

トポロジカル物質の表面に 誘導される重力場について

深谷英則
(大阪大学)



Shoto Aoki (RIKEN iTHEMS), HF [2203.03782](#), [2212.11583](#)
Shoto Aoki, HF, Naoto Kan (U. Osaka) [2402.09774](#)
S. Aoki, HF, N.Kan, [M. Koshino and Y. Matsuki](#), [2304.13954](#)
+ work in progress

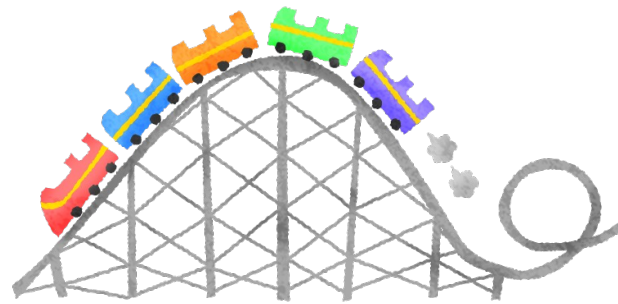
重力を感じたことがありますか？

地球の重力：地表付近での重力加速度は

$$9.8 \text{ m/s}^2$$

地球の重力以外の重力を感じたことがありますか？

例) ジェットコースターのカーブやループ



ロケットの加速度だと**3-4G** [地表の重力加速度の**3-4倍**] に達するそうです。

でもこれは万有引力ではなく、**慣性力**と中学、高校では習いました。

アインシュタインの等価原理

慣性質量 = 重力質量

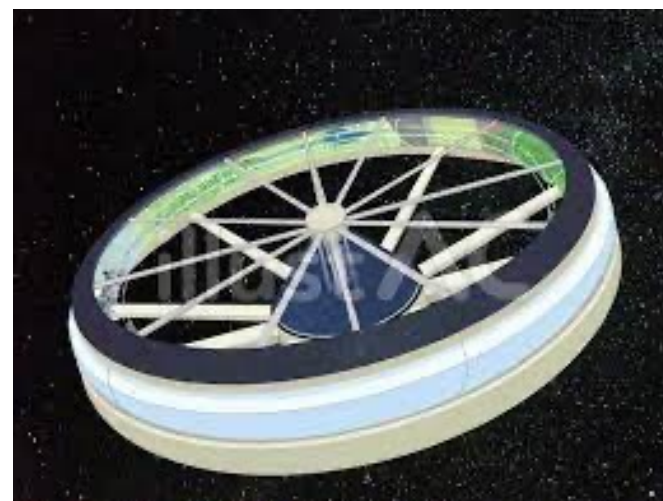
あらゆる慣性力 = 重力 (と局所的には区別できない).

慣性力の特徴：

運動が曲がった経路に
拘束される = 慣性力 = 誘導重力

空間がはじめてから曲が
っている = 一般相対論

Cf.) スペースコロニーの遠心力.

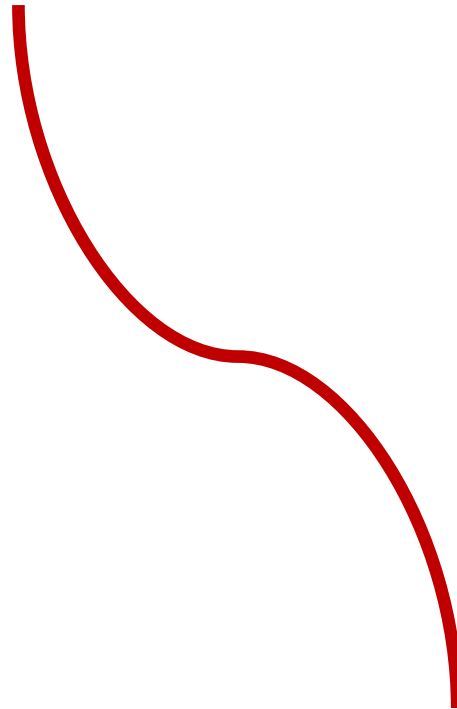


トポロジカル物質の表面が曲がっている場合、
その上に拘束された電子はどのような
誘導重力を感じるか？

トポロジカル物質

中身(bulk)は絶縁体で電
流は流れないのに、
表面に拘束された電子
だけ流れることのでき
る物質

普通の物質
あるいは研究室



トポロジカル物質の表面が曲がっている場合、
その上に拘束された電子はどのような
誘導重力を感じるか？

トポロジカル物質

表面に拘束された電子は慣性力
による誘導重力を感じるはず。

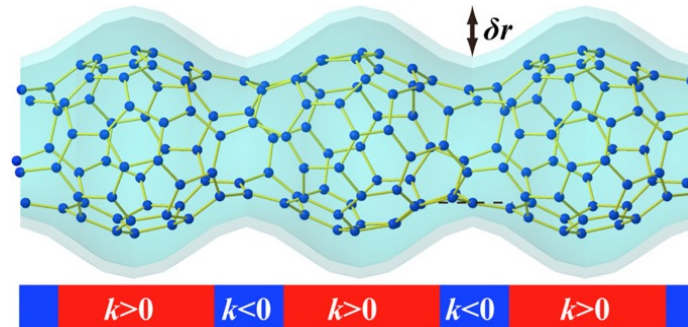
普通の物質
あるいは研究室

ではどんな重力場を
感じるのか？ (=私たちの
研究)

物性実験による誘導重力の報告例

Onoe et al. 2012

によると、C₆₀ ポリマー
の光電子分光実験で



伝導電子が重力場中のHamiltonian

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i (\sqrt{g} g^{ij} \partial_j) + (h^2 - k) \right]$$

に従って運動していると報告。

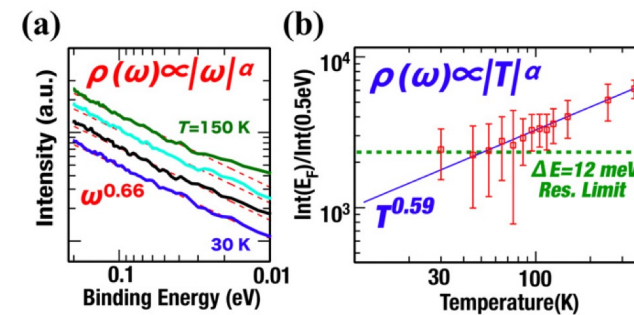
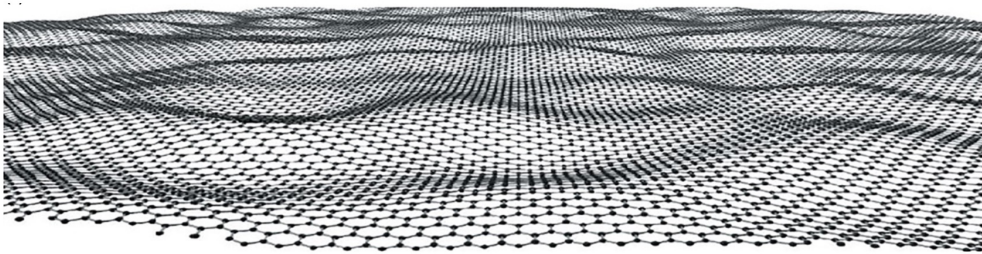


Fig. 3: (Color online) The power-law dependence of the PES spectral function shown in fig. 2 on the binding energy (a) and temperature (b).

グラフェン上の重力

[F. de Juan et al. 2012, Roberts & Wiseman 2023...]

グラフェン=炭素原子からなる 2 次元六角格子状の物質



高い熱、電気伝導性を示す。

有効理論は相対論的な Dirac フェルミオン
としてふるまう。曲げやすい。

“重力(の類似物)” が強束縛模型 Hamiltonian から誘導された。

Figure from Wiseman's slides

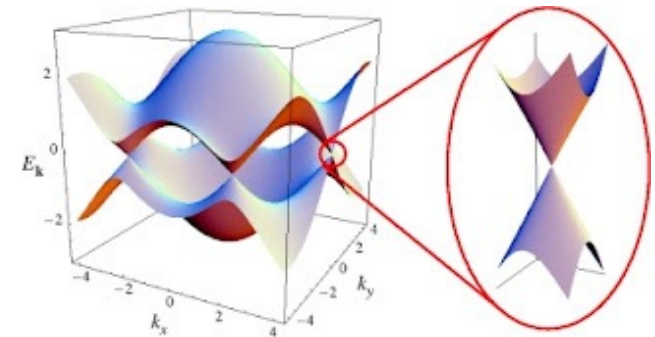


Figure from R. McKenzie's webpage.

トポロジカル物質に現れる誘導重力

連続理論で球状のトポロジカル絶縁体の表面に現れる
誘導重力について2つのグループが理論計算:

Parente, Lucignano, Vitale, Tagliacozzo, Guinea,
“Spin connection and boundary states
in a topological insulator,” PRB 83, 075424 (2011)

Imura, Yoshimura, Takane, Fukui,
“Spherical topological insulator,” PRB 86, 235119 (2012)

両方とも2次元球面を連続場の理論で研究.

しかし、まだ実験による報告はない.

本研究：連続と格子両面で以下を研究。

- トポロジカル物質が一般の曲がった表面を持つ場合、どのような誘導重力が生じるか？また、それはどのように検出できるか？
- 本物の重力=一般相対性理論(の量子化)に何かヒントが得られないか？高次元の平坦な時空の格子化->低エネルギー有効理論として重力が得られないか？=これまでにない格子重力理論のアプローチ。
- トポロジカル絶縁体に磁気モノポールを入れたらどうなるか？(Witten effect) その微視的構造が、実は曲がった表面と誘導重力で説明できることを明らかにした。

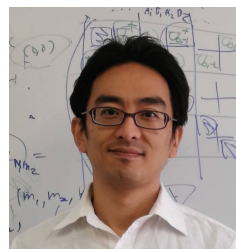
共同研究者のみなさん



青木匠門
(RIKEN iTHEMS)



簡直人
(大阪大学)



越野幹人
(大阪大学->
東大物性研)



松木義幸
(大阪大学->
就職)

Contents

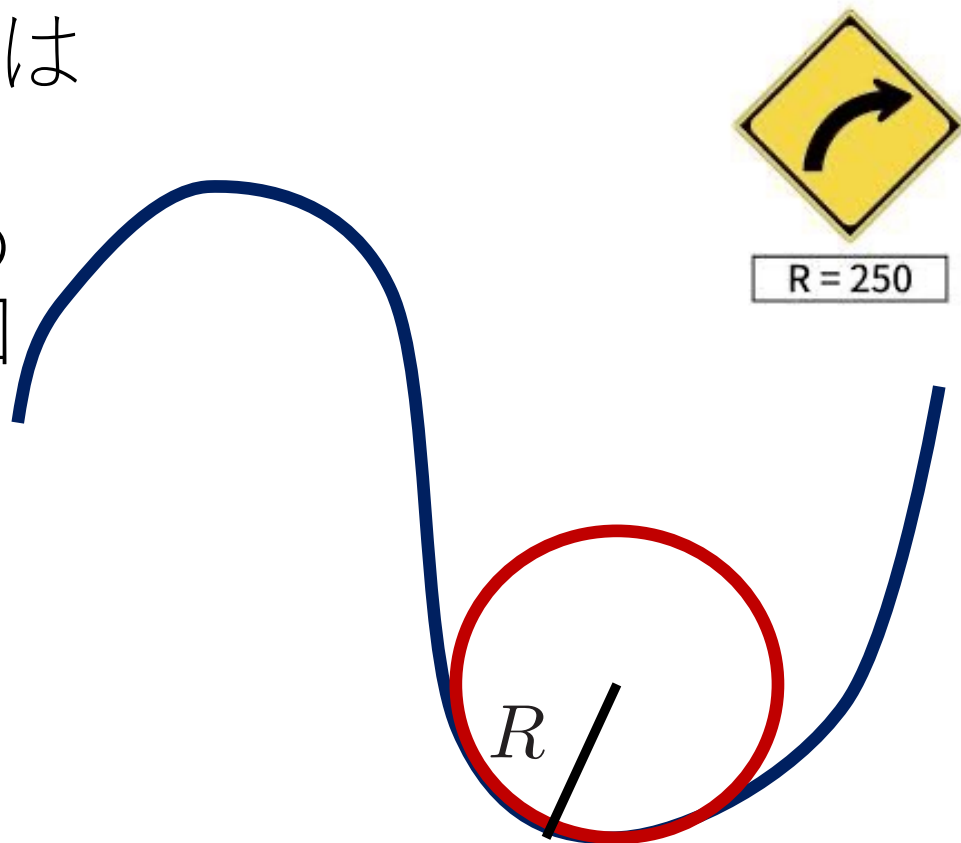
- ✓ 1. 導入
 - 曲がった物質表面にどんな誘導重力が現れるか？
- 2. 空間の曲がり方と誘導重力
- 3. 一般の曲がったドメインウォールフェルミオンの連続理論での解析
- 4. 2次元球面ドメインウォールフェルミオンの格子理論の数値解析
- 5. 磁気単極子をトポロジカル絶縁体に入れると何が起こるのか？
- 6. まとめと妄想

“曲がっている”とは

1次元の場合：曲線の
各点に接し、その2回
微分が一致する円

(接触円)の半径=曲率
半径の逆数で表す。

$$\kappa = \frac{1}{R}$$



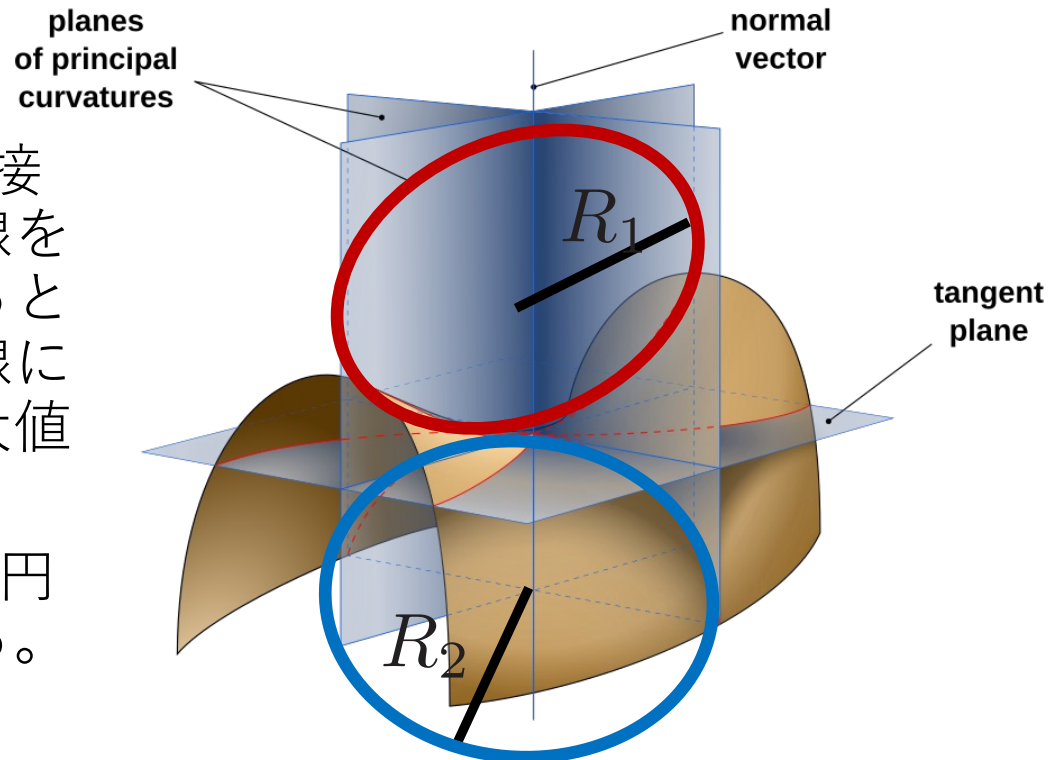
“曲がっている”とは

2次元の場合：曲面の各点に接し、法線が決まる。その法線を含む平面を法線を軸にぐるっと一回転、曲面と交差する曲線について曲率を計算、その最大値と最小値をかけて定義する。

* 法線ベクトルの逆側に接触円がある場合は負の値を与える。

$$K = \frac{1}{R_1 R_2}$$

Figure from Wikipedia



“法線”がないと定義できない？
外側= 3次元空間が必要？

Gaussの驚異定理[1827]

2次元の曲面のGauss 曲率は内在的な量のみで記述できる。

どうするか？ 各点で“距離”が定義されていればよい。

平面上の (x_1, x_2) と $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$ の(微小)距離：

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$$

曲面では $ds^2 = \sum_{\mu, \nu=1,2} g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$ $g_{\mu\nu}(x)$ ：計量

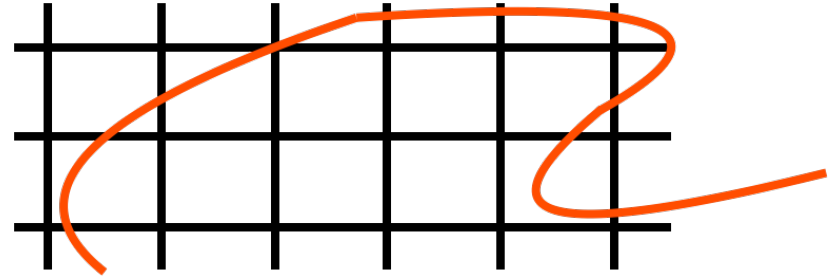
以下、和の記号は省略することあり

距離の伸び縮みがわかれば曲がり具合もわかる。

Gauss 曲率は $g_{\mu\nu}(x)$ だけで書ける！(Riemannがn次元に拡張)

Nashの埋め込み定理

[Nash, 1956]



- あらゆる任意の次元の曲面 Y (Riemann多様体)は有限高次元の平坦な時空に埋め込める。 $x^\mu = x^\mu(y^1, \dots, y^n)$
- しかも Y の計量は埋め込みで(一般座標変換&局所ローレンツ変換のゲージ任意性を除いて)一意的に決まる:

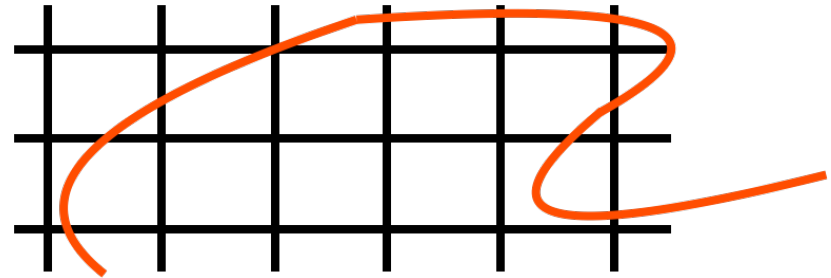
$$g_{ij} = \sum_{\mu\nu} \delta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}.$$

つまり、曲面の内在的な量であるはずの計量を外在的な量で書き直すことができる。

(深谷の超訳)=あらゆる内在的な重力は外在的に得られる誘導重力で書き直すことができる。

Nashの埋め込み定理

[Nash, 1956]



しかも γ の計量は埋め込みで(一般座標変換&局所ローレンツ変換のゲージ任意性を除いて)一意的に決まる:

$$g_{ij} = \sum_{\mu\nu} \delta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}.$$

ただし、物理が γ 上の計量のみで書けるかどうかは自明ではない。外在(extrinsic)的な重力場の影響は系ごとに検証することが重要。

Contents

- ✓ 1. 導入
曲がった物質表面にどんな誘導重力が現れるか？
- ✓ 2. 空間の曲がり方と誘導重力
空間の曲がり方は内在的にも外在的にも記述が可能。誘導重力は後者。
- 3. 一般の曲がったドメインウォールフェルミオンの連続理論での解析
- 4. 2次元球面ドメインウォールフェルミオンの格子理論の数値解析
- 5. 磁気単極子をトポロジカル絶縁体に入れると何が起こるのか？
- 6. まとめと妄想

Dirac 方程式 (電子の従う運動方程式)

Schrodinger 方程式 $\left[i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right] \psi(x, t) = 0$
(時間と空間が非対称 : $c = \hbar = 1$)
相対論と両立しない)

Klein-Gordon 方程式 (ボーズ粒子にのみ使える)

$$[-\partial_t^2 + \partial_i^2 + m^2] \psi = 0. \quad \text{略記 } \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

Dirac 方程式 $[-\gamma_\mu \partial^\mu + m] [\gamma_\mu \partial^\mu + m] \psi = 0.$

$$[\gamma_\mu \partial^\mu + m] \psi = 0.$$

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_i \\ -i\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

Euclid化した後の4x4 Gamma matrices

Dirac 方程式

電磁場などのゲージ場があるときは微分を共変微分に変える：

$$[\gamma^\mu (\partial_\mu + iA_\mu) + m] \psi = 0.$$



4元ゲージポテンシャル
(電磁場 or グルーオン場)

NOTE：質量は正負どちらも許される。しかも物理的にも意味がある(後述)。

＊物性理論でも準粒子がDirac 方程式に従う場合がある。一回微分項は spin-軌道相互作用etc.から、質量項はフェルミエネルギーからのギャップとして、それぞれ現れる。

平坦な Domain-wall フェルミオン

質量項の符号を領域(domain)によって変えた系。

$$S = \int_X d^4x \bar{\psi}(D + m\epsilon(x))\psi(x) \quad m > 0$$
$$\epsilon(x) = \begin{cases} +1 & x \in X_+ \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

以下で、絶縁体中の電子場のときは、 X_+ がトポロジカル絶縁体でそれ以外(実験室を含む)が通常の絶縁体(のモデル)の記述になっていることを説明する。

4次元 Dirac 方程式の変数分理解

$\epsilon(x) = \text{sign}(x_1)$ のときのDirac 方程式

$$0 = [D + m\text{sign}(x_1)] \psi = \gamma^1 [\partial_1 + m\gamma^1\text{sign}(x_1) + \gamma_1 D^{3D}] \psi$$

で変数分離解を仮定： $\psi = \phi(x_1)\chi(x_2, x_3, x_4)$

$$(\partial_1 + m\gamma_1\text{sign}(x_1)) \phi = 0$$

$$D^{3D}\chi(x_2, x_3, x_4) = 0.$$

Dirac 方程式の変数分理解

$$(\partial_1 + m\gamma_1 \text{sign}(x_1)) \phi = 0$$

γ_1 の固有値が+1 の状態で $x_1 < 0$ の領域では

$$(\partial_1 - m) \phi = 0 \quad \text{解は} \quad \phi \propto \exp(mx_1)$$

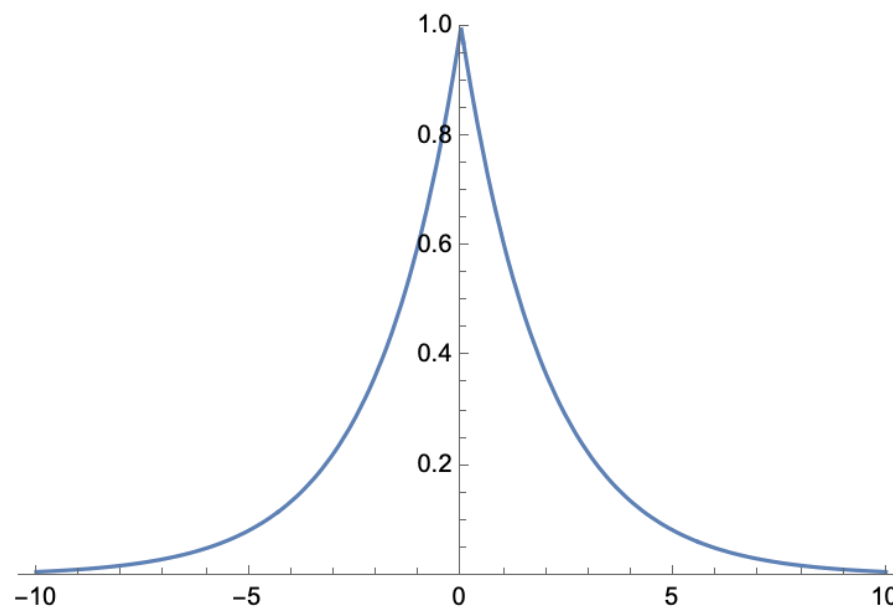
γ_1 の固有値が+1 の状態で $x_1 \geq 0$ の領域では

$$(\partial_1 + m) \phi = 0 \quad \text{解は} \quad \phi \propto \exp(-mx_1)$$

まとめると、 $\phi \propto \exp(-m|x_1|)$

$x_1 = 0$ に局在するedge解になっている。

エッジモード



まとめると、 $\phi \propto \exp(-m|x_1|)$

$x_1 = 0$ に局在するedge解になっている。

Edge状態

ドメインウォール or 符号関数がないと解は存在しない(二乗可積分ではない)。

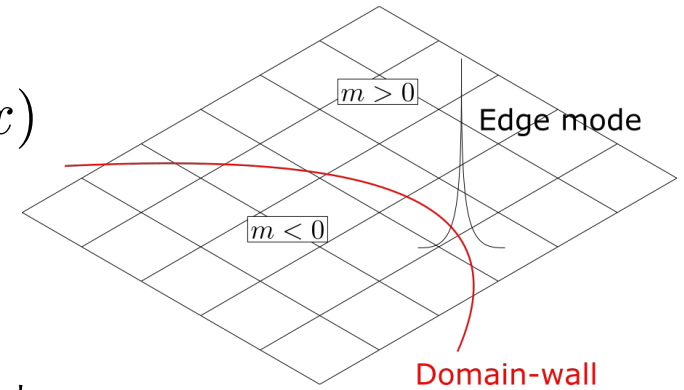
同様に、 γ_1 の固有値が-1の状態の解も存在しない=解はカイラルである。

$D^{3D}\chi(x_2, x_3, x_4) = 0$. 質量ゼロの2+1次元Dirac場の方程式

まとめ：domain-wall フェルミオンのDirac方程式は、エッジに局在するカイラルな質量ゼロの解を持つ。

曲がったドメインウォールフェルミオン [S.Aoki, HF 2022]

$$S = \int d^{n+1}x \Psi^\dagger \gamma^0 \left[\sum_i \gamma^i \partial_i + \text{sgn}(f(x)) M \right] \Psi(x)$$



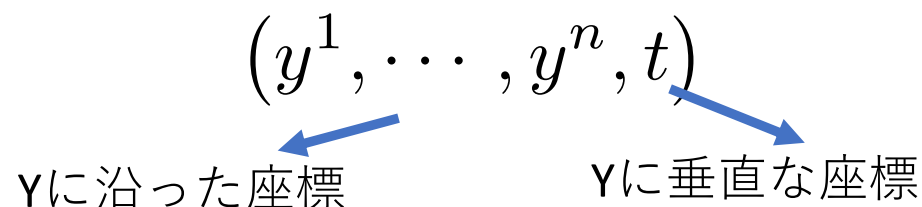
埋め込みを決める関数 $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ を用意。

f のゼロ点でドメインウォール Y を描く: $Y = \{f = 0\}$ 以下で

- 1) エッジ局在モードが一般に存在する。
- 2) それらは $\gamma_{\text{normal}} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\gamma}$ の“カイラル”な固有状態である。
- 3) それらは誘導(されたスピン接続を通して)重力を感じる。

局所ローレンツ変換

時空の各点でローレンツ変換(Euclid時空ではただの回転)を施し、

$$(y^1, \dots, y^n, t)$$


The diagram shows the coordinate tuple $(y^1, \dots, y^n, t)$ with two blue arrows pointing downwards from it. The left arrow points to the text "Yに沿った座標" (coordinates along Y) and the right arrow points to the text "Yに垂直な座標" (coordinates perpendicular to Y).

となる座標でDirac方程式を書き換える。

$$D_{\text{DW}} = \sum_i \gamma^i \partial_i + \text{sgn}(f(x))M = \sum_i \gamma^i \left[\sum_{a=1}^n e_i^a \partial_{y^a} + e_i^t \partial_t \right] + \text{sgn}(t)M$$

ここで変数変換にともなう

$$e_i^a = \frac{\partial y^a}{\partial x^i} \quad e_i^t = \frac{\partial t}{\partial x^i} \quad \text{を多脚場と呼ぶ。}$$

局所ローレンツ変換の続き

フェルミオン場の変換も必要: $\Psi \rightarrow \exp([\gamma^i, \gamma^j] \epsilon_{ij}(x)) \Psi$

変換後のDirac演算子は

$$D'_{\text{DW}} = e^{[\gamma^i, \gamma^j] \epsilon_{ij}(x)} D_{\text{DW}} e^{-[\gamma^i, \gamma^j] \epsilon_{ij}(x)} = \sum_i \gamma^i \left[\sum_{a=1}^n e_i^a (\partial_{y^a} + \omega_a) + e_i^t (\partial_t + \omega_t) \right] + \text{sgn}(t) M$$

以下の**内在的(intrinsic)スピン接続** [電磁場みたいなものの重力版]

$$\omega_a = \frac{1}{2} \omega_{bc,a} [\gamma^b, \gamma^c], \quad \omega_{bc,a} = -\frac{1}{2} (C_{bc,a} + C_{ca,b} - C_{ab,c}), \quad C_{ab,c} = \delta_{lk} e_c^l (\partial_b e_a^k - \partial_a e_b^k)$$

および**外在的スピン接続** [平均曲率という名前がついている]を含む。

$$\omega_t = -\frac{1}{2} \sum_a \omega_{at,a}$$

ここまでは何もしてません。

平坦な時空のDirac方程式をわざわざ曲がった座標で変数変換して複雑な形に表しただけです。

しかし、電子がこのDirac方程式に従って運動する場合、誘導重力が有効場として現れます。

$$D'_{\text{DW}} = \sum_i \gamma^i \left[\sum_{a=1}^n e_i^a (\partial_{y^a} + \omega_a) \right] + \gamma^t [\partial_t + \omega_t + \gamma^t \text{sgn}(t) M]$$

n-次元で質量ゼロの
曲がった空間上のDirac演算子

ドメインウォール面に垂直
方向微分+質量項

=拘束力

エッジ状態解の具体形

Dirac演算子

$$\gamma^t = \sum_i \gamma^i e_i^t$$

$$D'_{\text{DW}} = \sum_i \gamma^i \left[\sum_{a=1}^n e_i^a (\partial_{y^a} + \omega_a) \right] + \gamma^t [\partial_t + \omega_t + \gamma^t \text{sgn}(t) M]$$

は、以下の domain-wall の位置に局在した固有状態を持つ。

$$\psi = \exp \left[-M|t| \left\{ 1 + \frac{1}{8M|t|} \int_0^t dt' \text{tr} \omega_t(y, t') \right\} \right] v_+ \otimes \chi(y) \quad +O(1/M) + O(\exp(-M|t|))$$

この状態はカイラル： $\gamma^t v_+ = +v_+$ で、 $\chi(y)$ は domain-wall 上の

$$\sum_i \tilde{\gamma}^i \left[\sum_{a=1}^n e_i^a (\partial_{y^a} + \omega_a) \right] \chi(y) = i\lambda \chi(y)$$

外在接続(平均曲率)は全然運動に影響しない！

運動方程式を満たす。  内在(intrinsic)Spin接続。

外在曲率は $1/M$ で抑えられる。

$$\psi = \exp \left[-M|t| \left\{ 1 + \frac{1}{8M|t|} \int_0^t dt' \text{tr} \omega_t(y, t') \right\} \right] v_+ \otimes \chi(y)$$

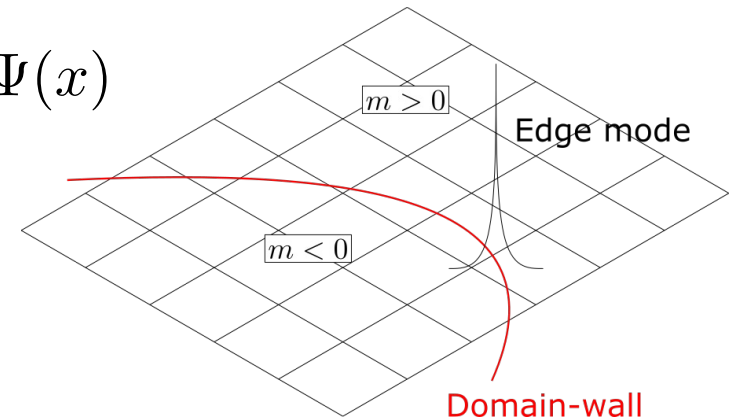
- トポロジカル物質の表面の電子は、内部(バルク)の影響を全く受けず、内在的な曲率のみを感じて運動する。
- もしわたしたちの物質が平坦な高次元時空に埋め込められた4次元ドメインウォールのエッジ状態でできていたら、私たちは5次元方向の存在を知覚できない。

*ただし、ゲージ場をこのように表面に拘束する方法は知られていない。

前半のまとめ

[S.Aoki, HF 2022]

$$S = \int d^{n+1}x \Psi^\dagger \gamma^0 \left[\sum_i \gamma^i \partial_i + \text{sgn}(f(x)) M \right] \Psi(x)$$
$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = 2\delta^{ij}$$



トポロジカル絶縁体の曲がった表面には

- 1) 一般にエッジ状態が局在する。
- 2) エッジ状態はカイラルである: $\gamma^t = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\gamma}$ の固有状態。
- 3) エッジ状態は **内在的な誘導重力のみを感じる**。
- 4) エッジ状態は **外在的な曲率を感じない**。
- 5) 誘導重力はDirac演算子の **固有値から検出可能である**。

Contents

- ✓ 1. 導入
曲がった物質表面にどんな誘導重力が現れるか？
- ✓ 2. 空間の曲がり方と誘導重力
空間の曲がり方は内在的にも外在的にも記述が可能。誘導重力は後者。
- ✓ 3. 一般の曲がったドメインウォールフェルミオンの連続理論での解析
曲面に拘束されたエッジ状態は内在的な重力に従って運動する。
- 4. 2次元球面ドメインウォールフェルミオンの格子理論の数値解析
- 5. 磁気単極子をトポロジカル絶縁体に入れると何が起こるのか？
- 6. まとめと妄想

2次元球面ドメインウォール

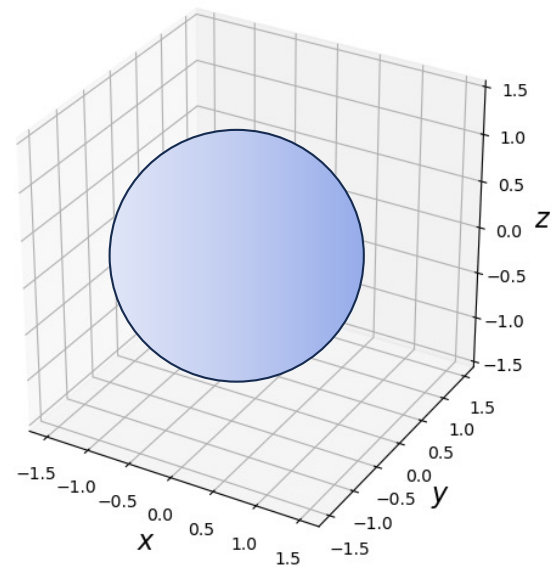
$\mathbb{R}^3$: 3次元平坦なEuclid空間のDirac 演算子

$$D = \sum_{i=1}^3 \sigma^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} - iA_i(x) \right) + m(x)$$

U(1) ゲージ場

質量項

$$m(x) = \begin{cases} -m & \text{for } |x| \leq r_0 \\ +M & \text{otherwise} \end{cases},$$



球面エッジ状態

Dirac演算子の極座標表示

$$D = \sigma_r \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} - \frac{r_0}{r} i D^{S^2} \right) - m(x), \quad \sigma_r = \sum_{i=1,2,3} \frac{\sigma_i x^i}{r}$$

2次元 Dirac 演算子(with 適当なゲージ固定)

$$i D^{S^2} = -\frac{1}{r_0} \sigma_3 \left[\sigma_1 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - i \hat{A}_\theta \right) + \frac{\sigma_2}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \phi} - i \hat{A}_\phi + \frac{i}{2} - \frac{i \cos \theta}{2} \sigma_3 \right) \right].$$

誘導された spin 接続

エッジに局在する解 = 2DのWeyl フェルミオン!

$$\psi_+^e = \frac{1}{r} \exp[-m(r_0 - r)] P_+ \chi(\theta, \phi), \quad P_+ = \frac{1 + \sigma_r}{2} \quad \int_{\mathbb{R}^3} r^2 dr d\theta d\varphi |\psi|^2 < \infty$$

球面ドメインウォールフェルミオン格子理論版

格子上のdomain-wall Dirac演算子を考える。

$$D_{DW} = \sum_{i=1}^3 \sigma^i \frac{\nabla_i - \nabla_i^\dagger}{2} + \sum \frac{1}{2} \nabla_i \nabla_i^\dagger + m(x),$$

where

$$m(x) = \begin{cases} -m & \text{for } |x| \leq r_0 \\ +M & \text{otherwise} \end{cases},$$

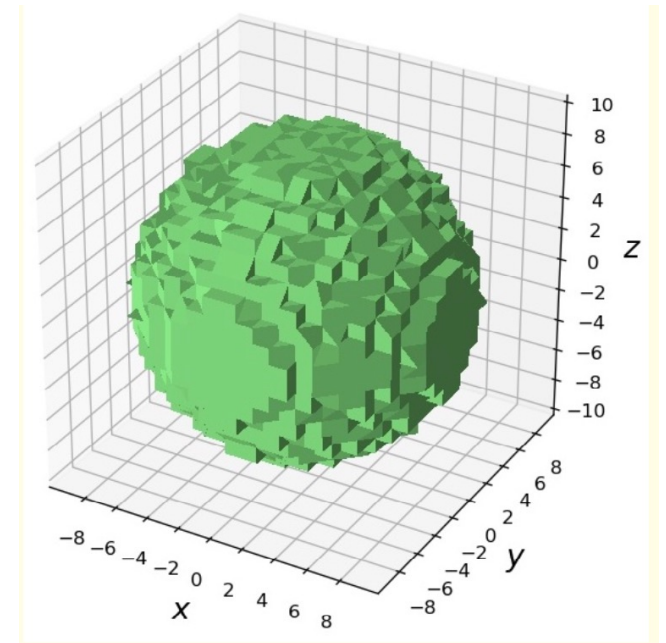
* $M \rightarrow \infty$ limit makes the numerical analysis easier.

数值的に固有値問題を解く。

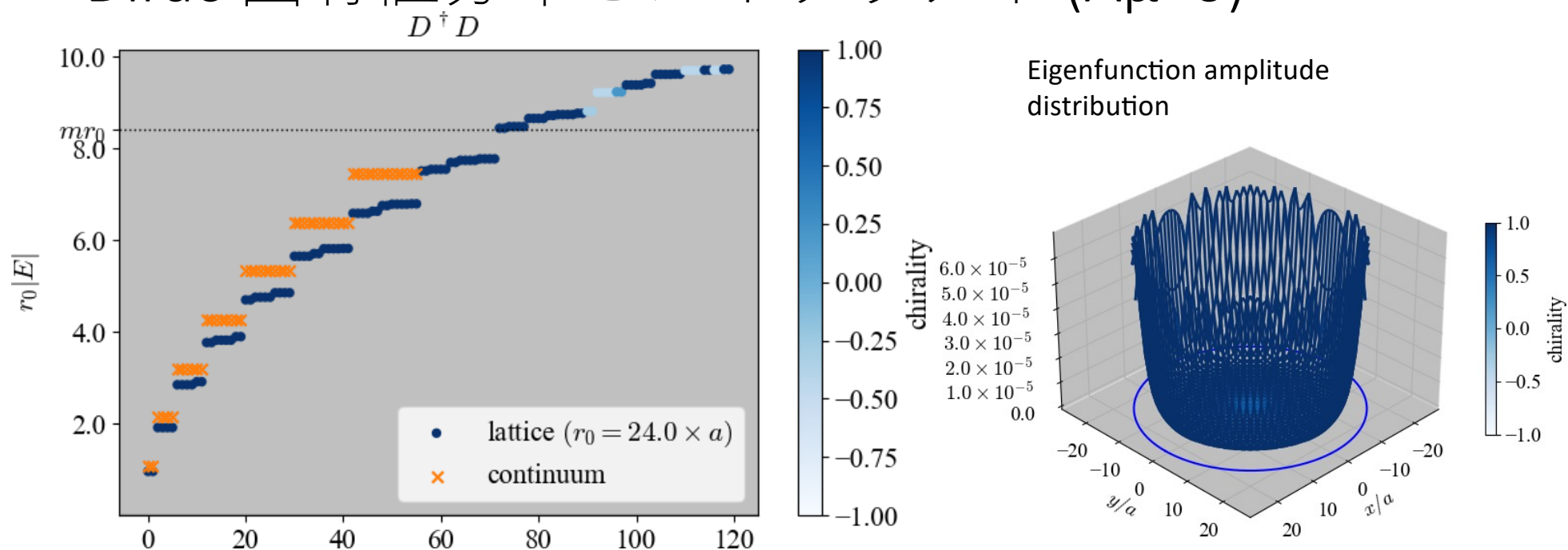
$$D_{DW}^\dagger D_{DW} \qquad D_{DW} D_{DW}^\dagger$$

この格子上には 局所Lorentz変換も
一般座標変換も存在しない。

$$a \nabla_i \psi(\mathbf{x}) = U_i(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i) - \psi(\mathbf{x})$$
$$a \nabla_i^\dagger \psi(\mathbf{x}) = U_i^\dagger(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i) \psi(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i) - \psi(\mathbf{x})$$



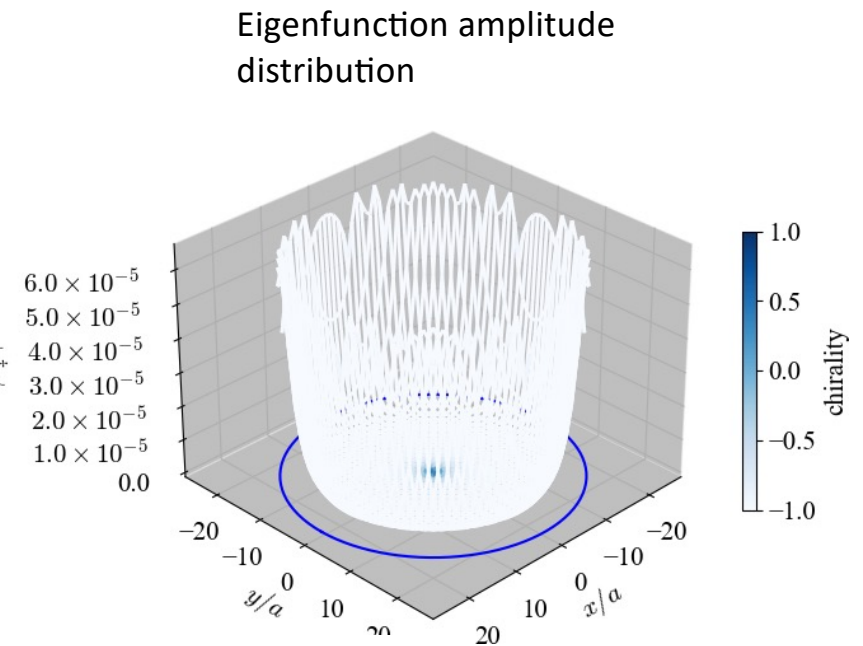
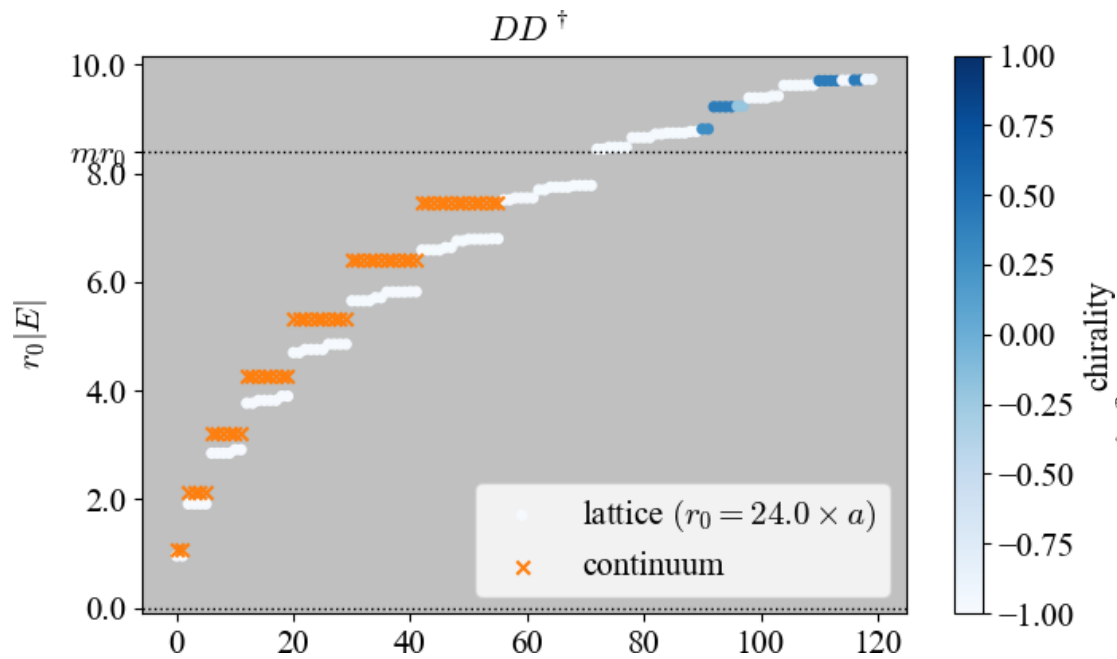
Dirac 固有値分布とカイラリティ ($A\mu=0$)



球面に局在するエッジ状態を確認！ Eigenvalue number

- 1) それらはほぼカイラル $\langle \sigma_r \rangle \sim +1$
- 2) 固有値にギャップ。(誘導重力の証拠!), $E^2 = \frac{(j + \frac{1}{2})^2}{r_0^2}$, $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$
- 3) 縮退も含めて連続理論とよい一致.

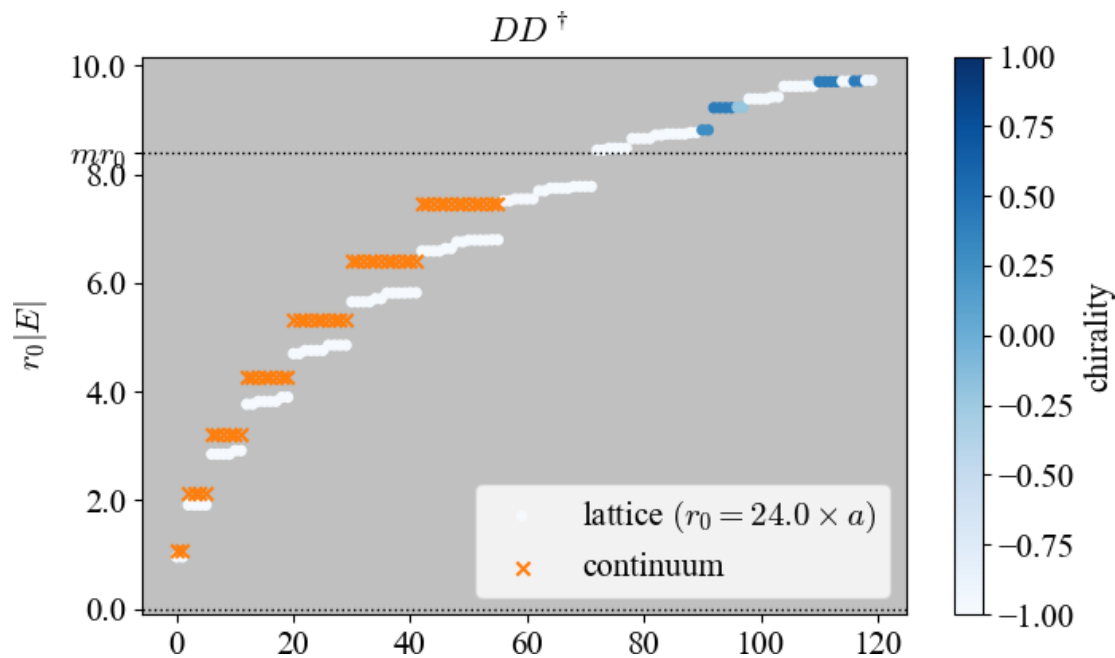
Dirac 固有値分布とカイラリティ ($A\mu=0$)



球面に局在するエッジ状態を確認！

- 1) それらはほぼカイラル $\langle \sigma_r \rangle \sim -1$,
- 2) 固有値にギャップ。(誘導重力の証拠！),
- 3) 縮退も含めて連続理論とよい一致.

Dirac 固有値分布とカイラリティ ($A\mu=0$)



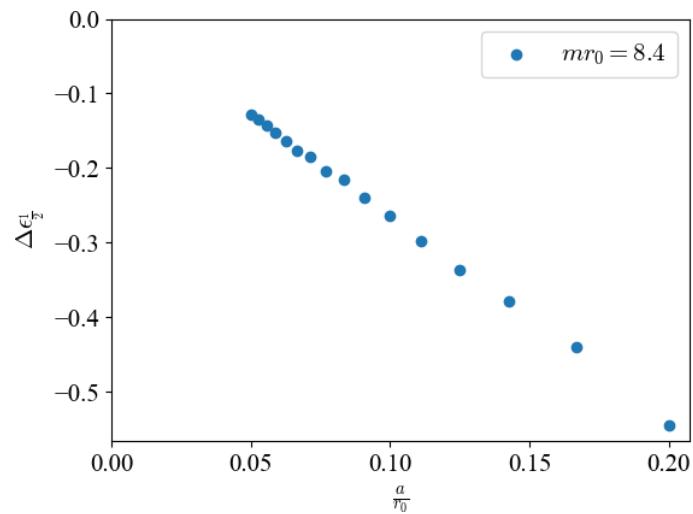
Eigenfunction amplitude
distribution

注)
格子点にもリンクにもどこ
にも重力の自由度は与えら
れていない。それにもか
わらず、重力場は「有効場」
として確かに存在してい
る。

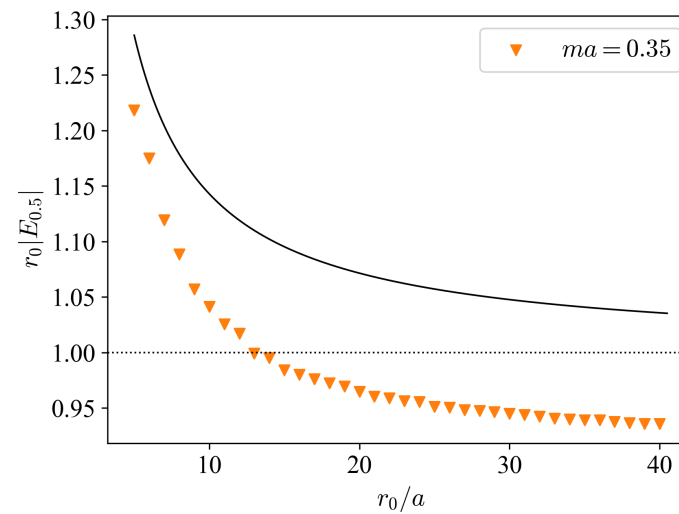
球面に局在するエッジ状態を確認！

- 1) それらはほぼカイラル $\langle \sigma_r \rangle \sim -1$,
- 2) 固有値にギャップ。(誘導重力の証拠！),
- 3) 縮退も含めて連続理論とよい一致.

連続極限&熱力学極限



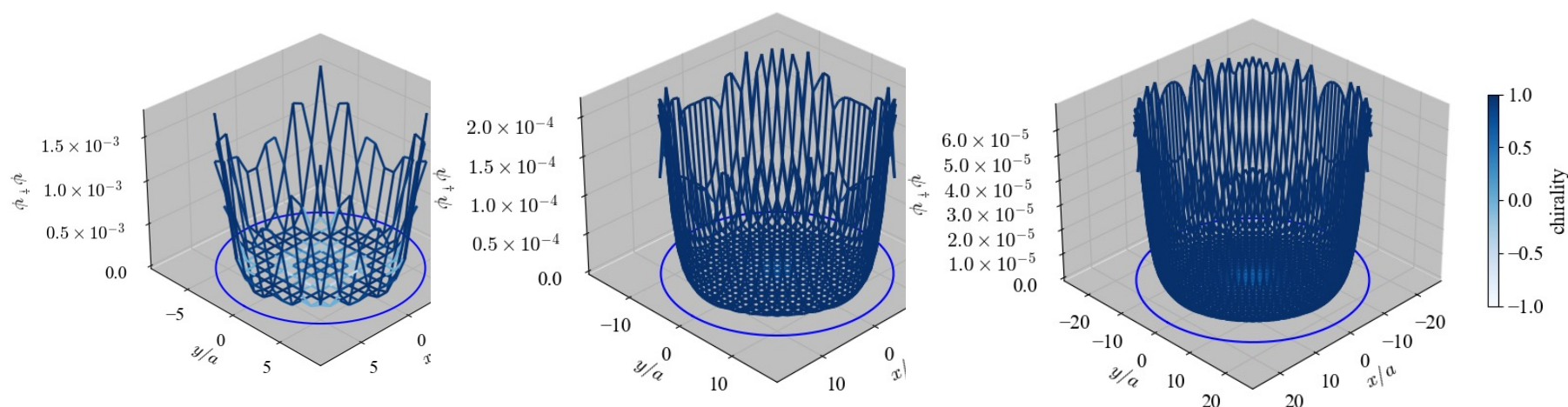
Deviation from continuum 1st eigenvalue



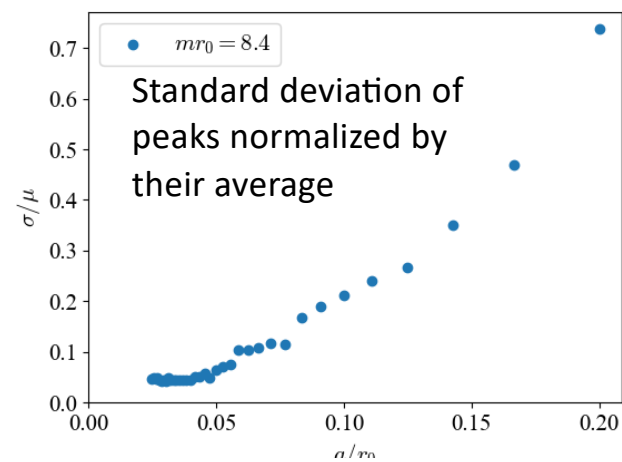
Volume scaling of continuum (solid curve) and lattice

どちらもよくコントロールされていることを確認。

回転対称性の回復



波動関数のジグザグが細かい格子で消えていく。



Contents

- ✓ 1. 導入
曲がった物質表面にどんな誘導重力が現れるか？
- ✓ 2. 空間の曲がり方と誘導重力
空間の曲がり方は内在的にも外在的にも記述が可能。誘導重力は後者。
- ✓ 3. 一般の曲がったドメインウォールフェルミオンの連続理論での解析
曲面に拘束されたエッジ状態は内在的な重力に従って運動する。
- ✓ 4. 2次元球面ドメインウォールフェルミオンの格子理論の数値解析
平坦な正方格子に重力場が有効場として現れることを確認。
- 5. 磁気単極子をトポロジカル絶縁体に入れると何が起こるのか？
- 6. まとめと妄想

What is a magnetic monopole?

In our world, every magnetic object is paired N and S poles.



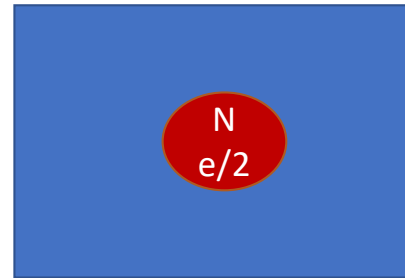
Figure from sozai-library.com

But magnetic monopoles naturally appear in grand-unified theory (or low energy limit of string theory).



They are stable but extremely sparse because they were created only before the inflation of the universe.

What will happen to monopole in topological insulator?



Witten effect [1979]: magnetic monopole inside topological insulator ($\theta=\pi$ vacuum) will become a dyon with 1 / 2 of unit electric charge.

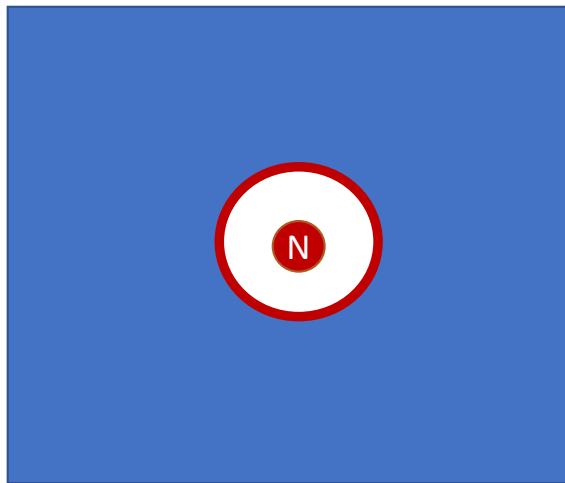
What is the microscopic mechanism ?

We find that curved domain-wall fermion can describe it.

[Cf. Recent works: Hidaka et al. 2020,2021, Fukuda-Yonekura 2021,,,]

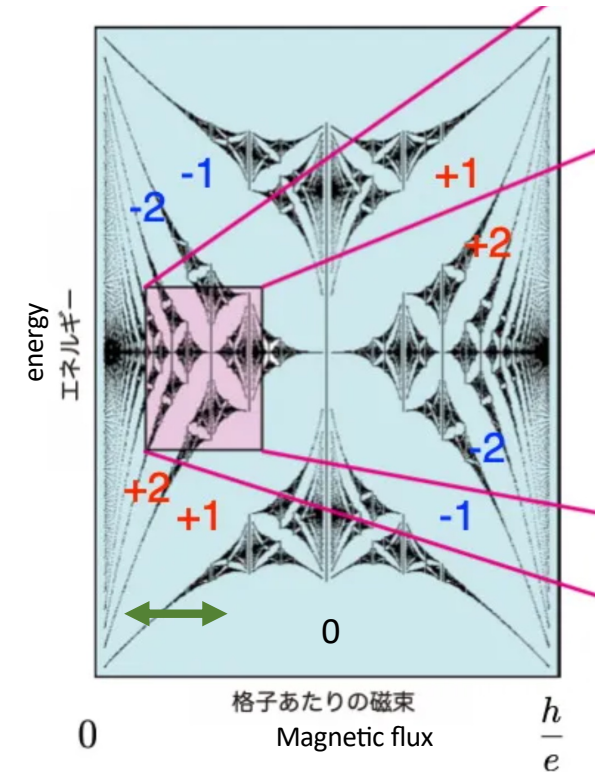
Topology change by magnetic fields

Topological phase can change by magnetic field in quantum Hall systems.



If the monopole has strong enough magnetic field, it may create a small trivial phase region + curved domain-wall

From webpage of Hatugai lab, U. Tsukuba



Numerical analysis on a 3D flat lattice

We consider 3D Dirac Hamiltonian
with spherical domain-wall.

$L=24,32, 48$ lattices

Domain-wall radius $r_0=(3/8)L$

Monopole put at $(L/2,L/2,L/2)$

Anti-monopole at $(L/2,L/2,1/2)$

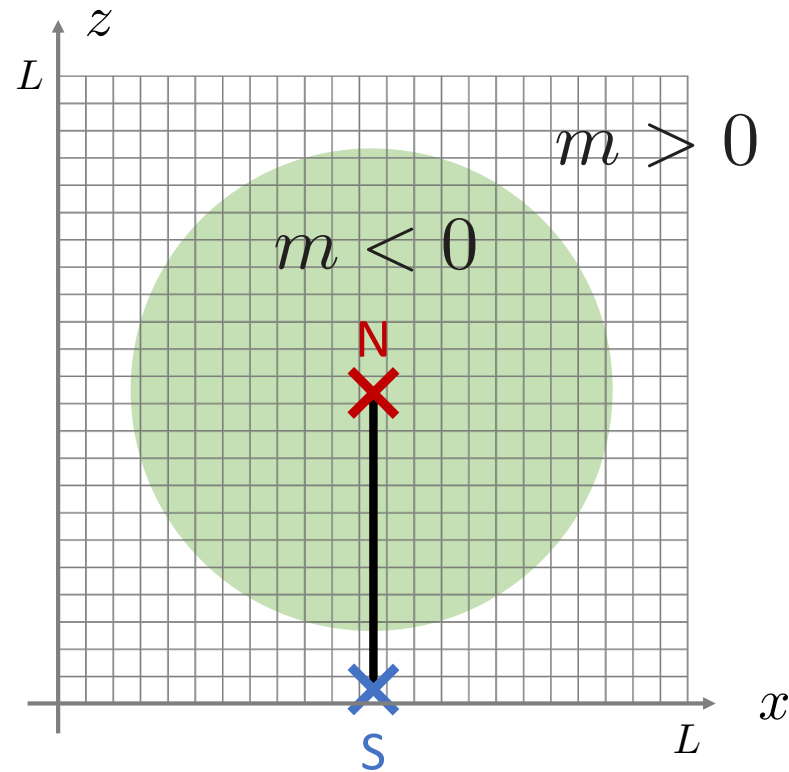
$m(r<r_0) = -14/(L+1)$

$m(r>r_0) = +14/(L+1)$

Open boundary condition at

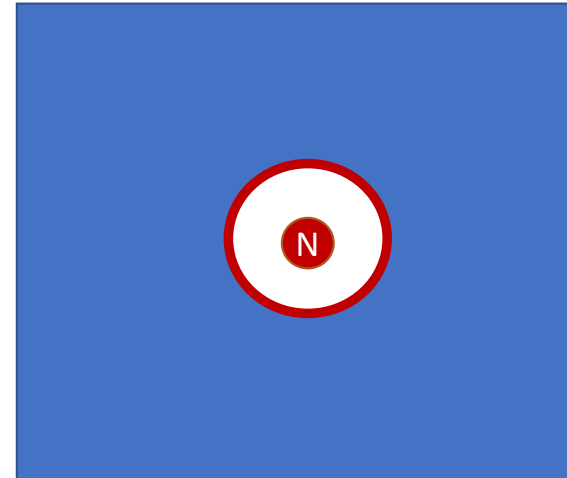
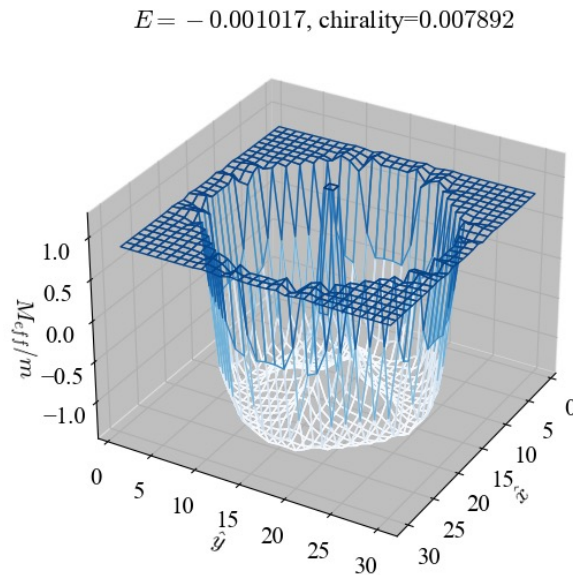
$x_i = 0$ or L ($m=\infty$ outside)

Monopole charge $n=0,1,-2$



Additive mass renormalization
at $z=(L+1)/2$ slice

$$\frac{\phi_0(\mathbf{x})^\dagger \left[-\sum_{i=1,2,3} \frac{1}{2} \nabla_i^f \nabla_i^b + m \right] \phi_0(\mathbf{x})}{\phi_0(\mathbf{x})^\dagger \phi_0(\mathbf{x})}$$



A small spherical domain-wall is created near the monopole, which **may capture electrons**.

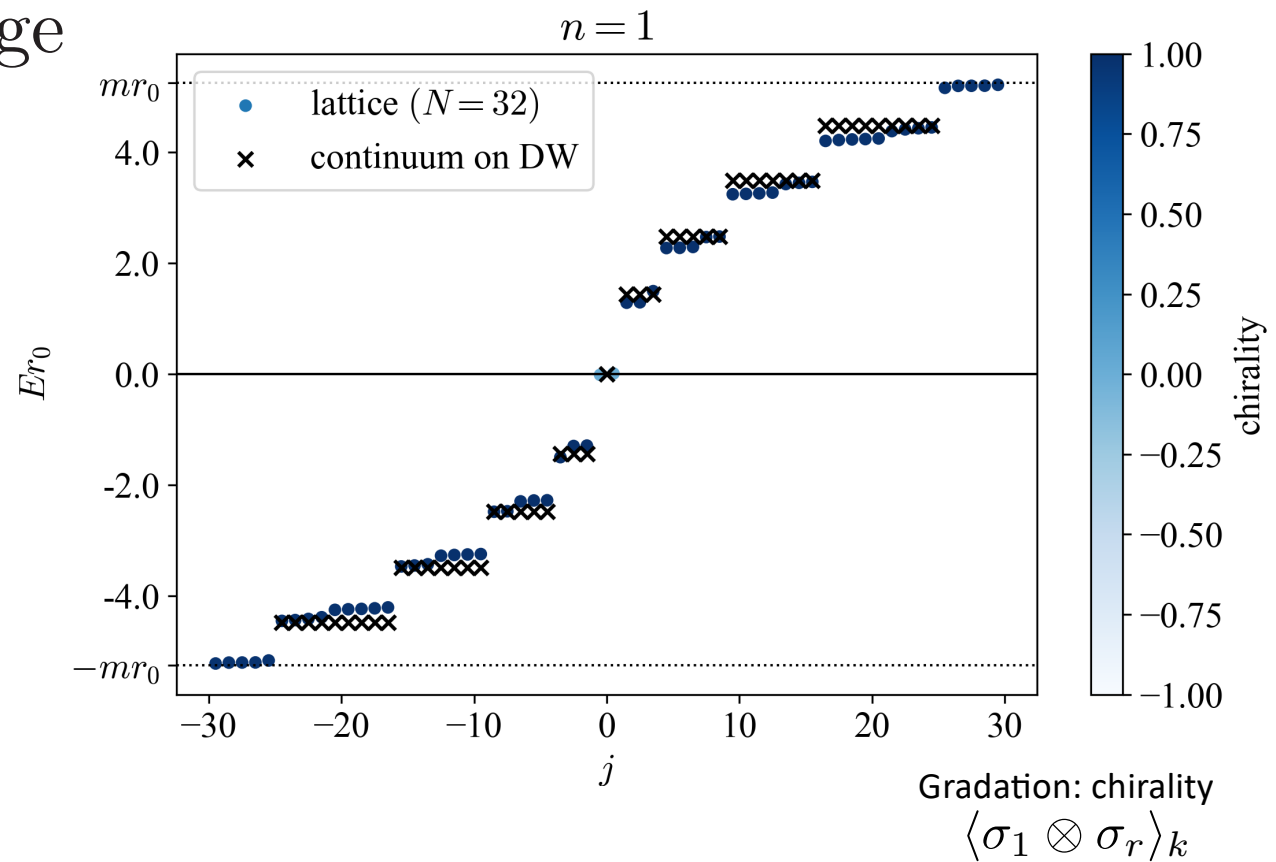
Near-zero eigenvalues/functions

n : monopole charge

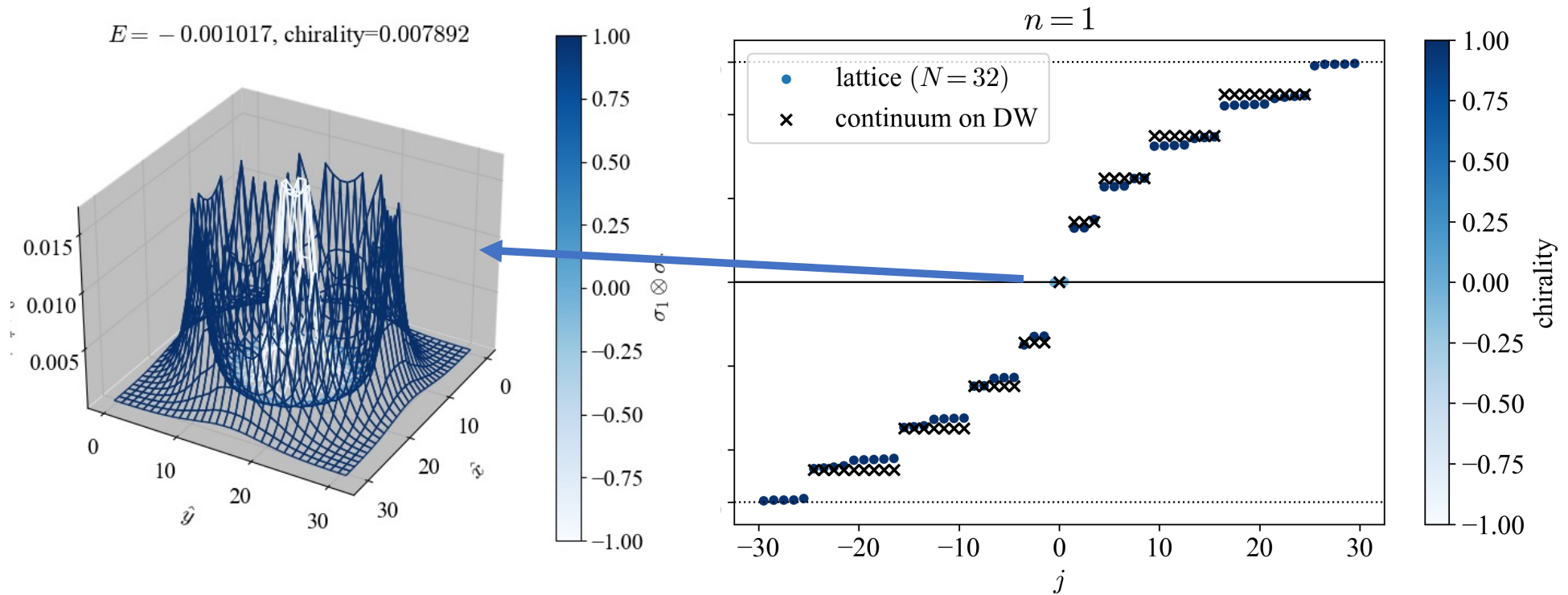
Monopole charge $n=1$.

We can see **two**
zero modes

while the continuum
prediction at outside
surface is only **one**.



Near-zero eigenvalues/functions



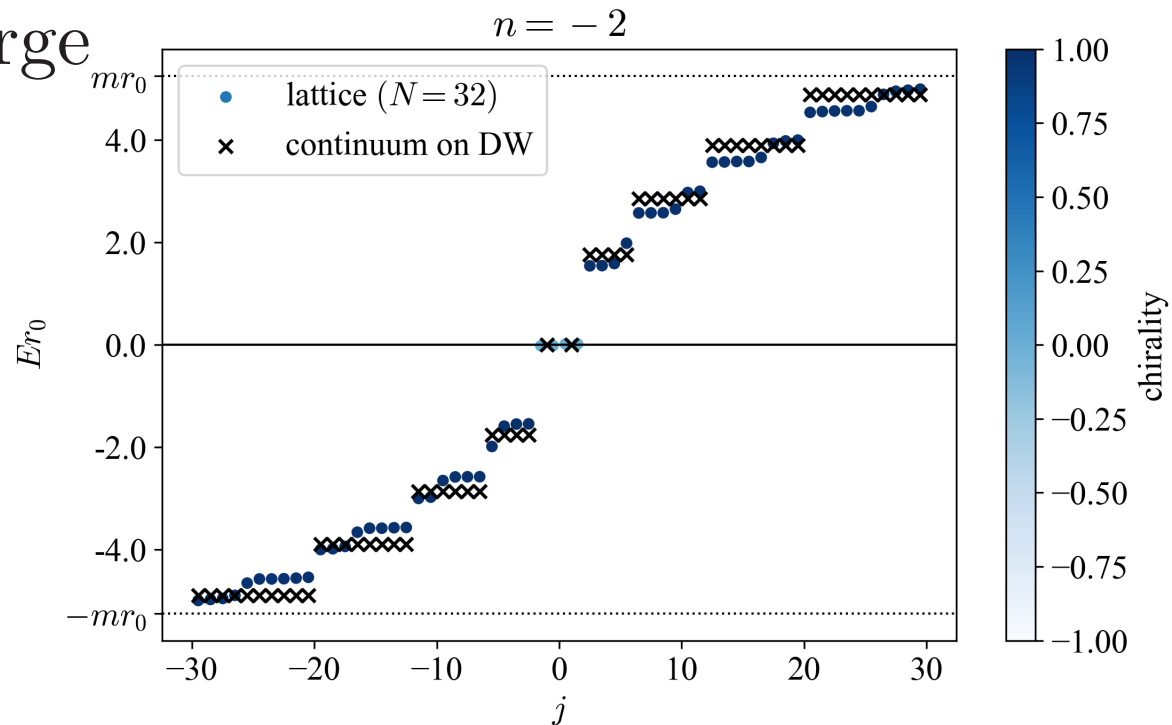
The zero modes at outer surface and near monopole appear in pairs and mix by tunneling effect.

Near-zero eigenvalues/functions

n : monopole charge

$n=-2$

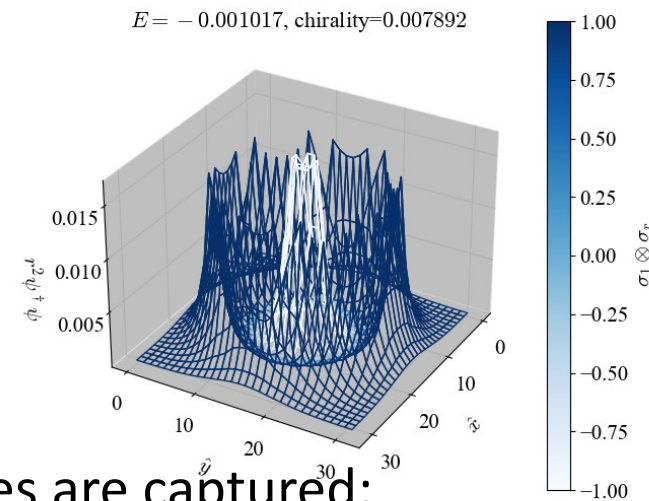
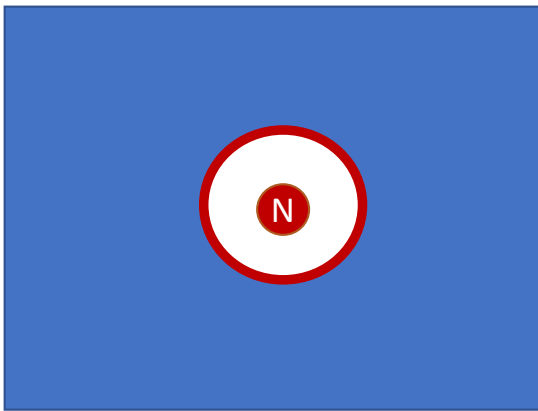
We have **four** zero modes.



The zero modes at outer surface and near monopole appear in pairs and mix by tunneling effect.

Gravity of the S^2 domain-wall

A magnetic monopole locally gives a positive mass shift to turn its neighbor into a normal insulator.



Curvature is so strong that only zero modes are captured:

$$E \sim \frac{\sqrt{(j + 1/2)^2 - n^2/4}}{r_1} \text{ is too big unless } j + 1/2 = |n|/2.$$

n : monopole charge

Atiyah-Singer on the S^2 domain-wall

$$D^{S^2} \chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi) = 0 \quad \text{for } j = \left| \frac{n}{2} \right| - 1/2$$

The degeneracy is $2j+1 = |n|$.

The 2-dim chirality is $\sigma_r \chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi) = \text{sign}(n) \chi_{j,j_3,0}(\theta, \phi)$

$$\rightarrow \text{Ind} D^{S^2} = n. \quad n : \text{monopole charge}$$

Geometrical index is $\frac{1}{4\pi} \int_{S^2} d^2x \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} d^2x \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = n.$

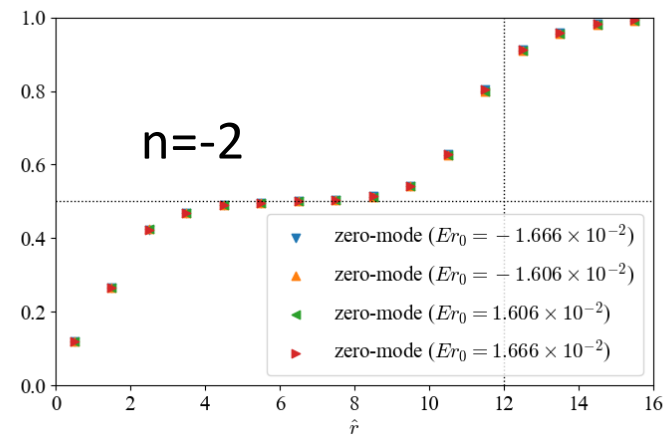
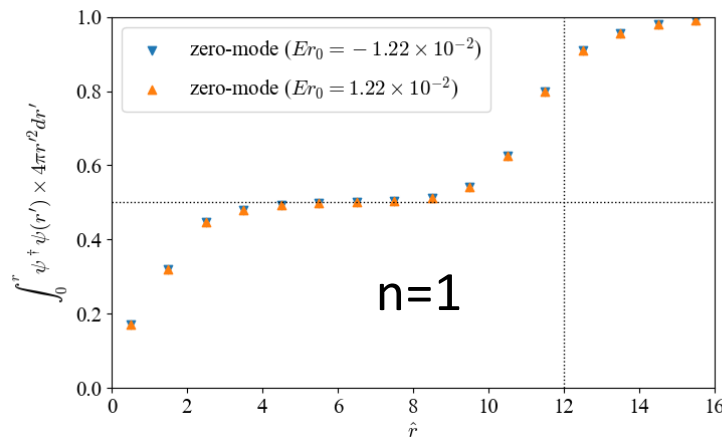
Namely, the zero modes on the domain-wall around the monopole are topologically protected by the Atiyah-Singer index theorem.

Mixing with surface zero modes makes
the amplitude around monopole $\sim 1/2$

Cumulative distribution

$$C_k(r) = \int_{|\mathbf{x}| < r} d^3x \phi_k(\mathbf{x})^\dagger \phi_k(\mathbf{x})$$

Saturates to 1/2
until $r \sim 0.8 r_0$



This explains why the electric charge is fractional.

Re-interpretation of the effective theory

Original description by Witten

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{\theta}{8\pi^2} \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \quad q_e = \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\theta}{4\pi^2} \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{B} = -\frac{\theta q_m}{2\pi}$$

Our reinterpretation : monopole makes a defect of the θ term.

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= -\frac{1}{8\pi^2} \partial_\mu \left[\theta(r) \tilde{F}^{\mu\nu} \right] \quad q_e = \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi^2} \int d^3x \nabla \theta(r) \cdot \mathbf{B} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int d^3x \pi \delta(r - r_1) \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{B} = -\frac{\theta q_m}{2\pi} \end{aligned}$$

The result is the same!

But our case does not require a true monopole with $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$

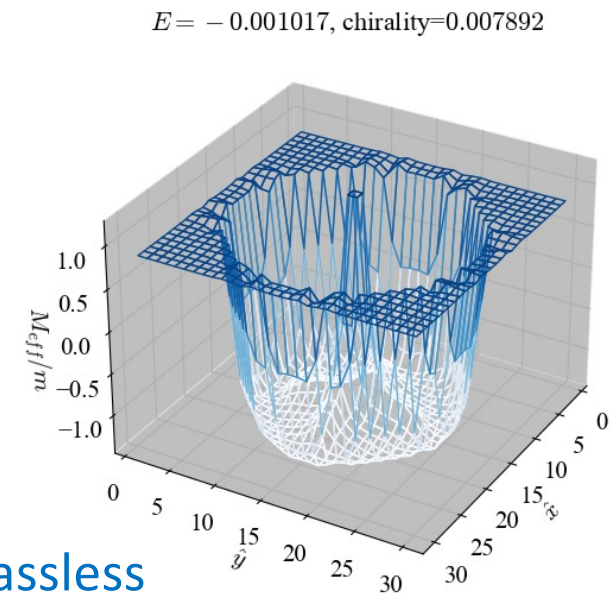
Comment on Monopole-massless electron scattering

[Callan 1982, Rubakov 1982]

Our observation indicates
that monopole makes
electrons effectively very **massive**.

For codimension-one defect, there is no
local boundary condition which can
keep chiral symmetry.

It may be just impossible to keep electrons massless
in the presence of the magnetic monopole.



Contents

- ✓ 1. 導入
曲がった物質表面にどんな誘導重力が現れるか？
- ✓ 2. 空間の曲がり方と誘導重力
空間の曲がり方は内在的にも外在的にも記述が可能。誘導重力は後者。
- ✓ 3. 一般の曲がったドメインウォールフェルミオンの連続理論での解析
曲面に拘束されたエッジ状態は内在的な重力に従って運動する。
- ✓ 4. 2次元球面ドメインウォールフェルミオンの格子理論の数値解析
平坦な正方格子に重力場が有効場として現れることを確認。
- ✓ 5. 磁気単極子をトポロジカル絶縁体に入れると何が起こるのか？
重力が強い小さなdomain-wall が出現、エッジ状態として電子を束縛してdyonになる。
- 6. まとめと妄想

まとめ

1. Einstein の等価原理 + Nash の埋め込み定理は、あらゆる重力を誘導重力として記述できることを保証。トポロジカル物質の曲がった表面も重力源となる。
2. 正方格子に埋め込んだ曲がったドメインウォール上で質量ゼロのエッジ状態のフェルミオンが誘導されたspin接続の内在成分を通して重力を感じることを確認。さらに、外在成分には影響を受けないことも確認。
3. 応用として、トポロジカル絶縁体中の磁気単極子が電荷を帯びる現象(Witten効果)をミクロな球状ドメインウォールの生成とその上に局在する電子によって説明。

Take-home message

In mathematics, there have been **two surprises** about “curvature”:

1. Gauss’s Theorema Egregium [1827] : Gauss curvature can be written by **intrinsic** quantities only.
2. Nash’s embedding theorem [1956] : Any **intrinsic** curvature can be described by an **extrinsic** flat space.

In physics, we have been surprised only once by

1. Einstein’s general relativity, which requires only **intrinsic** metric.

Why don’t we have a 2nd surprise?

Creation/annihilation of the domain-walls

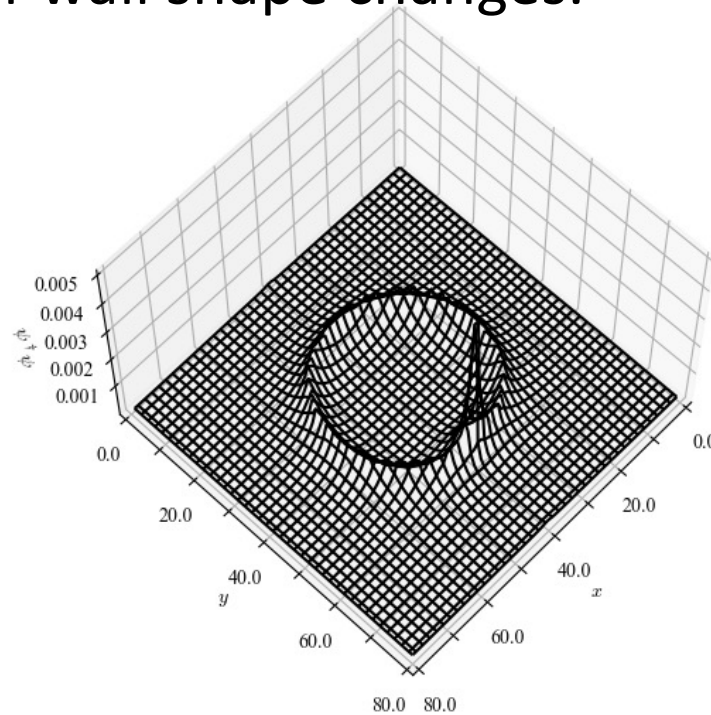
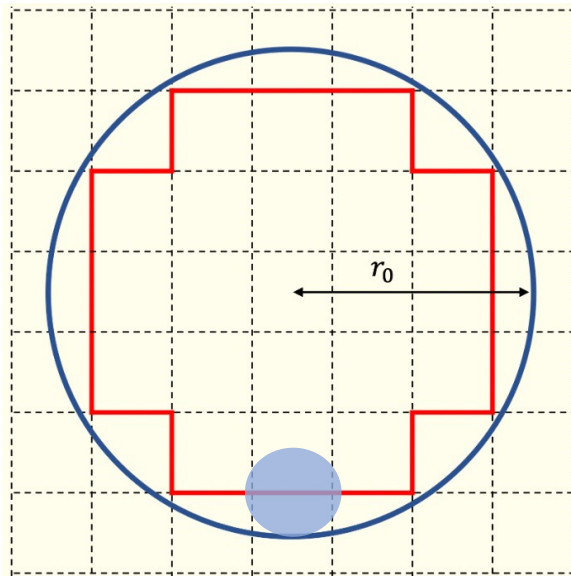
So far, we only quantized fermion and treated the gravity and gauge fields **as background**.

However, we have seen

- 1) **creation/ annihilation of DW is automatically implemented,**
- 2) metric – $U(1)$ gauge interaction is encoded as the effective interaction through the Wilson term.

Fluctuation of the domain-walls

Let us move the magnetic flux attached to the domain-wall -> domain-wall shape changes.



Quantum gravity?

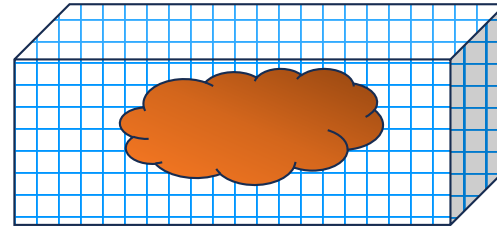
$$H = \frac{1}{a} \sigma_3 \left(\sum_{i=1,2} \left[\sigma_i \frac{\nabla_i - \nabla_i^\dagger}{2} + \underbrace{\frac{1}{2} \nabla_i \nabla_i^\dagger}_{=: m_{\text{eff}}} \right] + \epsilon a m \right)$$

If we treat the sign of mass term ϵ as a dynamical variable (like Ising spin) and perform a path integral,

$$Z = \sum_{\epsilon(x)=\pm 1} \det(H(\epsilon)) \exp(-S_{\text{Ising}}(\epsilon))$$

The effective theory may be “some” quantum gravity described by the induced spin connections (metric and vielbein are effective fields).

Lattice regularization of higher dim. Euclidean space as gravity



Nash's theorem “tells” any gravitational field can be described in a flat Euclidean space.

1. Prepare a higher dim. **square lattice**.
2. Put the target curved manifold as domain-walls and constrain fields on it.
3. Fluctuate the submanifold quantum mechanically with a Boltzmann weight of the Einstein Hilbert action.
4. Then **the effective theory may describe quantum gravity**.

Grand Unification?

Higher dim. Euclidean square lattice theory



QCD and Electro-Weak + domain-wall source (axion?)



Hadron physics



Gravity

The effective theories of hadrons and gravity **do not need to be renormalizable.**

Appendix : insensitivity to extrinsic curvature

$$\begin{aligned}
 \psi &= \exp \left[-\textcolor{red}{M}|t| \left\{ 1 + \frac{1}{8\textcolor{red}{M}|t|} \int_0^t dt' \text{tr} \omega_t(y, t') \right\} \right] v_+ \otimes \chi(y) \\
 &= \exp \left[- \int_0^t dt' \{ \textcolor{red}{M} \text{sgn}(t') - \text{tr} \omega_t(y, t') \} \right] v_+ \otimes \chi(y) \\
 &= \underbrace{\exp \left[- \int_0^{\textcolor{red}{1/M}} dt' \{ \textcolor{red}{M} \text{sgn}(t') - \text{tr} \omega_t(y, t') \} \right]}_{=:exp_1} \underbrace{\exp \left[- \int_{\textcolor{red}{1/M}}^t dt' \{ \textcolor{red}{M} \text{sgn}(t') - \text{tr} \omega_t(y, t') \} \right]}_{=:exp_2} v_+ \otimes \chi(y)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y^j} exp_1 = O(1/M),$$

$$\frac{\partial}{\partial y^j} exp_2|_{t < 1/M} = O(1/M),$$

$$\frac{\partial}{\partial y^j} exp_2|_{t > 1/M} = O(\exp(-M|t|))$$



Derivative in y direction
is insensitive to the extrinsic
curvature.