $\mathcal{C}^A \otimes \mathcal{C}^B = \text{Conv}\{a \otimes b \mid a \in \mathcal{C}^A, b \in \mathcal{C}^B\}$
 - ▶ $\mathcal{C}^A$ または $\mathcal{C}^B$ が古典論のときは包含関係が潰れる（古典特有の性質）
- 局所量子系： $\mathcal{C}^A, \mathcal{C}^B$ が共に量子論
→状態がエンタングルメント witness であるモデル
- 局所量子論の解析は通常量子論におけるエンタングルメント検出や数理論に密接に関わる [NSA2019]

Symmetric Cone と Euclidean Jordan Algebra

- Symmetric Cone $\mathcal{C}$: $\mathcal{C}$ が self-dual かつ homogenous
- Euclidean Jordan Algebra と一対一対応
 - ▶ ベクトル空間上の Non-associative algebra
 - ▶ $(x \circ x) \circ (x \circ y) = (x \circ x \circ x) \circ y$
 - ▶ $x \circ y = y \circ x$
 - ▶ $\sum_i x_i \circ x_i = 0 \Leftrightarrow x_i = 0$
- 既約な EJA は有限種類 (古典量子はその一つ)
 - ▶ 量子: エルミート行列に $x \circ y = \frac{xy+yx}{2}$ の積を入れる
- EJA の導出 [Barnum2023]
- EJA のモデルの物理実現 [BGW2021, SAH2025]
- EJA 上の仮説検定 [SAH2025]
- 無限個の非代数的な局所量子の self-dual cone [AH2023]

応用面は？

- 一般確率モデルの実験検証（self-testing） [Lobo2022, [AYH2024](#)]
- PR-box の物理実装（光量子系+post-election） [Chen2006, MRV2007]
- 一般確率モデルと量子論の接続 [[AH2025](#)]

まとめと Take-Home Message

- 一般確率論：確率分布を生成するプロセスを記述する枠組み
- 操作に関する基本的な公理から実ベクトル空間と凸錐の構造が誘導される
- 古典量子論以外の無数のモデルが存在
- いくつかのタスクにおいて量子論の性能を超えるモデルが存在
- いくつかのタスクでは全てのモデルの性能は同じ
- 一般確率論の意義：基礎，数理，応用
- 後半では，具体的な 2 つの結果を通して，一般確率論が物理や量子情報理論に与える新たな視点を見る

まとめと Take-Home Message

- 一般確率論：確率分布を生成するプロセスを記述する枠組み
- 操作に関する基本的な公理から実ベクトル空間と凸錐の構造が誘導される
- 古典量子論以外の無数のモデルが存在
- いくつかのタスクにおいて量子論の性能を超えるモデルが存在
- いくつかのタスクでは全てのモデルの性能は同じ
- 一般確率論の意義：基礎，数理，応用
- 後半では，具体的な2つの結果を通して，一般確率論が物理や量子情報理論に与える新たな視点を見る

まとめと Take-Home Message

- 一般確率論：確率分布を生成するプロセスを記述する枠組み
- 操作に関する基本的な公理から実ベクトル空間と凸錐の構造が誘導される
- 古典量子論以外の無数のモデルが存在
- いくつかのタスクにおいて量子論の性能を超えるモデルが存在
- いくつかのタスクでは全てのモデルの性能は同じ
- 一般確率論の意義：基礎，数理，応用
- 後半では，具体的な 2 つの結果を通して，一般確率論が物理や量子情報理論に与える新たな視点を見る

Outline

- ① 【前半】 Introduction：一般確率論の定義と意義
- ② 【前半】 一般確率論のこれまでの結果
- ③ 【前半】 前半まとめ
- ④ 【後半】 間主観性による物理量と非古典性の特徴付け
arXiv:2603.01575
- ⑤ 【後半】 一般確率論と量子論の接続：事前情報事後選択を用いた超量子測定の実現
arXiv:2411.01873
- ⑥ まとめ：一般確率論の今後
- ⑦ Appendix

モチベーション：物理量の特徴付け

- 一般確率論で定式化が自明な概念
 - ▶ 状態と測定の統計的性質
 - ▶ 具体的な情報処理タスクやプロトコル
- 一般確率論で定式化が非自明な概念
 - ▶ 合成系：部分系が固定されていても一意に定まらない
 - ▶ 時間発展：完全正值性や"ユニタリ"性が自然には定まらない
 - ▶ 物理量：演算子の固有値が自然に定まらない
- 物理量の特徴づけるために、POVM から Projection-Valued Measure を特徴づける
 - ▶ 物理量演算子としてのエルミート行列を測定するとその固有値を確率分布に従って測定値として返す
 - ▶ 測定値の情報を捨象すると、これは直交射影からなる POVM(すなわち PVM) と完全に対応する
- 一般確率論上で定義可能で、量子論において PVM と一致する測定に関する条件は未知だった

同時測定可能性と間主観性

- 測定 $M = \{M_i\}_{i \in I}$ と $N = \{N_j\}_{j \in J}$ の同時測定 $\{L_{ij}\}_{i \in I, j \in J}$
 $\Leftrightarrow \sum_{i \in I} L_{ij} = N_j \ \forall j, \sum_{j \in J} L_{ij} = M_i \ \forall i$ を満たすもの
- M, N の同時測定全体を $J(M, N)$ とする
- 測定 $M = \{M_i\}_{i \in I}$ が間主観的
 $\Leftrightarrow$ 任意の $\{N_{i,j}\}_{i \in I, j \in I} \in J(M, M)$ が $\sum_{i \neq j} N_{i,j} = 0$ を満たす
- 間主観的な測定：2 者が同時測定すれば必ず同じ結果を得る
- 例： $\{\frac{1}{2} |0\rangle\langle 0|, \frac{1}{2} |1\rangle\langle 1|\}$ は間主観的
- 例： $\{\frac{1}{2} I, \frac{1}{2} I\}$ (コイントス) は間主観的でない



(a) Intersubjective measurement



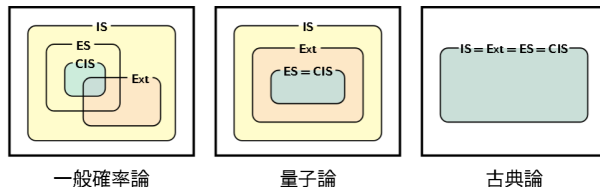
(b) Randomly generating measurement

完全間主観性

- 測定 $M = \{M_i\}_{i \in I}$ が間主観的 $\Leftrightarrow \text{supp}(M_i) \cap \text{supp}(M_{i'}) = \{0\}$ for any $i \neq i'$
- 間主観的であるが PVM でない例： $\{\frac{1}{2}|0\rangle\langle 0|, \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|, \frac{1}{2}|+\rangle\langle +|, \frac{1}{2}|-\rangle\langle -|\}$
- 間主観性は PVM の特徴付けとしては不十分
- 測定が完全間主観的 $\Leftrightarrow$ 任意の粗視化が間主観的
- 上の例は完全間主観的でない： $\{\frac{1}{2}I, \frac{1}{2}I\}$ は上の測定の粗視化
- 主結果：POVM において、PVM であることと完全間主観的であることは同値
- 完全に操作的な（一般確率論で定義可能な）PVM の特徴付けは初
- 「物理量らしさ」には粗視化における「安定性」が関わっている

間主観性に基づく古典論の特徴付け

- 古典論には完全間主観でない間主観的測定は存在しない
- 実はこれは古典論にのみの性質



- **主結果：全ての非古典論には完全間主観でない間主観的測定が存在する**
- Classical Theory : No incomplete intersubjectivity
- 粗視化による間主観性の安定性は非古典性と密接に関わる新しい物理学上の概念

Outline

- ① 【前半】 Introduction：一般確率論の定義と意義
- ② 【前半】 一般確率論のこれまでの結果
- ③ 【前半】 前半まとめ
- ④ 【後半】 間主観性による物理量と非古典性の特徴付け
arXiv:2603.01575
- ⑤ 【後半】 一般確率論と量子論の接続：事前情報事後選択を用いた超量子測定の実現
arXiv:2411.01873
- ⑥ まとめ：一般確率論の今後
- ⑦ Appendix

モチベーション：一般確率モデルは実現可能か？

- 一般確率モデルを物理的に実現したい
- 他の一般確率モデルを実現するためには、(少なくとも) 状態識別性能で量子の限界を越える必要がある
- ある種のコストを無視すれば、量子論内でも状態識別限界を破ることが可能
- どんなコストを考えると一般確率モデルと量子論が接続できるか？

モチベーション：一般確率モデルは実現可能か？

- 一般確率モデルを物理的に実現したい
- 他の一般確率モデルを実現するためには、(少なくとも) 状態識別性能で量子の限界を越える必要がある
- ある種のコストを無視すれば、量子論内でも状態識別限界を破ることが可能
- どんなコストを考えると一般確率モデルと量子論が接続できるか？

モチベーション：一般確率モデルは実現可能か？

- 一般確率モデルを物理的に実現したい
- 他の一般確率モデルを実現するためには、(少なくとも) 状態識別性能で量子の限界を越える必要がある
- ある種のコストを無視すれば、量子論内でも状態識別限界を破ることが可能
- どんなコストを考えると一般確率モデルと量子論が接続できるか？

モチベーション：一般確率モデルは実現可能か？

- 一般確率モデルを物理的に実現したい
- 他の一般確率モデルを実現するためには、(少なくとも) 状態識別性能で量子の限界を越える必要がある
- ある種のコストを無視すれば、量子論内でも状態識別限界を破ることが可能
- どんなコストを考えると一般確率モデルと量子論が接続できるか？

これまでに知られていた奇妙な関係

本研究の接続により、これまで知られていた奇妙な関係の背景の構造が明確に

- 事後選択付き仮説検定 [Regula, Lami, Wilde 2024]
 - ▶ 量子論での最適性能は他のモデルでの最適性能と等しい
 - ▶ 仮説検定 → 事前情報
- 計算複雑性
 - ▶ AWPP : 効率的な事後選択を許す量子計算で効率的に解けるクラス [Morimae, Nishimura 2016]
 - ▶ AWPP : GPT で効率的に計算可能な最も難しい問題クラス [Barret, Lee 2014, 2019]
 - ▶ 回路型計算は入出力状態が制限
- PR-box の実験的実装 [Chen2006]
 - ▶ 光量子系での実験
 - ▶ 事後選択と物理量の制限を用いる
- 上記の結果は事後選択と事前情報 (domain restriction) の組み合わせ！

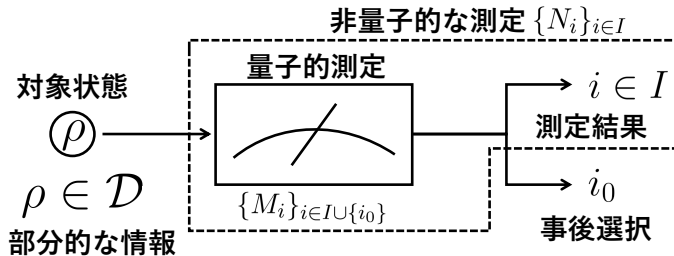
これまでに知られていた奇妙な関係

本研究の接続により、これまで知られていた奇妙な関係の背景の構造が明確に

- 事後選択付き仮説検定 [Regula, Lami, Wilde 2024]
 - ▶ 量子論での最適性能は他のモデルでの最適性能と等しい
 - ▶ 仮説検定 → 事前情報
- 計算複雑性
 - ▶ AWPP : 効率的な事後選択を許す量子計算で効率的に解けるクラス [Morimae, Nishimura 2016]
 - ▶ AWPP : GPT で効率的に計算可能な最も難しい問題クラス [Barret, Lee 2014, 2019]
 - ▶ 回路型計算は入出力状態が制限
- PR-box の実験的実装 [Chen2006]
 - ▶ 光量子系での実験
 - ▶ 事後選択と物理量の制限を用いる
- 上記の結果は事後選択と事前情報 (domain restriction) の組み合わせ！

事後選択と事前情報

- 事後選択：ある測定結果 i_0 を出力した場合、そのイベントを無視する
- 条件付確率分布 $p(i|I) = \frac{\text{Tr } \rho M_i}{\sum_{j \in I} \text{Tr } \rho M_j}$ が生成される



- 事前情報：対象状態 ρ に対する仮定
- $\rho \in \mathcal{D} \subset \mathcal{S}(G)$ と仮定する

N-POVM の定義

Notations

$\mathcal{L}_H(\mathcal{H})$: $\mathcal{H}$ 上のエルミート行列全体

$\mathcal{L}_H^+(\mathcal{H})$: $\mathcal{H}$ 上の半正定値行列全体

Def. Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上のエルミート行列の族 $N := \{N_i\}_{i \in I}$ で, $\sum_{i \in I} N_i = \mathbb{I}$ を満たすものを Non-Positive-Operator-Valued Measure (N-POVM) 測定と呼ぶ

- 一般には $N_i \not\geq 0$
- 状態 ρ に対して測定値 $i \in I$ を得る確率 : $\text{Tr } \rho N_i$
- $\text{Tr } \rho N_i \geq 0$ なる状態 ρ についてのみ操作的意味を持つ

$$\mathcal{D}_Q(N) := \{\rho \in \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H}) \mid \text{Tr } \rho = 1, \text{Tr } \rho N_i \geq 0 \ \forall i \in I\}.$$

- N は $\mathcal{D}_Q(N)$ に属する量子状態 ρ に対してのみ操作的意味を持つ
- N は $\mathcal{S}(G) \subset \mathcal{D}_Q(N)$ なるモデル G の測定である.

N-POVM の定義

Notations

$\mathcal{L}_{\mathcal{H}}(\mathcal{H})$: $\mathcal{H}$ 上のエルミート行列全体

$\mathcal{L}_{\mathcal{H}}^+(\mathcal{H})$: $\mathcal{H}$ 上の半正定値行列全体

Def. Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上のエルミート行列の族 $N := \{N_i\}_{i \in I}$ で, $\sum_{i \in I} N_i = \mathbb{I}$ を満たすものを Non-Positive-Operator-Valued Measure (N-POVM) 測定と呼ぶ

- 一般には $N_i \not\geq 0$
- 状態 ρ に対して測定値 $i \in I$ を得る確率: $\text{Tr } \rho N_i$
- $\text{Tr } \rho N_i \geq 0$ なる状態 ρ についてのみ操作的意味を持つ

$$\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}(N) := \{\rho \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}}^+(\mathcal{H}) \mid \text{Tr } \rho = 1, \text{Tr } \rho N_i \geq 0 \ \forall i \in I\}.$$

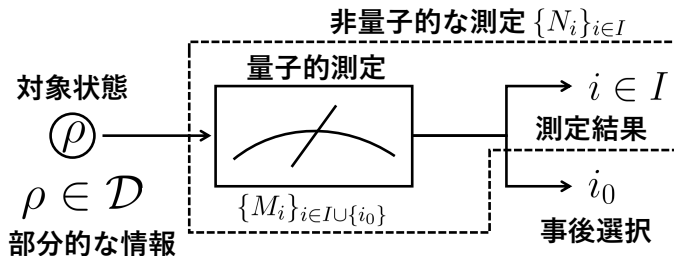
- N は $\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}(N)$ に属する量子状態 ρ に対してのみ操作的意味を持つ
- N は $\mathcal{S}(G) \subset \mathcal{D}_{\mathcal{Q}}(N)$ なるモデル G の測定である.

目的：事前情報と事後選択を用いた実装

Def. N-POVM $N := \{N_i\}_{i \in I}$ を POVM $M := \{M_j\}_{j \in I \cup \{i_0\}}$ が事後選択を用いて実装可能とは、
 任意の $i \in I$ に対して以下を満たす

ことを言う：

$$\text{Tr } \rho N_i = \frac{\text{Tr } \rho M_i}{\sum_{j \in I} \text{Tr } \rho M_j}.$$

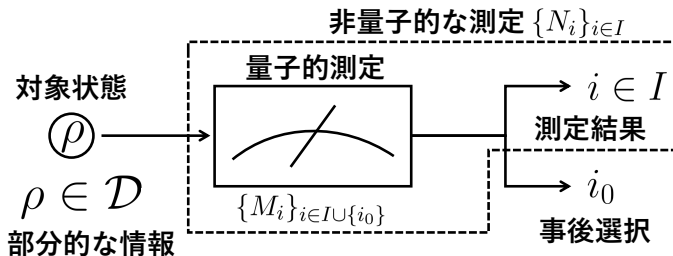


- ドメインの制限は、事前情報、事前選択、部分的なトモグラフィー、パラメータ推定などとみなせる。

目的：事前情報と事後選択を用いた実装

Def. N-POVM $N := \{N_i\}_{i \in I}$ を POVM $M := \{M_j\}_{j \in I \cup \{i_0\}}$ が事後選択を用いてドメイン $\mathcal{D}_I \subset \mathcal{D}_Q(N)$ 内で実装可能とは、任意の $\rho \in \mathcal{D}_I$ ，任意の $i \in I$ に対して以下を満たすことを言う：

$$\mathrm{Tr} \rho N_i = \frac{\mathrm{Tr} \rho M_i}{\sum_{j \in I} \mathrm{Tr} \rho M_j}.$$



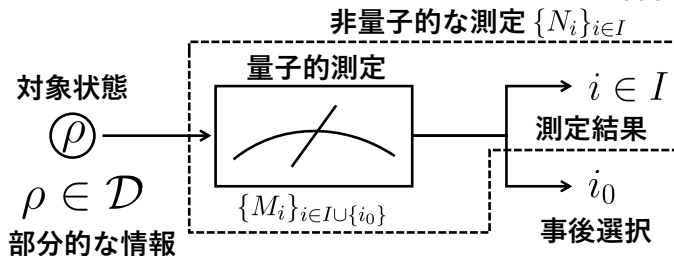
- ドメインの制限は、事前情報，事前選択，部分的なトモグラフィー，パラメータ推定などとみなせる。

目的：事前情報と事後選択を用いた実装

Def. N-POVM $N := \{N_i\}_{i \in I}$ を POVM $M := \{M_j\}_{j \in I \cup \{i_0\}}$ が事後選択を用いて **ドメイン** $\mathcal{D}_I \subset \mathcal{D}_Q(N)$ 内で実装可能とは：**任意の** $\rho \in \mathcal{D}_I$ ，任意の $i \in I$ に対して以下を満たすことを言う：

$$\mathrm{Tr} \rho N_i = \frac{\mathrm{Tr} \rho M_i}{\sum_{j \in I} \mathrm{Tr} \rho M_j} = \text{定数} \text{ になるような } \rho \text{ 全体} : \mathcal{D}_I$$

Hidden Linear な定義域



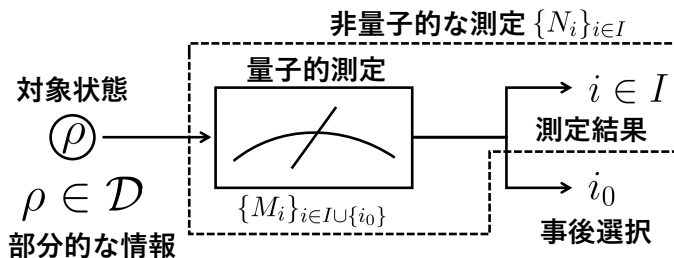
- ドメインの制限は，事前情報，事前選択，部分的なトモグラフィー，パラメータ推定などとみなせる。

目的：事前情報と事後選択を用いた実装

Def. N-POVM $N := \{N_i\}_{i \in I}$ を POVM $M := \{M_j\}_{j \in I \cup \{i_0\}}$ が事後選択を用いて **ドメイン** $\mathcal{D}_I \subset \mathcal{D}_Q(N)$ **内で実装可能**とは：**任意の** $\rho \in \mathcal{D}_I$ ，任意の $i \in I$ に対して以下を満たすことを言う：

$$\text{Tr } \rho N_i = \frac{\text{Tr } \rho M_i}{\sum_{j \in I} \text{Tr } \rho M_j} = \text{定数になるような } \rho \text{ 全体：} \mathcal{D}_I$$

Hidden Linear な定義域



- **重要な利点：** N-POVM と POVM の性能が $\mathcal{D}_I$ 内で対応が付く

目的：事前情報と事後選択を用いた実装

Def. N-POVM $N := \{N_i\}_{i \in I}$ を POVM $M := \{M_j\}_{j \in I \cup \{i_0\}}$ が事後選択を用いてドメイン $\mathcal{D}_I \subset \mathcal{D}_Q(N)$ 内で実装可能とは：任意の $\rho \in \mathcal{D}_I$ ，任意の $i \in I$ に対して以下を満たすことを言う：

$$\mathrm{Tr} \rho N_i = \frac{\mathrm{Tr} \rho M_i}{\sum_{j \in I} \mathrm{Tr} \rho M_j}.$$

- 重要な利点：

$\inf_{M \in \mathcal{M}(\text{QT})} \mathrm{Err}(\rho_0; \rho_1; p; M)$ を
 $\inf_{M \in \mathcal{M}(\text{G})} \textcolor{red}{c} \mathrm{Err}(\rho_0; \rho_1; p; M)$ と書き換えられる

- 半正定値計画問題を別の線形拘束の問題に置き換えられる
- 最適化問題の“緩和”

具体例

$$N_0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \Gamma \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right), \quad N_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

N は POVM $M := \{M_0, M_1, M_2\}$ で事後選択を用いて $\mathcal{D}_I$ 内で実装可能,

- $M_0 := \frac{1}{2}\Gamma(N_0)$
- $M_1 := \frac{1}{2}N_1$
- $M_2 := \mathbb{I} - M_0 - M_1$
- $\mathcal{D}_I = \{\rho \in \mathcal{L}_H(\mathbb{C}^4) \mid \text{Tr } \rho = 1, \Gamma(\rho) = \rho\}.$

- $\text{Tr } \rho M_0 = \frac{1}{2} \text{Tr } \rho \Gamma(N_0) = \frac{1}{2} \text{Tr } \Gamma(\rho) N_0 = \frac{1}{2} \text{Tr } \rho N_0$ for any $\rho \in \mathcal{D}_I$
- $\text{Tr } \rho M_1 = \frac{1}{2} \text{Tr } \rho N_1$ for any $\rho \in \mathcal{D}_I$

$$\rightarrow \frac{\text{Tr } \rho M_i}{\sum_{j \in I} \text{Tr } \rho M_j} = \frac{(1/2) \text{Tr } \rho N_i}{(1/2)(\text{Tr } \rho N_0 + \text{Tr } \rho N_1)} = \text{Tr } \rho N_i \quad (\because N_0 + N_1 = \mathbb{I})$$

具体例

$$N_0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \Gamma \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right), \quad N_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

N は POVM $M := \{M_0, M_1, M_2\}$ で事後選択を用いて $\mathcal{D}_I$ 内で実装可能,

- $M_0 := \frac{1}{2}\Gamma(N_0)$
- $M_1 := \frac{1}{2}N_1$
- $M_2 := \mathbb{I} - M_0 - M_1$
- $\mathcal{D}_I = \{\rho \in \mathcal{L}_H(\mathbb{C}^4) \mid \text{Tr } \rho = 1, \Gamma(\rho) = \rho\}.$
- $\text{Tr } \rho M_0 = \frac{1}{2} \text{Tr } \rho \Gamma(N_0) = \frac{1}{2} \text{Tr } \Gamma(\rho) N_0 = \frac{1}{2} \text{Tr } \rho N_0$ for any $\rho \in \mathcal{D}_I$
- $\text{Tr } \rho M_1 = \frac{1}{2} \text{Tr } \rho N_1$ for any $\rho \in \mathcal{D}_I$

$$\rightarrow \frac{\text{Tr } \rho M_i}{\sum_{j \in I} \text{Tr } \rho M_j} = \frac{(1/2) \text{Tr } \rho N_i}{(1/2)(\text{Tr } \rho N_0 + \text{Tr } \rho N_1)} = \text{Tr } \rho N_i \quad (\because N_0 + N_1 = \mathbb{I})$$

具体例

$$N_0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \Gamma \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right), \quad N_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- RECALL: N-POVM $\{N_0, N_1\}$ は非直交状態 ρ_0, ρ_1 を完全識別する

$$\rho_0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho_1 := \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

- $\Gamma(\rho_i) = \rho_i \rightarrow \rho_i \in \mathcal{D}_I$
- 制約されたドメイン下でも, N-POVM は POVM を上回る性能を持つ (事後選択が必要)

具体例

$$N_0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \Gamma \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right), \quad N_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- RECALL: N-POVM $\{N_0, N_1\}$ は非直交状態 ρ_0, ρ_1 を完全識別する

$$\rho_0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho_1 := \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

- $\Gamma(\rho_i) = \rho_i \rightarrow \rho_i \in \mathcal{D}_I$
- 制約されたドメイン下でも, N-POVM は POVM を上回る性能を持つ (事後選択が必要)

Theorem 2-1 : 構成的実装

- N-POVM $N := \{N_i\}_{i \in I}$ が $N_i = \sum_{k=1}^n f_i^{(k)}(S_i^{(k)})$ と書かれているとき
($f_i^{(k)}$ は線形写像, $S_i^{(k)}$ は半正定値行列)
- ドメイン $\mathcal{D}_I$ を以下で定める

$$\mathcal{D}_I := \{\rho \in \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H}) \mid \text{Tr } \rho = 1, f_i^{(k)\dagger}(\rho) = \rho \ (i \in I, 1 \leq k \leq n)\}$$

- POVM $M = \{M_j\}_{j \in I \cup \{i_0\}}$ を以下で定める

$$M_j = \begin{cases} \frac{1}{c(\{S_i^{(k)}\})} \sum_{k=1}^n S_i^{(k)} & (j = i \in I), \\ \mathbb{I} - \frac{1}{c(\{S_i^{(k)}\})} \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^n S_i^{(k)} & (j = i_0) \end{cases}$$

ただし, $c(\{S_i^{(k)}\})$ は $\sum_{i \in I} \sum_{k=1}^n S_i^{(k)}$ の最大固有値

- N-POVM N は POVM M と PS で $\mathcal{D}_I$ 内で実装できる

Theorem 2-1 : 構成的実装

- N-POVM $N := \{N_i\}_{i \in I}$ が $N_i = \sum_{k=1}^n f_i^{(k)}(S_i^{(k)})$ と書かれているとき
($f_i^{(k)}$ は線形写像, $S_i^{(k)}$ は半正定値行列)
- ドメイン $\mathcal{D}_I$ を以下で定める

$$\mathcal{D}_I := \{\rho \in \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H}) \mid \text{Tr } \rho = 1, f_i^{(k)\dagger}(\rho) = \rho \ (i \in I, 1 \leq k \leq n)\}$$

- POVM $M = \{M_j\}_{j \in I \cup \{i_0\}}$ を以下で定める

$$M_j = \begin{cases} \frac{1}{c(\{S_i^{(k)}\})} \sum_{k=1}^n S_i^{(k)} & (j = i \in I), \\ \mathbb{I} - \frac{1}{c(\{S_i^{(k)}\})} \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^n S_i^{(k)} & (j = i_0) \end{cases}$$

ただし, $c(\{S_i^{(k)}\})$ は $\sum_{i \in I} \sum_{k=1}^n S_i^{(k)}$ の最大固有値

- N-POVM N は POVM M と PS で $\mathcal{D}_I$ 内で実装できる

Theorem 2-1 : 構成的実装

- N-POVM $N := \{N_i\}_{i \in I}$ が $N_i = \sum_{k=1}^n f_i^{(k)}(S_i^{(k)})$ と書かれているとき
($f_i^{(k)}$ は線形写像, $S_i^{(k)}$ は半正定値行列)
- ドメイン $\mathcal{D}_I$ を以下で定める

$$\mathcal{D}_I := \{\rho \in \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H}) \mid \text{Tr } \rho = 1, f_i^{(k)\dagger}(\rho) = \rho \ (i \in I, 1 \leq k \leq n)\}$$

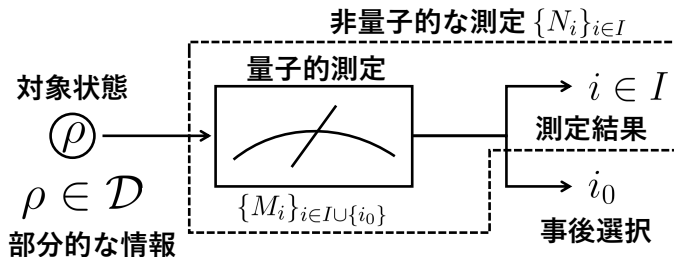
- POVM $M = \{M_j\}_{j \in I \cup \{i_0\}}$ を以下で定める

$$M_j = \begin{cases} \frac{1}{c(\{S_i^{(k)}\})} \sum_{k=1}^n S_i^{(k)} & (j = i \in I), \\ \mathbb{I} - \frac{1}{c(\{S_i^{(k)}\})} \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^n S_i^{(k)} & (j = i_0) \end{cases}$$

ただし, $c(\{S_i^{(k)}\})$ は $\sum_{i \in I} \sum_{k=1}^n S_i^{(k)}$ の最大固有値

- **N-POVM N は POVM M と PS で $\mathcal{D}_I$ 内で実装できる**

実装コストの定量化



- 2つのコスト：

- ▶ 事前情報の量: **ドメインのサイズ**

$\dim(\mathcal{D}_I)$: $\text{Span}(\mathcal{D}_I)$ の次元 (次元が大きいほど低コスト)

- ▶ 事後選択の棄却確率

$1 - \text{Acc}(M)$, where $\text{Acc}(M) := \sum_{j \in I} \text{Tr } \rho M_j$ ($\text{Acc}(M)$ が大きいほど低コスト)

Theorem 2-2 : 低コストの実装

- Theorem 1 は $\mathcal{D}_I$ が非自明であることを保証しない
- 大きいドメインと高い成功確率で実装したい

- $\dim(\mathcal{H}) = d$ とする
- N-POVM N は以下を満たす
 - C1 $\mathcal{D}_Q(N)$ は d 個の直交純粋状態 ρ_j を含む.
 - C2 $\mathcal{D}_Q(N)$ は最大混合状態のある ϵ 近傍を含む

✓ 多くの N について成り立つ
(e.g. 局所量子論のあらゆる測定など)

→ ある POVM M とドメイン $\mathcal{D}_I$ が存在して N を事後選択で $\mathcal{D}_I$ 内で実装し、以下を満たす：

$$\dim(\mathcal{D}_I) \geq d^2 + d - 2 \dim'(\text{Span}(N)),$$

$$\text{Acc}(M) \geq 1/d$$

→ $\dim'(\text{Span}(N))$ が小さいとき大きなドメイン (小さな事前情報) での実装が可能

Theorem 2-2 : 低コストの実装

- Theorem 1 は $\mathcal{D}_I$ が非自明であることを保証しない
- 大きいドメインと高い成功確率で実装したい

- $\dim(\mathcal{H}) = d$ とする
- N -POVM N は以下を満たす
 - C1 $\mathcal{D}_Q(N)$ は d 個の直交純粋状態 ρ_j を含む.
 - C2 $\mathcal{D}_Q(N)$ は最大混合状態のある ϵ 近傍を含む

✓ 多くの N について成り立つ
(e.g. 局所量子論のあらゆる測定など)

→ ある POVM M とドメイン $\mathcal{D}_I$ が存在して N を事後選択で $\mathcal{D}_I$ 内で実装し、以下を満たす：

$$\dim(\mathcal{D}_I) \geq d^2 + d - 2 \dim'(\text{Span}(N)),$$

$$\text{Acc}(M) \geq 1/d$$

→ $\dim'(\text{Span}(N))$ が小さいとき大きなドメイン (小さな事前情報) での実装が可能

Theorem 2-2 : 低コストの実装

- Theorem 1 は $\mathcal{D}_I$ が非自明であることを保証しない
- 大きいドメインと高い成功確率で実装したい

- $\dim(\mathcal{H}) = d$ とする
- N -POVM N は以下を満たす
 - C1 $\mathcal{D}_Q(N)$ は d 個の直交純粋状態 ρ_j を含む.
 - C2 $\mathcal{D}_Q(N)$ は最大混合状態のある ϵ 近傍を含む

✓ 多くの N について成り立つ
(e.g. 局所量子論のあらゆる測定など)

→ ある POVM M とドメイン $\mathcal{D}_I$ が存在して N を事後選択で $\mathcal{D}_I$ 内で実装し、以下を満たす：

$$\dim(\mathcal{D}_I) \geq d^2 + d - 2 \dim'(\text{Span}(\mathbf{N})),$$

$$\text{Acc}(\mathbf{M}) \geq 1/d$$

→ $\dim'(\text{Span}(\mathbf{N}))$ が小さいとき大きなドメイン (小さな事前情報) での実装が可能

Theorem 2-2 : 低コストの実装

- Theorem 1 は $\mathcal{D}_I$ が非自明であることを保証しない
- 大きいドメインと高い成功確率で実装したい

- $\dim(\mathcal{H}) = d$ とする
- N-POVM N は以下を満たす
 - C1 $\mathcal{D}_Q(N)$ は d 個の直交純粋状態 ρ_j を含む.
 - C2 $\mathcal{D}_Q(N)$ は最大混合状態のある ϵ 近傍を含む

✓ 多くの N について成り立つ
(e.g. 局所量子論のあらゆる測定など)

→ ある POVM M とドメイン $\mathcal{D}_I$ が存在して N を事後選択で $\mathcal{D}_I$ 内で実装し、以下を満たす：

$$\dim(\mathcal{D}_I) \geq d^2 + d - 2 \dim'(\text{Span}(N)),$$

$$\text{Acc}(M) \geq 1/d$$

→ $\dim'(\text{Span}(N))$ が小さいとき大きなドメイン (小さな事前情報) での実装が可能

その他の結果の紹介

- 逆の関係：N-POVM を用いた事後選択-POVM の表現
 - ▶ reject する確率が定数となる domain 上で対応
 - ▶ この場合の表現可能性の必要十分条件を与えた
- ambiguous state discrimination との関係
 - ▶ 候補状態が群作用の対称性を持っている
 - ▶ この場合の最適な事後選択-POVM は N-POVM として与えられる
 - ▶ 逆にこの候補状態に対する N-POVM による最適測定は事後選択-POVM として与えられる
- 一般の測定クラスへの拡張
 - ▶ N-POVM と POVM に限らず、一般の測定クラス $\mathcal{M}$ について、測定 $N \notin \mathcal{M}$ が $\mathcal{M}$ の測定のみを用いて、事前情報と事後選択で実装可能

その他の結果の紹介

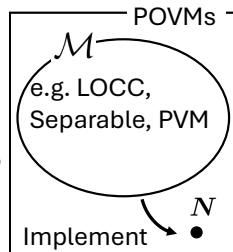
- 逆の関係：N-POVM を用いた事後選択-POVM の表現
 - ▶ reject する確率が定数となる domain 上で対応
 - ▶ この場合の表現可能性の必要十分条件を与えた
- ambiguous state discrimination との関係
 - ▶ 候補状態が群作用の対称性を持っている
 - ▶ この場合の最適な事後選択-POVM は N-POVM として与えられる
 - ▶ 逆にこの候補状態に対する N-POVM による最適測定は事後選択-POVM として与えられる
- 一般の測定クラスへの拡張
 - ▶ N-POVM と POVM に限らず、一般の測定クラス $\mathcal{M}$ について、測定 $N \notin \mathcal{M}$ が $\mathcal{M}$ の測定のみを用いて、事前情報と事後選択で実装可能

その他の結果の紹介

- 逆の関係：N-POVM を用いた事後選択-POVM の表現
 - ▶ reject する確率が定数となる domain 上で対応
 - ▶ この場合の表現可能性の必要十分条件を与えた
- ambiguous state discrimination との関係
 - ▶ 候補状態が群作用の対称性を持っている
 - ▶ この場合の最適な事後選択-POVM は N-POVM として与えられる
 - ▶ 逆にこの候補状態に対する N-POVM による最適測定は事後選択-POVM として与えられる
- 一般の測定クラスへの拡張
 - ▶ N-POVM と POVM に限らず、一般の測定クラス $\mathcal{M}$ について、測定 $N \notin \mathcal{M}$ が $\mathcal{M}$ の測定のみを用いて、事前情報と事後選択で実装可能

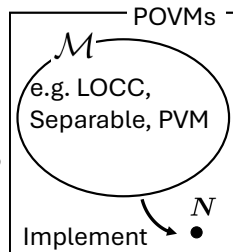
リソース理論への応用

- リソースのある測定 N をリソースフリーな測定 $M \in \mathcal{M}$ で実装する
- これまで考えていたのは $\mathcal{M} = \text{POVMs}$ という場合
- 事前情報+事後選択を用いた実装が定義可能
- $\mathcal{M}$ が Cone で与えられているとき、構成的実装が可能
- **Important Open Problem: What is the optimal cost?**
 - ▶ 最適コストは定量的な接続レートになる
 - ▶ ドメインの affine 次元はもはやコストの良い指標ではない（リソースに依存する）



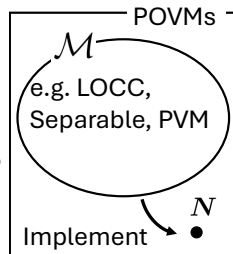
リソース理論への応用

- リソースのある測定 N をリソースフリーな測定 $M \in \mathcal{M}$ で実装する
- これまで考えていたのは $\mathcal{M} = \text{POVMs}$ という場合
- 事前情報+事後選択を用いた実装が定義可能
- $\mathcal{M}$ が Cone で与えられているとき、構成的実装が可能
- Important Open Problem: What is the optimal cost?**
 - 最適コストは定量的な接続レートになる
 - ドメインの affine 次元はもはやコストの良い指標ではない（リソースに依存する）



リソース理論への応用

- リソースのある測定 N をリソースフリーな測定 $M \in \mathcal{M}$ で実装する
- これまで考えていたのは $\mathcal{M} = \text{POVMs}$ という場合
- 事前情報+事後選択を用いた実装が定義可能
- $\mathcal{M}$ が Cone で与えられているとき、構成的実装が可能
- Important Open Problem: What is the optimal cost?**
 - 最適コストは定量的な接続レートになる
 - ドメインの affine 次元はもはやコストの良い指標ではない（リソースに依存する）



Open problems

定量的接続には多くの未解決な部分がある

- 状態や通信路（操作）への拡張
 - ▶ どんなコストが量子論と一般確率論を接続するか
- 最適コストの導出
 - ▶ 2つのコストはトレードオフ関係にある
 - ▶ Tight なトレードオフ関係は最適コストの関係を与える
 - ▶ 2つの理論の定量的な接続レートを与える
- n -shot や漸近設定への拡張
 - ▶ n -copy の対象状態 ρ を準備できる設定

$$\mathrm{Tr} \rho N_i = \frac{\mathrm{Tr} \rho^{\otimes n} M_i}{\sum_{j \in I} \mathrm{Tr} \rho^{\otimes n} M_j}.$$

Open problems

定量的接続には多くの未解決な部分がある

- 状態や通信路（操作）への拡張
 - ▶ どんなコストが量子論と一般確率論を接続するか
- 最適コストの導出
 - ▶ 2つのコストはトレードオフ関係にある
 - ▶ Tight なトレードオフ関係は最適コストの関係を与える
 - ▶ 2つの理論の定量的な接続レートを与える
- n -shot や漸近設定への拡張
 - ▶ n -copy の対象状態 ρ を準備できる設定

$$\mathrm{Tr} \rho N_i = \frac{\mathrm{Tr} \rho^{\otimes n} M_i}{\sum_{j \in I} \mathrm{Tr} \rho^{\otimes n} M_j}.$$

Outline

- ① 【前半】 Introduction：一般確率論の定義と意義
- ② 【前半】 一般確率論のこれまでの結果
- ③ 【前半】 前半まとめ
- ④ 【後半】 間主観性による物理量と非古典性の特徴付け
arXiv:2603.01575
- ⑤ 【後半】 一般確率論と量子論の接続：事前情報事後選択を用いた超量子測定の実現
arXiv:2411.01873
- ⑥ **まとめ：一般確率論の今後**
- ⑦ Appendix

まとめと Take-Home Message

- 一般確率論：確率分布を生成するプロセスを記述する枠組み
- 古典量子論以外の無数のモデルが存在
- 一般確率論の意義：基礎，数理，応用
- 応用：事前情報+事後選択によって，超量子測定は量子的に実現可能
- 一般確率モデルを単なる数理モデルとして見ると，基本的には仮想的なモデル（基本的に量子論の性能を越えるため）
- ただし，問題設定毎の状況を取り入れることで，一般確率モデルと量子論は対応可能
- 一般確率論 $\div$ 量子論 + 追加のコスト
- 一般確率論は，量子論を基礎づける枠組み かつ 量子論を解析するための手法

まとめと Take-Home Message

- 一般確率論：確率分布を生成するプロセスを記述する枠組み
- 古典量子論以外の無数のモデルが存在
- 一般確率論の意義：基礎，数理，応用
- 応用：事前情報+事後選択によって，超量子測定は量子的に実現可能
- 一般確率モデルを単なる数理モデルとして見ると，基本的には仮想的なモデル（基本的に量子論の性能を越えるため）
- ただし，問題設定毎の状況を取り入れることで，一般確率モデルと量子論は対応可能
- 一般確率論 $\div$ 量子論 + 追加のコスト
- 一般確率論は，量子論を基礎づける枠組み かつ 量子論を解析するための手法

まとめと Take-Home Message

- 一般確率論：確率分布を生成するプロセスを記述する枠組み
- 古典量子論以外の無数のモデルが存在
- 一般確率論の意義：基礎，数理，応用
- 応用：事前情報+事後選択によって，超量子測定は量子的に実現可能
- 一般確率モデルを単なる数理モデルとして見ると，基本的には仮想的なモデル（基本的に量子論の性能を越えるため）
- ただし，問題設定毎の状況を取り入れることで，一般確率モデルと量子論は対応可能
- 一般確率論 $\div$ 量子論 + 追加のコスト
- 一般確率論は，量子論を基礎づける枠組み かつ 量子論を解析するための手法

まとめと Take-Home Message

- 一般確率論：確率分布を生成するプロセスを記述する枠組み
- 古典量子論以外の無数のモデルが存在
- 一般確率論の意義：基礎，数理，応用
- 応用：事前情報+事後選択によって，超量子測定は量子的に実現可能
- 一般確率モデルを単なる数理モデルとして見ると，基本的には仮想的なモデル（基本的に量子論の性能を越えるため）
- ただし，問題設定毎の状況を取り入れることで，一般確率モデルと量子論は対応可能
- 一般確率論 $\div$ 量子論 + 追加のコスト
- 一般確率論は，量子論を基礎づける枠組み かつ 量子論を解析するための手法

ご清聴ありがとうございました

Outline

- ① 【前半】 Introduction：一般確率論の定義と意義
- ② 【前半】 一般確率論のこれまでの結果
- ③ 【前半】 前半まとめ
- ④ 【後半】 間主観性による物理量と非古典性の特徴付け
arXiv:2603.01575
- ⑤ 【後半】 一般確率論と量子論の接続：事前情報事後選択を用いた超量子測定の実現
arXiv:2411.01873
- ⑥ まとめ：一般確率論の今後
- ⑦ Appendix

Q-like モデルの定義

$\mathcal{V} = \mathcal{L}_H(\mathcal{H})$, $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}_H^+(\mathcal{H})$, $u = \mathbb{I}$

Q-Like モデル G

- 状態 ρ ($\in \mathcal{S}(G) \subset \mathcal{S}(QT)$)
 - ▶ $\rho \in \mathcal{C}$
 - ▶ $\text{Tr } \rho = 1$
- 測定 $\{M_i\}_i$ ($\in \mathcal{M}(G) \supset \mathcal{M}(QT)$)
 - ▶ $M_i \in \mathcal{C}^*$
 - $\Leftrightarrow \text{Tr } \rho M_i \geq 0$ ($\forall \rho \in \mathcal{C}$)
 - ▶ $\sum_i M_i = \mathbb{I}$
- 測定値 i を得る確率
 - ▶ $p_i = \text{Tr } \rho M_i$

→ 状態の制限 $\leftrightarrow$ 測定の拡張

—— 操作的要請 ——

Q-like		量子
$\mathcal{L}_H(\mathcal{H})$	$\leftrightarrow$	$\mathcal{L}_H(\mathcal{H})$
with Tr		with Tr
$\mathcal{C}$	$\leftrightarrow$	$\mathcal{L}_H^+(\mathcal{H})$
$\mathbb{I}$	$\leftrightarrow$	$\mathbb{I}$

—— 操作的要請 ——

- $\{p_i\}$ は確率分布
 - $\text{Tr } \rho M_i \geq 0$
 - $\sum_i \text{Tr } \rho M_i = 1$

状態識別 (仮説検定)

- 未知状態 ρ が ρ_0, ρ_1 のどちらかに確率 $p, 1-p$ で準備される。
未知状態 ρ を一度の測定 $M = \{M_0, M_1\}$ によって高い確率で同定する

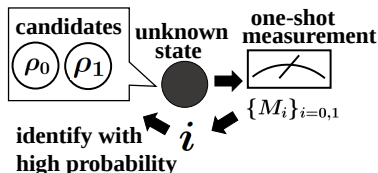
- 誤り確率：

$$\text{Err}(\rho_0; \rho_1; p; M) := p \text{Tr } \rho_0 M_1 + (1-p) \text{Tr } \rho_1 M_0$$

- 量子論における誤り確率の下限 Quantum Helstrom Bound：

$$\inf_{M \in \mathcal{M}(\text{QT})} \text{Err}(\rho_0; \rho_1; p; M) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \|p\rho_0 - (1-p)\rho_1\|_1$$

- $p = 1/2$, $\text{Err} = 0 \rightarrow \|\rho_0 - \rho_1\| = 2 \rightarrow \rho_1, \rho_2$ が直交 ($\text{Tr } \rho_0 \rho_1 = 0$)



状態識別 (仮説検定)

- 未知状態 ρ が ρ_0, ρ_1 のどちらかに確率 $p, 1 - p$ で準備される。
未知状態 ρ を一度の測定 $M = \{M_0, M_1\}$ によって高い確率で同定する

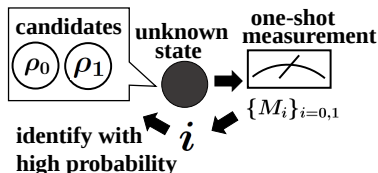
- 誤り確率：

$$\text{Err}(\rho_0; \rho_1; p; M) := p \text{Tr} \rho_0 M_1 + (1 - p) \text{Tr} \rho_1 M_0$$

- 量子論における誤り確率の下限 Quantum Helstrom Bound：

$$\inf_{M \in \mathcal{M}(\text{QT})} \text{Err}(\rho_0; \rho_1; p; M) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \|p\rho_0 - (1 - p)\rho_1\|_1$$

- $p = 1/2$, $\text{Err} = 0 \rightarrow \|\rho_0 - \rho_1\| = 2 \rightarrow \rho_1, \rho_2$ が直交 ($\text{Tr} \rho_0 \rho_1 = 0$)



状態識別 (仮説検定)

- 未知状態 ρ が ρ_0, ρ_1 のどちらかに確率 $p, 1 - p$ で準備される。
未知状態 ρ を一度の測定 $M = \{M_0, M_1\}$ によって高い確率で同定する

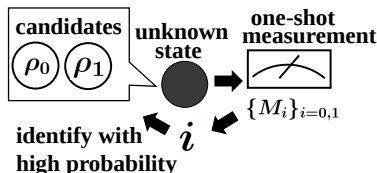
- 誤り確率：

$$\text{Err}(\rho_0; \rho_1; p; M) := p \text{Tr } \rho_0 M_1 + (1 - p) \text{Tr } \rho_1 M_0$$

- 量子論における誤り確率の下限 Quantum Helstrom Bound：

$$\inf_{M \in \mathcal{M}(\text{QT})} \text{Err}(\rho_0; \rho_1; p; M) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \|p\rho_0 - (1 - p)\rho_1\|_1$$

- $p = 1/2$, $\text{Err} = 0 \rightarrow \|\rho_0 - \rho_1\| = 2 \rightarrow \rho_0, \rho_1$ が直交 ($\text{Tr } \rho_0 \rho_1 = 0$)



Q-like モデルの具体例

$$M_0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \Gamma \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right), \quad M_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

- 測定 $\{M_0, M_1\}$ は非直交 separable 状態 ρ_0, ρ_1 を完全識別する

$$\rho_0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho_1 := \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

- i.e., $\text{Tr } \rho_i M_j = \delta_{ij}$ ($\{M_0, M_1\}$ による完全識別)
- 量子論では, $\text{Tr } \rho_i M_j = \delta_{ij} \Leftrightarrow \text{Tr } \rho_0 \rho_1 = 0$ (But in (3) $\text{Tr } \rho_0 \rho_1 > 0$)
- このように一般確率モデルでは量子論を越える情報処理が行える

Q-like モデルの具体例

$$M_0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \Gamma \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right), \quad M_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

- 測定 $\{M_0, M_1\}$ は非直交 separable 状態 ρ_0, ρ_1 を完全識別する

$$\rho_0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho_1 := \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

- i.e., $\text{Tr } \rho_i M_j = \delta_{ij}$ ($\{M_0, M_1\}$ による完全識別)
- 量子論では, $\text{Tr } \rho_i M_j = \delta_{ij} \Leftrightarrow \text{Tr } \rho_0 \rho_1 = 0$ (But in (3) $\text{Tr } \rho_0 \rho_1 > 0$)
- このように一般確率モデルでは量子論を越える情報処理が行える

Q-like モデルの具体例

$$M_0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \Gamma \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right), \quad M_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

- 測定 $\{M_0, M_1\}$ は非直交 separable 状態 ρ_0, ρ_1 を完全識別する

$$\rho_0 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho_1 := \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

- i.e., $\text{Tr } \rho_i M_j = \delta_{ij}$ ($\{M_0, M_1\}$ による完全識別)
- 量子論では, $\text{Tr } \rho_i M_j = \delta_{ij} \Leftrightarrow \text{Tr } \rho_0 \rho_1 = 0$ (But in (3) $\text{Tr } \rho_0 \rho_1 > 0$)
- このように一般確率モデルでは量子論を越える情報処理が行える

仮説検定性能による量子論の導出

- ある Q-like model は量子論の限界を破る
- $\mathcal{S}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{S}(\text{QT})$ ゆえ $\mathcal{M}(\mathcal{G}) \supset \mathcal{M}(\text{QT})$ のため
- 実はこのような集合の意味で量子に属さない測定は必ず状態識別性能が優位になる
 - ▶ 一般に状態識別性能がノルムを定義することに由来
- 状態識別性能は量子論を特徴付ける [HA and M. Hayashi 2024]
(量子論は状態識別性能の意味である種ワーストなモデル)

- Q-like モデルを実現するには量子論の限界を破る必要がある

→ Q-like モデルは実現不可能？

- 量子論においても、追加のコストを課したりある種のコストを無視した場合には、状態識別性能は向上する

仮説検定性能による量子論の導出

- ある Q-like model は量子論の限界を破る
- $\mathcal{S}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{S}(\text{QT})$ ゆえ $\mathcal{M}(\mathcal{G}) \supset \mathcal{M}(\text{QT})$ のため
- 実はこのような集合の意味で量子に属さない測定は必ず状態識別性能が優位になる
 - ▶ 一般に状態識別性能がノルムを定義することに由来
- 状態識別性能は量子論を特徴付ける [HA and M. Hayashi 2024]
(量子論は状態識別性能の意味である種ワーストなモデル)

- Q-like モデルを実現するには量子論の限界を破る必要がある

→ Q-like モデルは実現不可能？

- 量子論においても、追加のコストを課したりある種のコストを無視した場合には、状態識別性能は向上する