

稠密性定理とその「宙吊り」: 「内から」というあり方から考える 複雑系の数理モデル

春名太一

東京女子大学現代教養学部数理科学科

エレベーターに乗ってぼーっとしていたらどうなる？

春名太一

●東京女子大学現代教養学部

この春に中学生になる双子の次男と三男は、時折あたかも寸劇のような会話を行うことがある。以下は、4年ほど前の最も印象深かったものの一つである(双子の一方をA、もう一方をBとする)。

習い事の送迎で、私を含めて三人でエレベーターに乗ったときのことである。

——エレベーターに乗った直後——

A ● B君、ぼーっとしといてみな。はやく着くから。

B ●はあ。

——目的の階に到着した直後——

A ●ほら、はやく着いたでしょ。

B ●はあっ!?

時間の感覚に対する二つの視点にズレがあり、解消されないままになっている
⇒「内から」というあり方の例

内容

- はじめに
- 圏論についての準備
- 稠密性定理の「宙吊り」
- 研究例
 - 臨界状態への自己組織化
 - 適応的ランダムブーリアンネットワーク
 - べき乗則の起源
 - ポリヤの壺的モデル
- まとめ

内容

- はじめに
- 圏論についての準備
- 稠密性定理の「宙吊り」
- 研究例
 - 臨界状態への自己組織化
 - 適応的ランダムブーリアンネットワーク
 - べき乗則の起源
 - ポリヤの壺的モデル
- まとめ

はじめに(1/3)

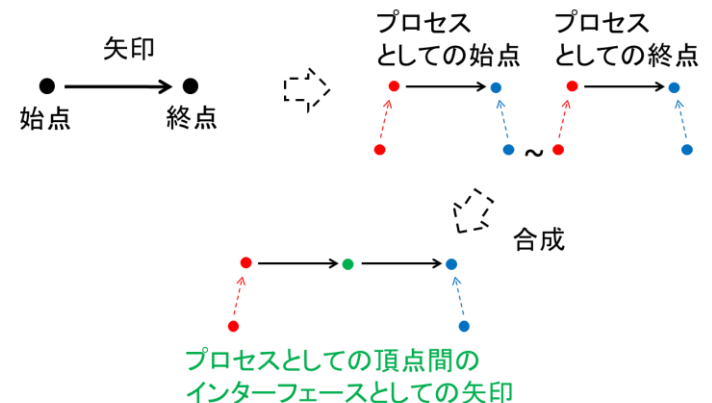
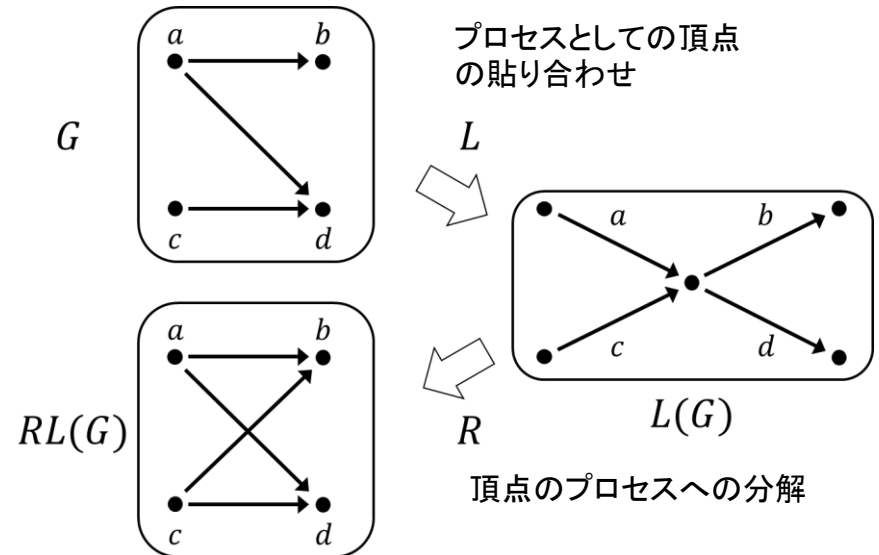
- 圏論における稠密性定理
 - 前層として書けるシステムの部分と全体の関係についての主張と解釈できる
 - 有向ネットワークの場合
 - 有向ネットワークは、頂点と矢印を貼り合わせてできている
- 稠密性定理の「宙吊り」
 - 貼り合わせを忘れ、「要素」を集める
⇒ タイプ(頂点)とトークン(矢印)を対等に扱う
 - 「内から」というあり方(内部観測(松野、郡司))の一つの実装
 - 「内から」は、トークンはタイプと異なる
 - Internally, chance would not differ from choice (Salthe, 2018)
- 複雑系の数理モデルでの研究例を2つ紹介する

はじめに(2/3)

背景1

- Rosenの関係生物学
(1958~)の再検討
(Haruna & Gunji, 2007)
 - ネットワークにおける
「分解」と「貼り合わせ」の
アジャンクション
- Theory of Interface
(Haruna, 2013; 2018)
 - 「頂点はプロセス、矢印
はプロセス間のインター
フェイス」というアイデア
の圏論的定式化とそれにも
とづくネットワーク分析

⇒ **カン拡張**



はじめに(3/3)

背景2

1. 臨界状態へと自己組織化する適応的ブーリアンネットワークモデル
(Haruna, 2018)
遺伝子調節ネットワークのシス調節機構に基づく矢印の生成消滅過程のモデル化
⇒ 頂点と矢印の貼り合わせとしてのネットワーク(**稠密性定理**)
本日の最初の研究例
2. 密なスケールフリーネットワークを生成する成長するネットワークモデル
(Haruna & Gunji, 2019; 2020)
次数の大小関係に基づく新しい頂点の参入過程のモデル化
⇒ 次数の二重性(辺形成の結果であり原因)の**ガロア接続**としての定式化

どちらも、カン拡張(「すべての概念はカン拡張である」として見たときにそれぞれの状況において「同じこと」を行っている

⇒ **選択の構造**としてのカン拡張

春名太一, 選択の構造としてのカン拡張: 圏論とネットワークの数理モデル.
数学セミナー2022年3月号, 31-37. (『圏論の歩き方[改訂版]』第19章)

内容

- はじめに
- 圏論についての準備
- 稠密性定理の「宙吊り」
- 研究例
 - 臨界状態への自己組織化
 - 適応的ランダムブーリアンネットワーク
 - べき乗則の起源
 - ポリヤの壺的モデル
- まとめ

準備(1/11): 圏

- 対象と対象間の射からなる
 - 対象: $a, b, c, \dots$
 - 射: $f: a \rightarrow b, g: b \rightarrow c, \dots$
 - 射 $f: a \rightarrow b$ に対して、 a を f の域、 b を f の余域という
- 余域と域が一致している二つの射に対して合成が定義され、各対象は恒等射を持つ
 - $g \circ f: a \rightarrow c$
 - $\text{id}_a: a \rightarrow a$
- 公理
 - 恒等律: $\text{id}_b \circ f = f = f \circ \text{id}_a$
 - 結合律: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

準備(2/11): 圏の例

- **Set**: 集合の圏
 - 対象: 集合
 - 射: 関数
 - **Digraph**: 有向ネットワーク(有向グラフ)の圏
 - 対象: 有向ネットワーク
 - 射: 有向ネットワークの準同型写像
- 後で説明

準備(3/11): 函手

- 圏 C を圏 D で表現する
 - 射の合成と恒等射を保存する

C, D : 圏

$F: C \rightarrow D$: 函手

$$\begin{array}{ccc} c & & F(c) \\ f \downarrow & \Rightarrow & \downarrow F(f) \\ c' & \xrightarrow{F} & F(c') \\ \text{in } C & & \text{in } D \end{array}$$

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$$

$$F(\text{id}_c) = \text{id}_{F(c)}$$

準備(4/11): 自然変換

- 二つの表現(関手)を比較する

C, D : 圏

$F, G: C \rightarrow D$: 関手

$\tau = \{\tau_c\}_{c \in C}: F \Rightarrow G$: 自然変換

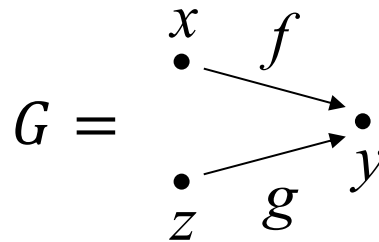
$$\begin{array}{ccccc} & & F(c) & \xrightarrow{\tau_c} & G(c) \\ & c & \downarrow F(f) & \curvearrowright & \downarrow G(f) \\ f \downarrow & & & & \\ c' & \text{in } C & F(c') & \xrightarrow{\tau_{c'}} & G(c') \text{ in } D \end{array}$$

準備(5/11): 函手圏

- $Func(C, D)$: 函手圏
 - C, D : 圏
 - 対象: 函手 $F, G, \dots: C \rightarrow D$
 - 射: 自然変換 $\tau: F \Rightarrow G$

準備(6/11): Digraph

- 対象: 有向ネットワーク $G = (N, A, s, t)$
 - N : 頂点の集合
 - A : 矢印の集合
 - $s, t: A \rightarrow N$: 矢印の始点、終点をとる関数



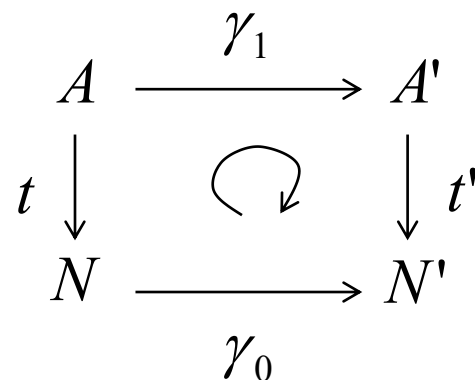
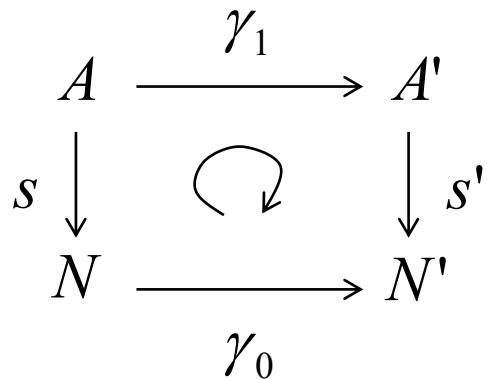
$$N = \{x, y, z\}, \quad A = \{f, g\}$$

$$s: A \rightarrow N: f \mapsto x, \quad g \mapsto z$$

$$t: A \rightarrow N: f \mapsto y, \quad g \mapsto y$$

準備(7/11): Digraph

- 射: 有向ネットワークの準同型写像
- $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1): G = (N, A, s, t) \rightarrow G' = (N', A', s', t')$



準備(8/11): 前層としての有向ネットワーク

$$\Gamma = \begin{array}{ccc} & 1 \rightrightarrows \text{id}_1 & \\ m_0 \uparrow & & \uparrow m_1 \\ & 0 \rightrightarrows \text{id}_0 & \end{array} \quad \hat{\Gamma} = \text{Func}(\Gamma^{op}, \text{Set}) = \text{Digraph}$$

(前層 G):= (函手 $G: \Gamma^{op} \rightarrow \text{Set}$) = (有向ネットワーク G)

$$\Gamma^{op} = \begin{array}{ccc} & 1 \rightrightarrows \text{id}_1 & \\ m_0 \downarrow & & \downarrow m_1 \\ & 0 \rightrightarrows \text{id}_0 & \end{array} \xrightarrow{G} \begin{array}{ccc} & \text{矢印の集合} & \\ & G(1) & \\ G(m_0) \downarrow & & \downarrow G(m_1) \\ & G(0) & \\ \text{矢印の始点} & & \text{矢印の終点} \\ \text{をとる関数} & & \text{をとる関数} \\ & \text{頂点の集合} & \end{array}$$

作用を備えた集合としての有向ネットワーク

準備 (9/11) : 前層としての有向ネットワーク

- $G, G' \in \hat{\Gamma}$ に対して、自然変換 $\gamma: G \Rightarrow G'$ は有向ネットワークの準同型写像

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & & G(1) & \xrightarrow{\gamma_1} & G'(1) \\
 m_i \downarrow & & \downarrow & \curvearrowright & \downarrow G'(m_i) \\
 0 & & G(0) & \xrightarrow{\gamma_0} & G'(0) \\
 & \text{in } \Gamma^{op} & & & \text{in Set}
 \end{array}$$

準備 (10/11) : 米田埋め込み関手

$$\Gamma = \begin{array}{ccc} & 1 & \xrightarrow{\text{id}_1} \\ m_0 \uparrow & & \uparrow m_1 \\ & 0 & \xrightarrow{\text{id}_0} \end{array}$$

$$\hat{\Gamma} = \text{Func}(\Gamma^{op}, \text{Set})$$

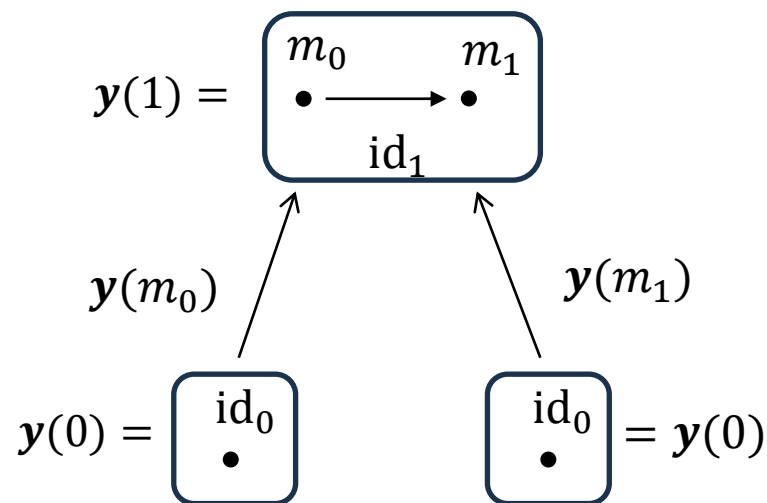
= 有向ネットワークの圏

$y: \Gamma \rightarrow \hat{\Gamma}$: 米田埋め込み関手

$$c \mapsto y(c) = \Gamma(-, c): \Gamma^{op} \rightarrow \text{Set}$$

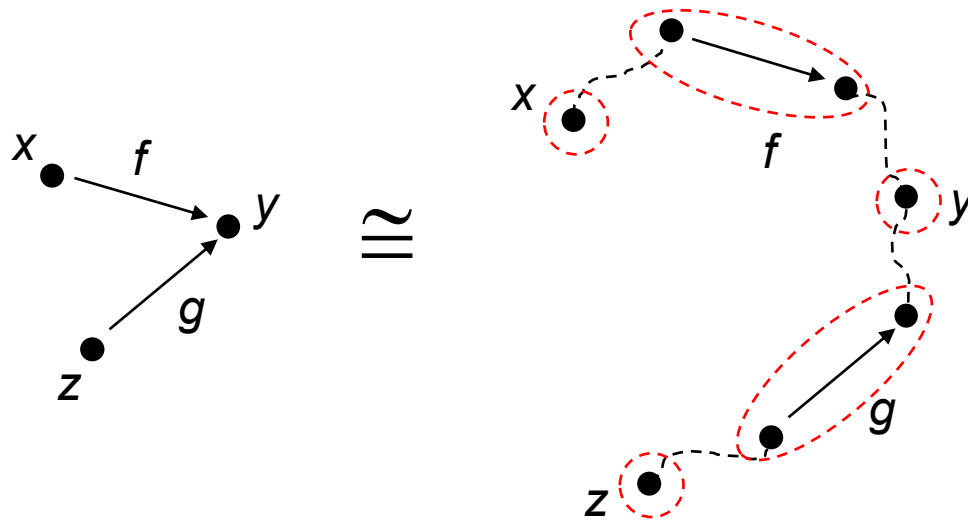
$$c' \mapsto \Gamma(c', c)$$

c' から c への
 Γ の射の集合



準備(11/11):稠密性定理

有向ネットワークは、頂点と矢印を貼り合わせてできている



$$G \cong \operatorname{colim} \left((\mathbf{y} \downarrow G) \xrightarrow{\Pi} \Gamma \xrightarrow{\mathbf{y}} \hat{\Gamma} \right)$$

$$(\mathbf{y} \downarrow G) = \begin{array}{ccccc} & (1, f) & & (1, g) & \\ m_0 \nearrow & & m_1 \nwarrow & m_1 \nearrow & m_0 \nwarrow \\ (0, x) & & (0, y) & & (0, z) \end{array}$$

G の要素の圏
(恒等射は省略)

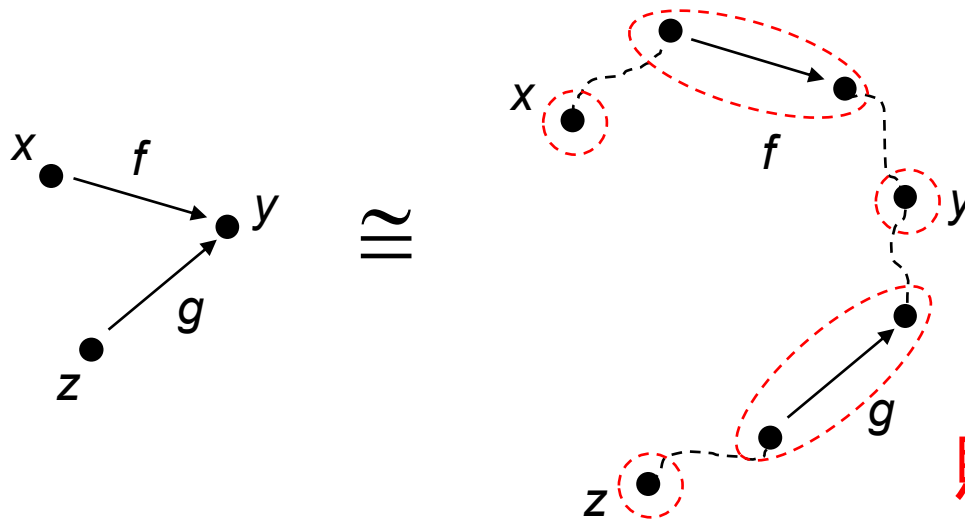
対象: $(\Gamma$ の対象 $c, \hat{\Gamma}$ の射 $\mathbf{y}(c) \rightarrow G$)
 $\hat{\Gamma}$ の射 $\mathbf{y}(c) \rightarrow G$ は、 $G(c)$ の要素と一対一に対応する
 (米田の補題)

内容

- はじめに
- 圏論についての準備
- 稠密性定理の「宙吊り」
- 研究例
 - 臨界状態への自己組織化
 - 適応的ランダムブーリアンネットワーク
 - べき乗則の起源
 - ポリヤの壺的モデル
- まとめ

有向ネットワークに対する 稠密性定理の「宙吊り」

$$G \cong \text{Lan}_y \mathbf{y}(G) = \text{colim} \left((\mathbf{y} \downarrow G) \xrightarrow{\Pi} \Gamma \xrightarrow{y} \hat{\Gamma} \right)$$



貼り合わせを忘れ、
「要素」を集める

$$\widetilde{\text{Lan}_y \mathbf{y}}(G) = \{x, y, z, f, g\}$$

(左)カン拡張

関手 F を関手 K に沿って拡張する

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{F} & E \\ & \searrow K \quad \Downarrow \simeq \quad \nearrow \text{Lan}_K F & \\ & D & \end{array}$$

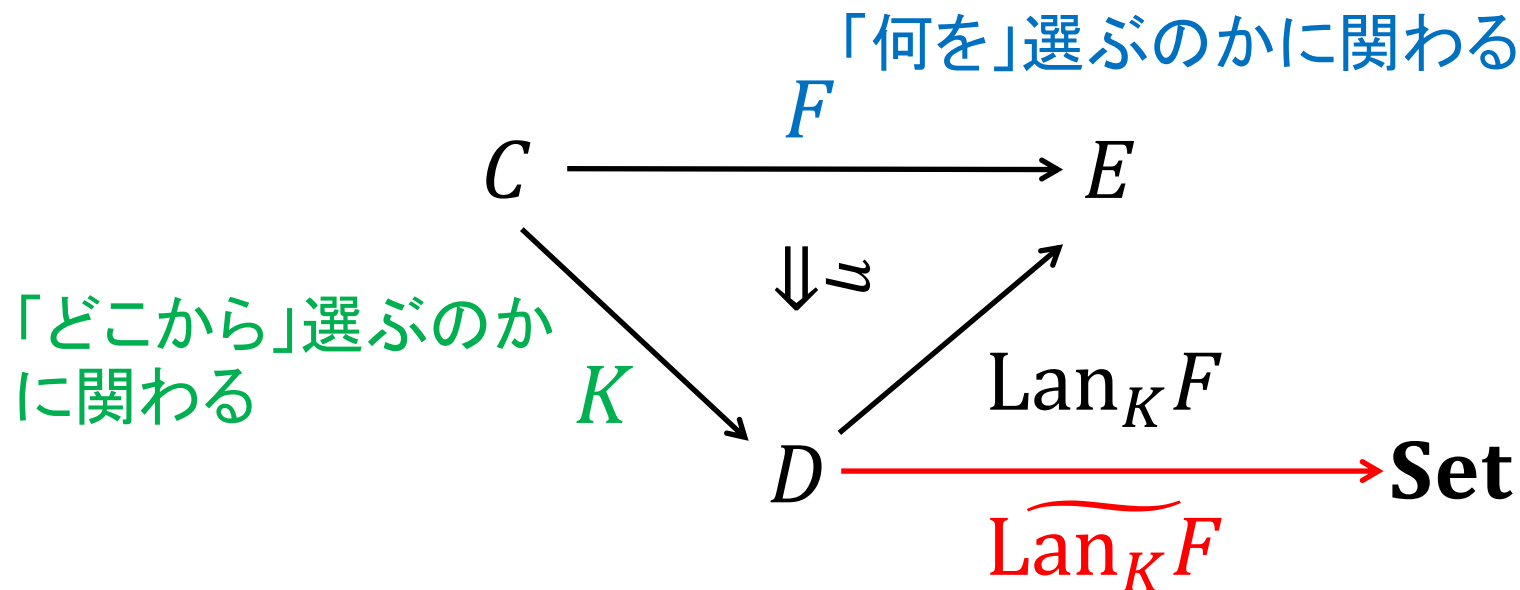
$d: D$ の対象

$$\text{Lan}_K F(d) = \text{colim} \left((K \downarrow d) \xrightarrow{\Pi} C \xrightarrow{F} E \right)$$

$(K \downarrow d) : D$ の対象 d の K による「近似」 $(c, f: K(c) \rightarrow d)$ 全体のなす圏

D の対象に対して、 K を通じたあらゆる「近似」での F の値の余極限 (貼り合わせ) をとり、 F を C 上から D 上へと拡張

選択の構造としての(左)カン拡張 = (左)カン拡張の「宙吊り」



(左)カン拡張の「宙吊り」:
余極限操作の中断 + 集合圏へのリダイレクト

D の対象 d に関する「要素」の集合: 「近似」に対する F の値の集合

$$\widetilde{\text{Lan}}_K F(d) = \{\mu_{c,f}: F\Pi(c, f: K(c) \rightarrow d) \rightarrow \text{Lan}_K F(d)\}$$

例：有向ネットワーク

$$\Gamma = \begin{array}{ccc} & 1 & \circlearrowleft \text{id}_1 \\ m_0 \uparrow & & \uparrow m_1 \\ & 0 & \circlearrowleft \text{id}_0 \end{array}$$

$\hat{\Gamma}$ は関手 $G: \Gamma^{op} \rightarrow \text{Set}$ たちのなす圏
=有向ネットワークの圏

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xrightarrow{\mathbf{y}} & \hat{\Gamma} \\ & \searrow \mathbf{y} & \nearrow \text{Lan}_{\mathbf{y}} \mathbf{y} \\ & \hat{\Gamma} & \end{array} \quad \text{||}$$

$\mathbf{y}$ は0を「 $\cdot$ 」に、1を「 $\cdot \rightarrow \cdot$ 」に対応させる関手(米田埋め込み)

- $G(0)$ は頂点集合、 $G(1)$ は矢印集合、 $G(m_i): G(1) \rightarrow G(0)$ ($i = 0, 1$)はそれぞれ矢印の始点、終点をとる関数
- 稠密性定理: $G \cong \text{Lan}_{\mathbf{y}} \mathbf{y}(G) = \text{colim} \left((\mathbf{y} \downarrow G) \xrightarrow{\Pi} \Gamma \xrightarrow{\mathbf{y}} \hat{\Gamma} \right)$
 $(\mathbf{y} \downarrow G)$ の対象は、 $(0, y(0) \rightarrow G)$ (G の頂点)たちと $(1, y(1) \rightarrow G)$ (G の矢印たち)
 $\Rightarrow$ 有向ネットワークは、頂点と矢印を貼り合わせて作られる
- $\widetilde{\text{Lan}_{\mathbf{y}} \mathbf{y}}(G) = (G \text{の頂点集合と矢印集合の非交和})$

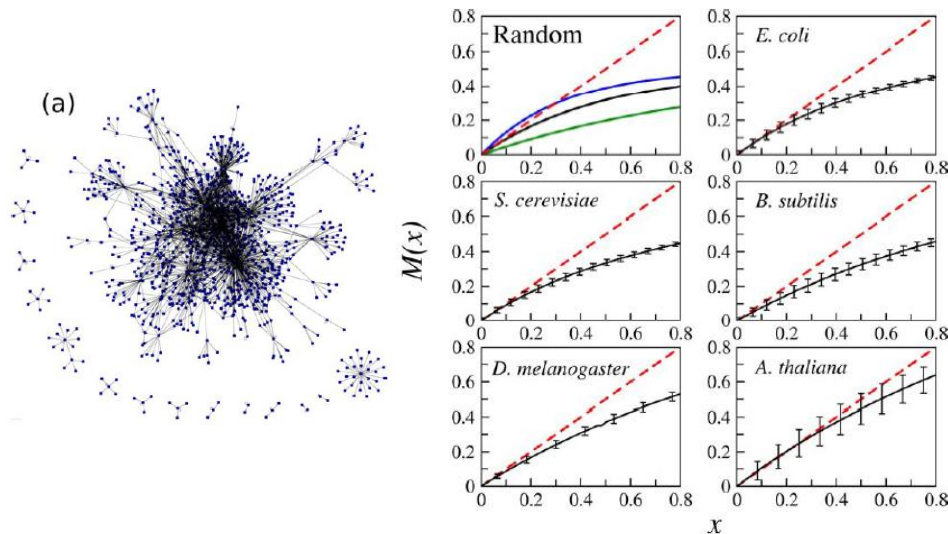
内容

- はじめに
- 圏論についての準備
- 稠密性定理の「宙吊り」
- 研究例
 - 臨界状態への自己組織化
 - 適応的ランダムブーリアンネットワーク
 - べき乗則の起源
 - ポリヤの壺的モデル
- まとめ

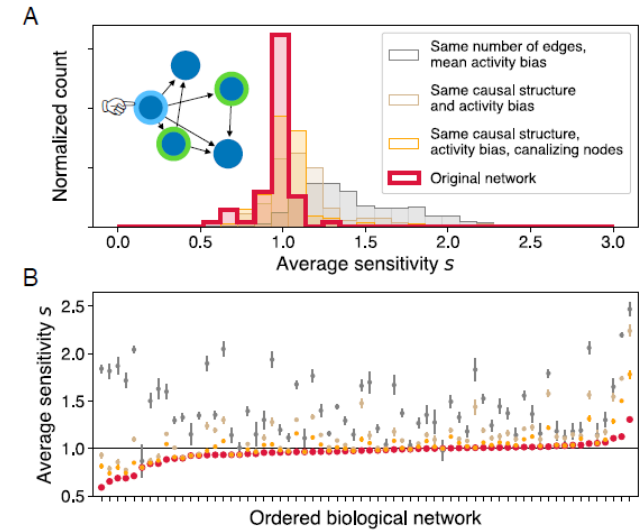
臨界状態への自己組織化

TH, 2018. *Journal of Complex Networks* 6, 914-926.

遺伝子調節ネットワークは臨界状態にある？



Balleza et al. (2008)

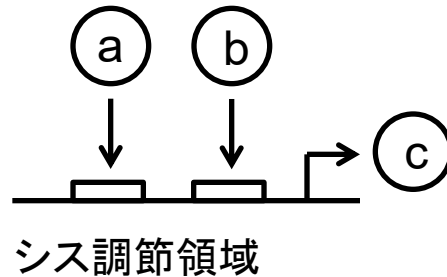


Daniels et al. (2018)

- 臨界状態であることの利点
 - 情報処理の最適性 (Bertschinger & Natschlager, 2004)
 - 頑健性と適応可能性の共存 (Aldana et al., 2008)
- 遺伝子調節ネットワークはどのようにして臨界状態へと調節されるのか？

ブーリアンネットワーク

Kauffman (1969)

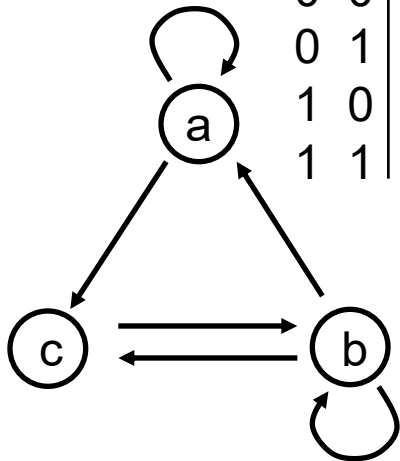


入力		出力
a	b	c
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

0: 遺伝子発現OFF
1: 遺伝子発現ON

cの更新ルール

a	b	c
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



a	b	a
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

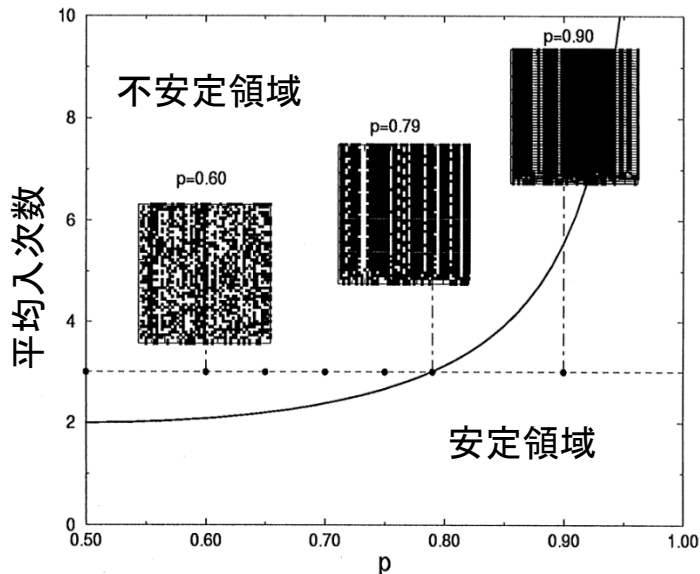
b	c	b
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

時間	a	b	c
0	0	1	1
1	1	1	1
2	1	1	0
3	1	0	1
4	1	0	1
5	1	0	1

ランダムブーリアンネットワークの臨界条件

- ランダムブーリアンネットワークの振舞いの二つの領域 (N が大きい極限)
 - 安定領域: 小さな摂動 (状態の反転) を与えたとき、やがて消える
 - 不安定領域: 摂動が長時間経過後も消えずに正の割合で残る

Modified from Luque & Sole (2000)



更新ルールはbiased function
(各入力の組に対する出力は確率 p で1)

平均場近似による臨界条件 (Derrida & Pomeau, 1986; Lee & Rieger, 2007)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_{\text{in}}(k) = 1$$

$P_{\text{in}}(k)$: 入次数分布

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^k \lambda_{k,j} : \text{感度}$$

$\lambda_{k,j}$: 入次数 k の頂点の j 番目の入力を
反転した時に出力が反転する確率

入出力関係を表すネットワークは、入次数と出次数が独立な与えられた次数分布を持つランダム有向ネットワークと仮定

BornholdtとRohlfのModel

Bornholdt & Rohlf (2000)

Random threshold network

$$\sigma_i(t+1) = \text{sgn}[f_i(t)],$$

$$f_i(t) = \sum_{j=1}^N c_{ij} \sigma_j(t) + h$$

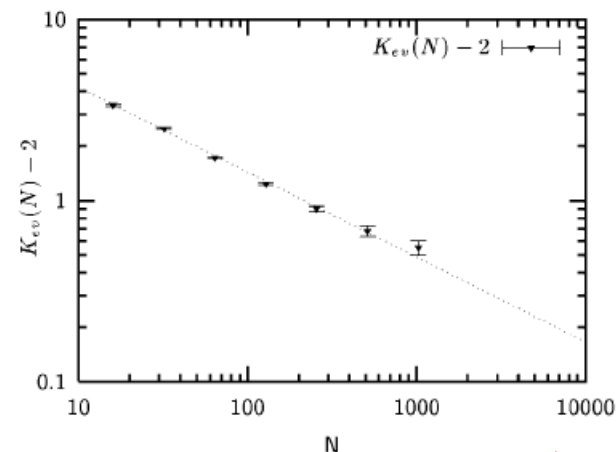
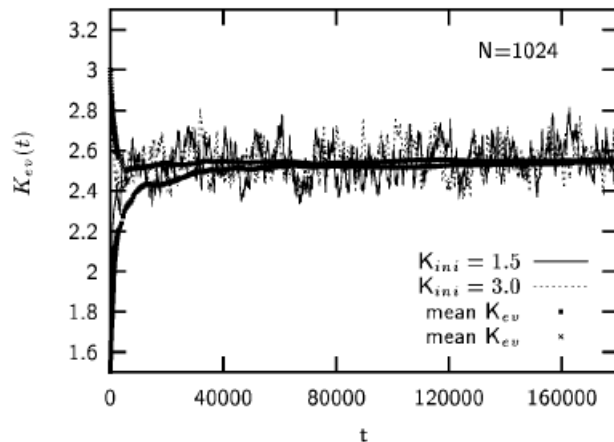
$$\sigma_i(t) \in \{-1, +1\} \quad c_{ij} \in \{-1, 0, +1\}$$

$$A(i) = \frac{1}{T_2 - T_1} \sum_{t=T_1+1}^{T_2} \sigma_i(t)$$

ネットワークの時間発展アルゴリズム

- (i) 初期ネットワークはランダム
- (ii) 初期状態をランダムに選ぶ
- (iii) アトラクタに到達するまで計算
- (iv) ランダムに頂点を一つ選ぶ
- (v) $|A(i)|=1$ なら、新たな(入力の)矢印を得る
- (vi) $|A(i)|<1$ なら、(入力の)矢印をひとつ失う
- (vii) 0でない c_{ij} をランダムにひとつ選び符号を反転
- (viii) (ii)に戻る

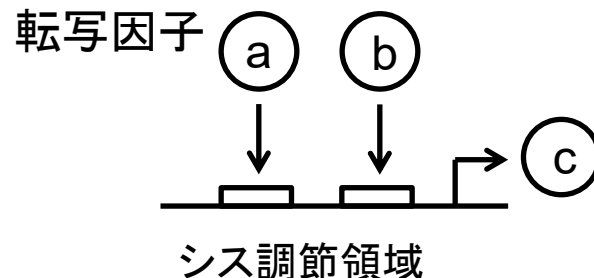
活性な頂点は矢印を失い、不活性な頂点は矢印を得る



数値シミュレーションによってシステムが臨界状態へと時間発展することが示唆されている

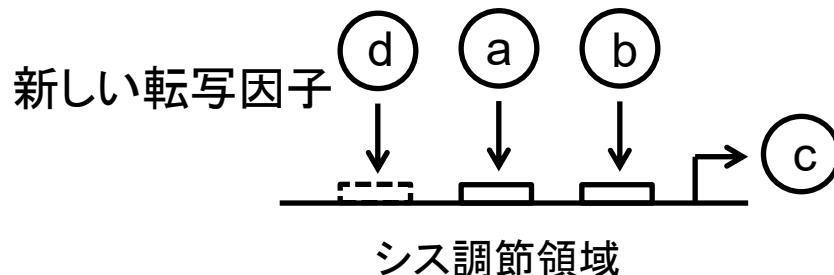
稠密性定理の「宙吊り」に基づく 適応的ネットワークモデル(1/3)

- アイデア: ネットワークの変化はDNA配列のレベルで起こる
 - 1) 遺伝子調節ネットワークの矢印の消失が起こる一つの原因として、シス調節領域における変異がある
 - 2) シス調節領域における変異が転写因子の結合パターンに影響を与えて遺伝子発現のレベルを変えると、個体にとって好ましくない結果をもたらして進化的な時間スケールでは遺伝子調節ネットワークの矢印が消失する



稠密性定理の「宙吊り」に基づく 適応的ネットワークモデル(2/3)

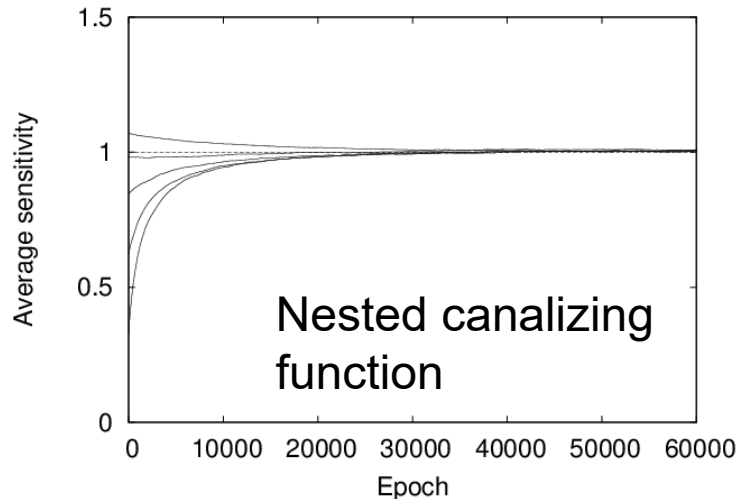
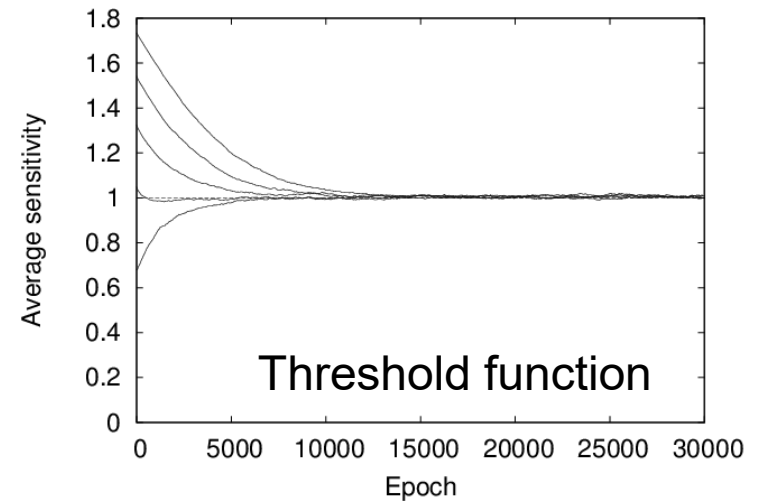
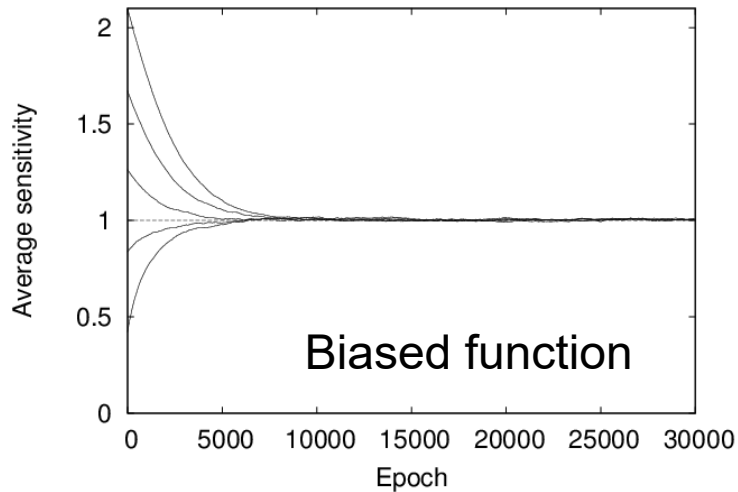
- 3) 一方、現存するシス調節領域外のDNAの非コード領域の新たなシス調節領域となりうる範囲で変異が起こると、新たな転写因子がその領域に結合できるようになることがある。したがって、**遺伝子調節ネットワークの頂点は、DNAの非コード領域によって担われる新しい矢印を受け入れる能力を持っているとみなせる**
- 4) **遺伝子調節ネットワークの変化の観点からは、頂点も矢印も同じ水準のもの(=DNA配列)であり、対等に扱うのが自然**



稠密性定理の「宙吊り」に基づく 適応的ネットワークモデル(3/3)

- 仮定
 - G を遺伝子調節ネットワークとして、遺伝子調節ネットワークに変化をもたらさうるDNA配列の変異は $\widetilde{\text{Lan}}_y y(G) = (G \text{の頂点集合と矢印集合の非交和})$ の要素をランダムに選択することに対応する
- 我々のモデル
 - 頂点もしくは矢印をランダムに選択する
 - 頂点が選択された場合、その頂点は新たな入力を得る
 - 矢印が選択された場合、活性ならば消失する
 - ここでの「矢印が活性である」とは、ある時刻においてその始点の状態を反転したとき、その終点の状態も反転するときをいう

数値シミュレーションの結果



$N=200$, average over 100 trials

臨界状態へと近づいていく

平均場理論

$P(k, e)$: エポック e での入次数分布

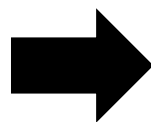
$$P(k, e + 1) = (1 - \alpha_e - \beta_{k,e})P(k, e) + \alpha_e P(k - 1, e) + \beta_{k+1,e} P(k + 1, e)$$

$$\alpha_e = 1/(N(z_e + 1)) \quad \beta_{k,e} = \lambda_k/(N(z_e + 1))$$

z_e : エポック e での平均入次数

$P^s(k)$: 定常入力数分布

$$\alpha P^s(k) = \beta_{k+1} P^s(k + 1)$$

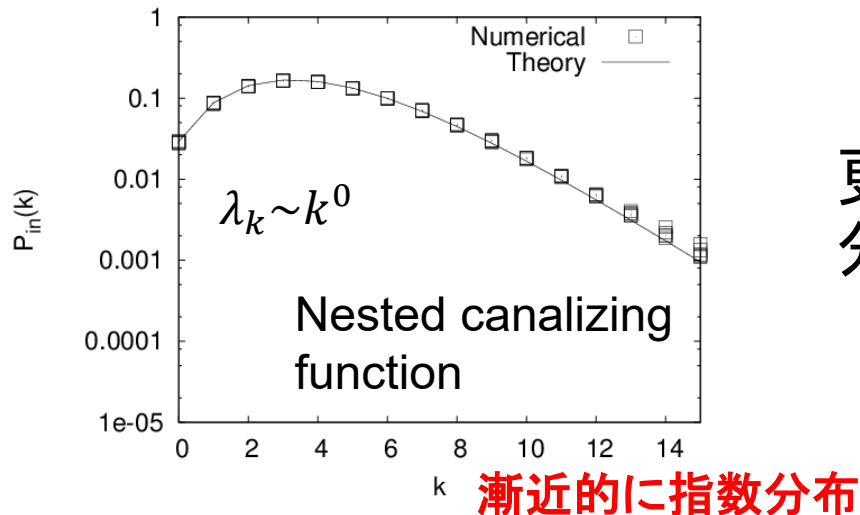
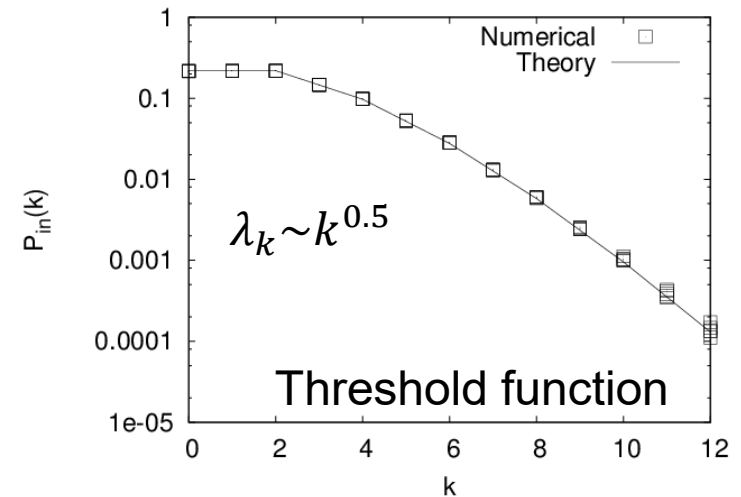
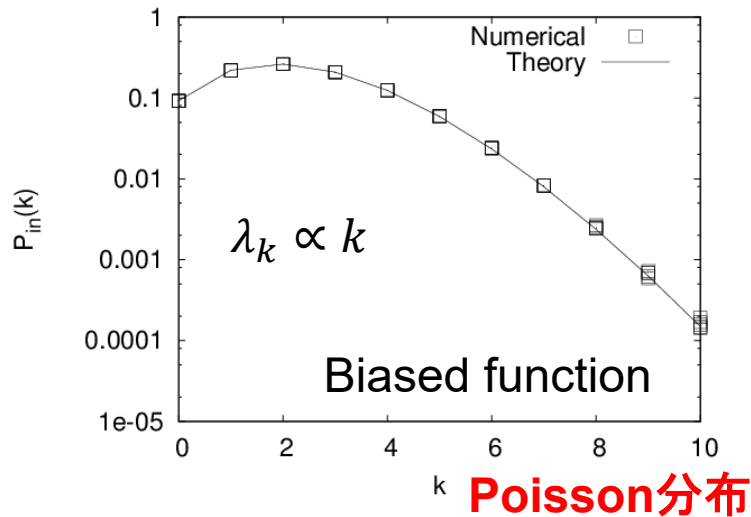


$$P^s(k) \propto \left(\prod_{j=1}^k \lambda_j \right)^{-1}$$

$P^s(k)$ は臨界条件 $\sum_k \lambda_k P^s(k) = 1$ をみたす

頂点と矢印を選択する確率を変更することで、あらかじめ与えられた平均感度を持つネットワークへと時間発展させることが可能

定常入次数分布



更新ルールの感度と定常入次数分布の関係が議論可能

内容

- はじめに
- 圏論についての準備
- 稠密性定理の「宙吊り」
- 研究例
 - 臨界状態への自己組織化
 - 適応的ランダムブーリアンネットワーク
 - べき乗則の起源
 - ポリヤの壺的モデル
- まとめ

べき乗則の起源

背景(1/2)

- 新たな種類(タイプ)の要素(トークン)が出現して成長するシステム
 - 生物や社会に広くみられる
- トークンのタイプについての統計法則(田中、2021)
 - Zipf: タイプの順位 R と頻度 $f(R)$ の関係について
$$f(R) \propto R^{-\alpha}$$
 - Heaps: 平均タイプ数 $D(t)$ について
$$D(t) \propto t^{\gamma}$$
 - Taylor: タイプ数のゆらぎサイズ σ について
$$\sigma \propto D^{\beta}$$

背景(2/2)

- 数理モデル(Polyaの壺の様々な変種)における新しいタイプを持つトークンの出現

- 与えられた一定の確率 p で新しいタイプのトークンを作る (Simon, 1955)

$$f(R) \propto R^{-(1-p)}, D(t) \propto t, \sigma \propto D^{\frac{1}{2}}$$

- 時間に依存した確率 $p_t = p_1 t^{\gamma-1}$ ($0 < \gamma < 1$)で新しいタイプのトークンを作る (Zanette et al., 2005)

$$f(R) \propto R^{-\frac{1}{\gamma}}, D(t) \propto t^{\gamma}, \sigma \propto D^{\frac{1}{2}}$$

- Kauffmanの“Adjacent Possible”概念にもとづくモデル

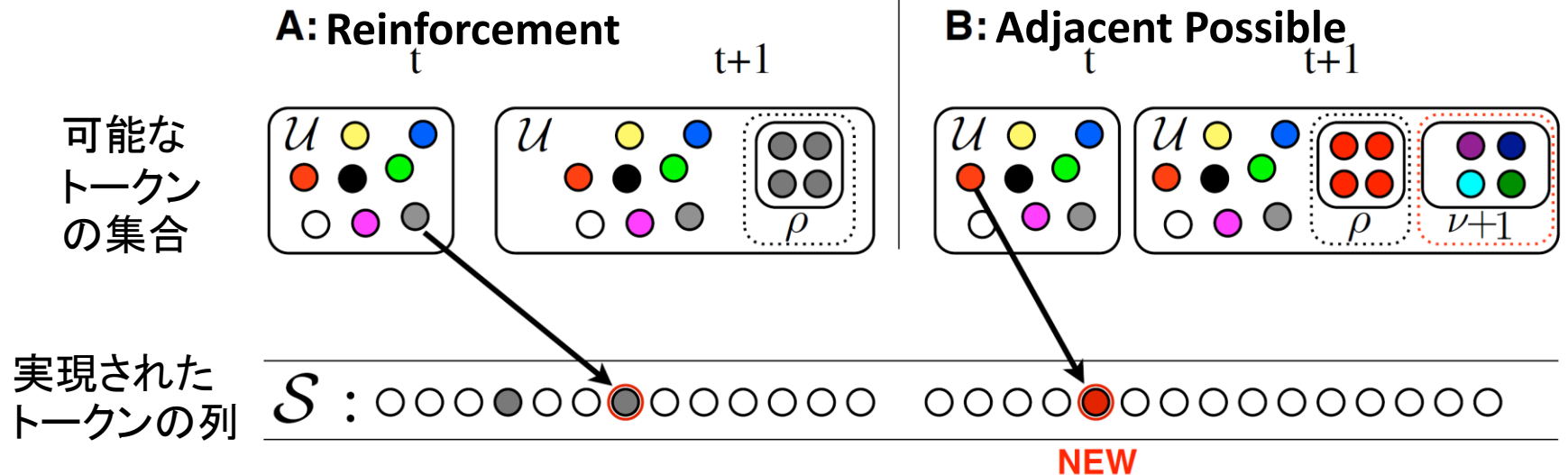
- Tria et al. (2014, 2018, 2020)のPUT(Polya's Urn model with Triggering)モデル
- 文書やSNSにおけるZipf, Heaps, Taylorの法則を比較的よく再現する

$$f(R) \propto R^{-\alpha} (0 < \alpha), D(t) \propto t^{\gamma} (\gamma \leq 1), \sigma \propto D^{\beta} (\frac{1}{2} \leq \beta \leq 1)$$

TriaらのPUTモデル

タイプ: 色

トークン: 色付きの丸



Tria et al. (2018)より一部改変

各時刻 t において、可能なトークンの集合からランダムに要素が一つ選択され、実現されたトークンの列に登録される

- (A) 過去に選択されたことのあるタイプのトークンが選択された場合、そのトークンと同じタイプの ρ 個のトークンが、可能なトークンの集合に追加される
- (B) 過去に一度も選択されたことがないタイプのトークンが選択された場合、そのトークンと同じタイプの ρ 個のトークンとともに、新しい $\nu + 1$ 個の異なるタイプのトークンが可能なトークンの集合に追加される

ポリヤの壺的モデルにおける 稠密性定理の「宙吊り」

$$2 = \begin{array}{c} 1 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \text{id}_1 \\ \uparrow m \\ 0 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \text{id}_0 \end{array}$$

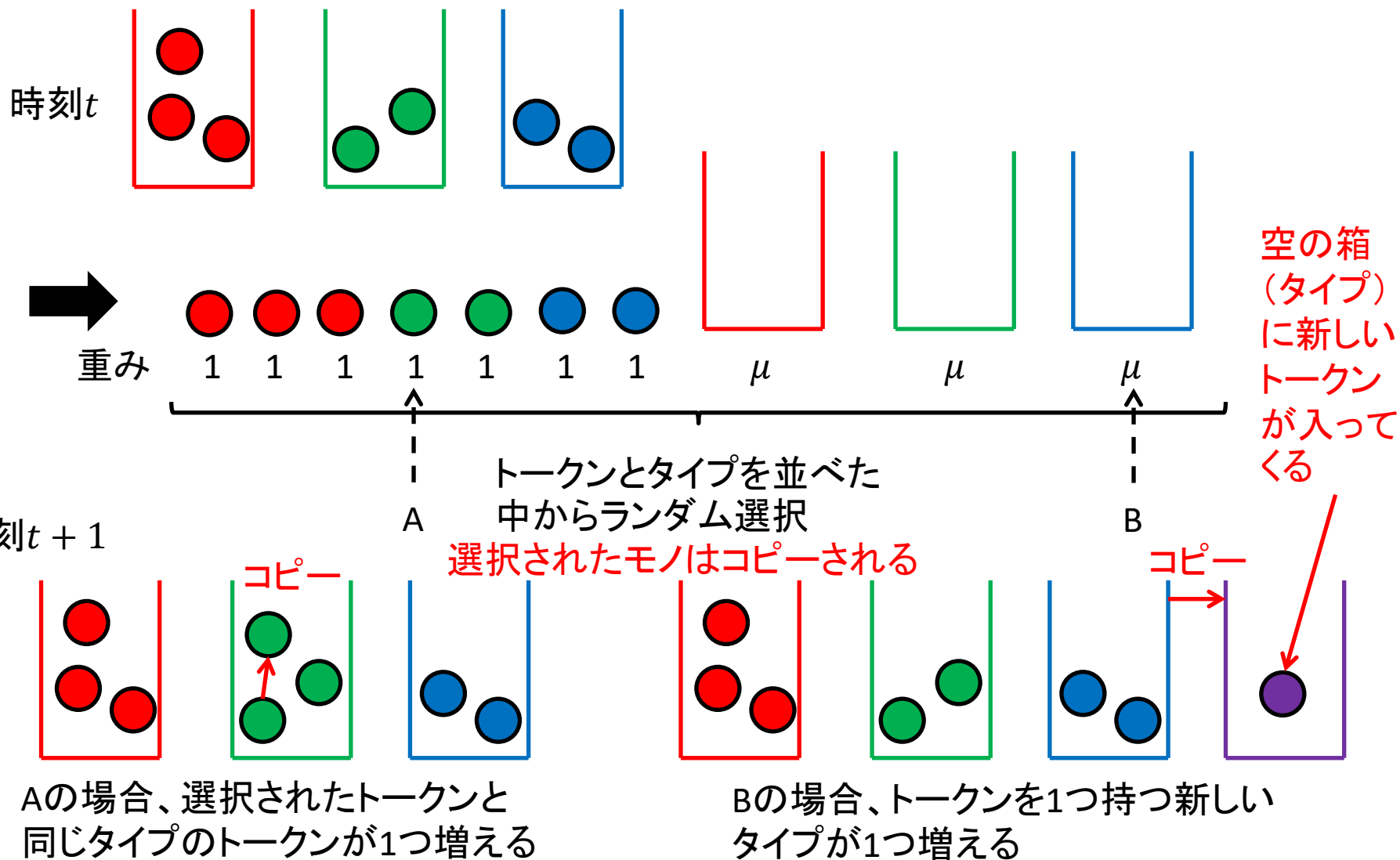
$$\begin{array}{ccc} 2 & \xrightarrow{\mathbf{y}} & \hat{2} \\ & \searrow \mathbf{y} & \nearrow \text{Lan}_{\mathbf{y}} \mathbf{y} \\ & \hat{2} & \cong \text{id}_{\hat{2}} \end{array} \quad \text{||} \quad \text{||}$$

$\hat{2}$ は関手 $F: 2^{op} \rightarrow \text{Set}$ たちのなす圏
=トークンをタイプへと分類する写像のなす圏

- $F(1)$ はトークンの集合、 $F(0)$ はタイプの集合、 $F(m): F(1) \rightarrow F(0)$ はトークンをタイプへと割り当てる写像
- $\mathbf{y}$ は米田埋め込み ($\mathbf{y}(0)$ はトークンを持たないタイプ、 $\mathbf{y}(1)$ はただ一つのトークンのみからなるタイプをあらわす)
- 稠密性定理: $F \cong \text{Lan}_{\mathbf{y}} \mathbf{y}(F) = \text{colim} \left((\mathbf{y} \downarrow F) \xrightarrow{\Pi} \Gamma \xrightarrow{\mathbf{y}} \hat{\Gamma} \right)$
- $\widetilde{\text{Lan}_{\mathbf{y}} \mathbf{y}}(F) = (F \text{ のトークン集合とタイプ集合の非交和})$

稠密性定理の「宙吊り」に基づくモデル

Haruna, SI2021



理論的結果(1/2)

$P(k, t)$:時刻 t においてタイプが k 個ある確率、とすると

$$P(k, t + 1) - P(k, t) = \frac{\mu(k-1)}{t + \lambda k_0 + \mu(k-1)} P(k-1, t) - \frac{\mu k}{t + \lambda k_0 + \mu k} P(k, t)$$

ただし、 k_0 は初期タイプ数、 λ は初期時刻におけるタイプごとの平均トークン数

$\Rightarrow$

$\epsilon = 1/k_0$, $\tau = \epsilon t$, $\kappa = \epsilon k$ とおき、 $\epsilon \rightarrow 0$ でFokker-Planck方程式

$$\frac{\partial p(\kappa, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial \kappa} \left(\frac{\mu \kappa}{\tau + \lambda + \mu \kappa} p(\kappa, \tau) \right) + \frac{\epsilon}{2} \frac{\partial^2}{\partial \kappa^2} \left(\frac{\mu \kappa}{\tau + \lambda + \mu \kappa} p(\kappa, \tau) \right)$$

を得る

理論的結果(2/2)

前スライドのFokker-Planck方程式から、 κ の平均値 $\varphi(\tau)$ と分散 $v(\tau)$ のしたがう方程式が導かれ、これより以下のHeapsの法則(左)とTaylorの法則(右)が得られる

(Zipfの法則は、 $f(R) \propto R^{-\frac{1}{\mu}}$)

$$(1) \mu > 2: \varphi(\tau) \propto \tau, \sqrt{v(\tau)} \propto \varphi(\tau)^{\frac{1}{2}}$$

$$(2) \mu = 2: \varphi(\tau) \propto \tau, \sqrt{v(\tau)} \propto (\varphi(\tau) \ln \varphi(\tau))^{\frac{1}{2}}$$

$$(3) 1 < \mu < 2: \varphi(\tau) \propto \tau, \sqrt{v(\tau)} \propto \varphi(\tau)^{\frac{1}{\mu}}$$

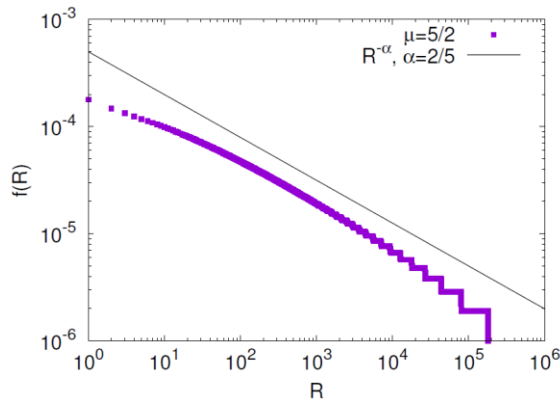
$$(4) \mu = 1: \varphi(\tau) \propto \frac{\tau}{\ln \tau}, \sqrt{v(\tau)} \propto \frac{\varphi(\tau)}{\ln \tau}$$

$$(5) 0 < \mu < 1: \varphi(\tau) \propto \tau^{\mu}, \sqrt{v(\tau)} \propto \varphi(\tau)$$

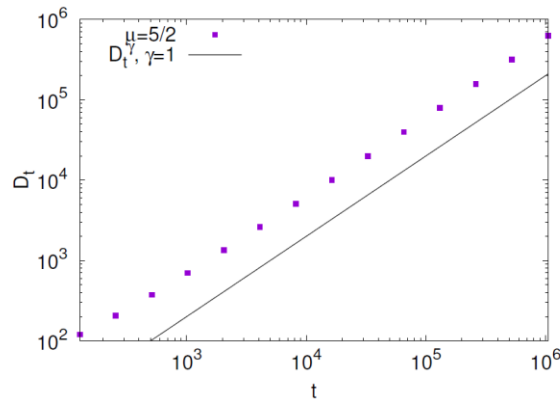
以上の結果は、Tria et al. (2020)の結果と $\mu = \frac{\nu}{\rho}$ で対応がつく

数値シミュレーションとの比較(1/3)

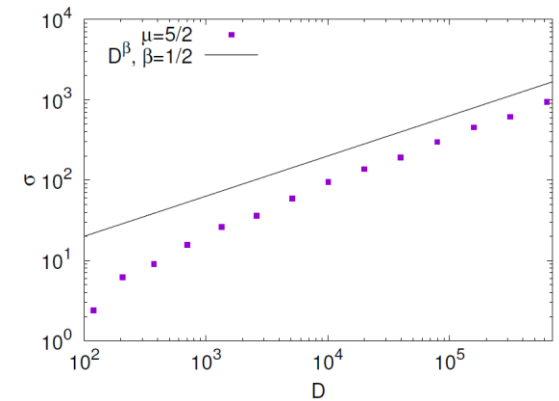
$$\mu = 5/2$$



Zipfの法則



Heapsの法則

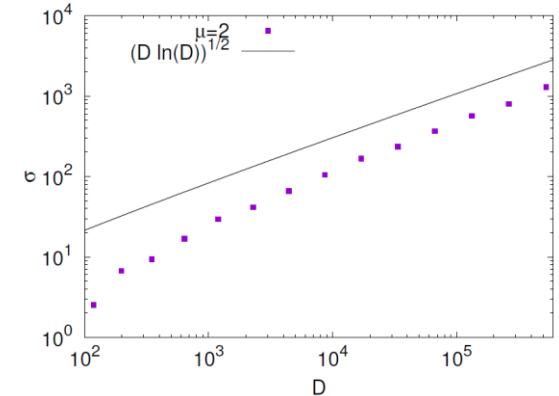
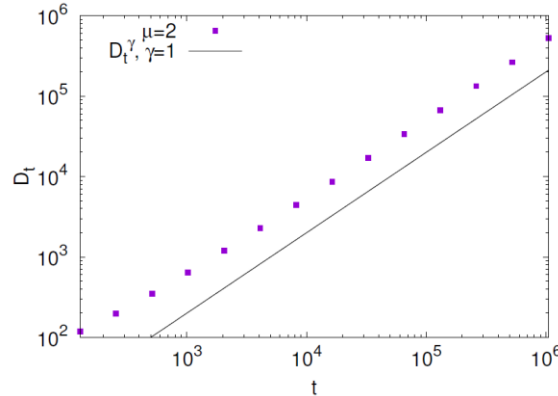
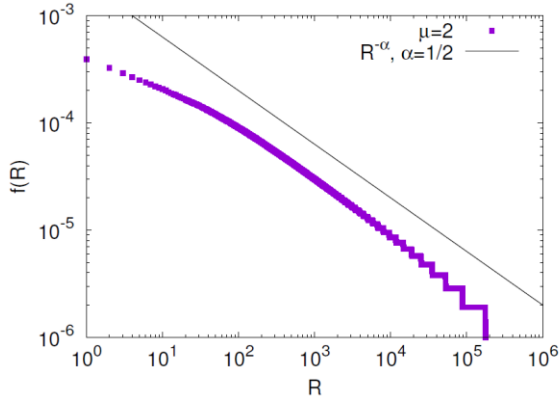


Taylorの法則

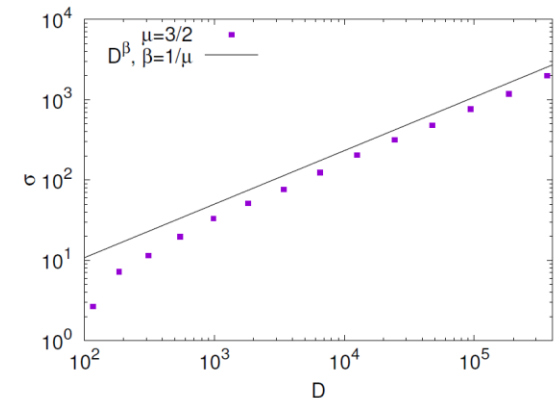
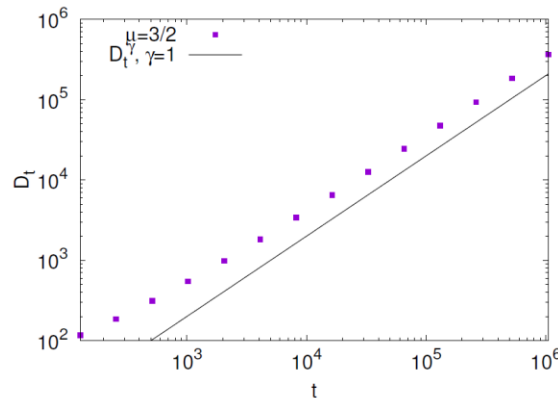
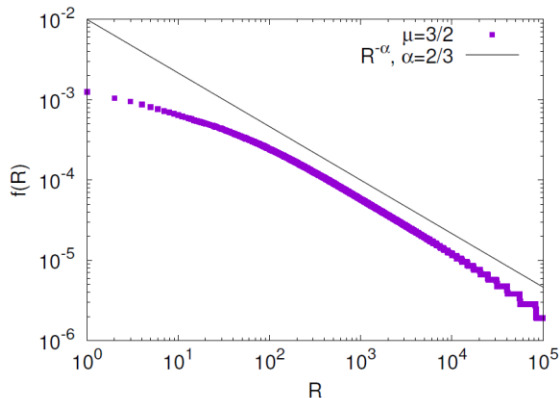
初期条件: タイプ数=100 (各タイプはトークンを一つだけ持つ)
終了条件: トークン数=1048576
試行回数: 100

数値シミュレーションとの比較(2/3)

$\mu = 2$



$\mu = 3/2$



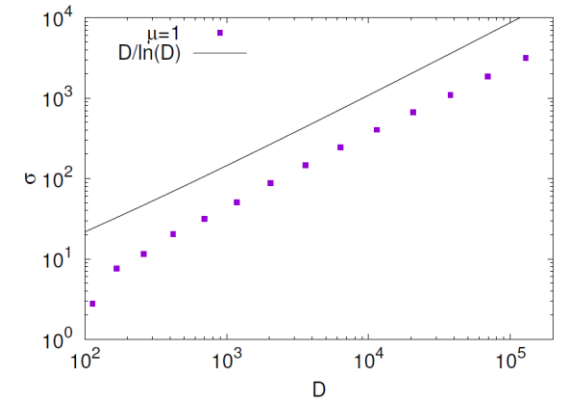
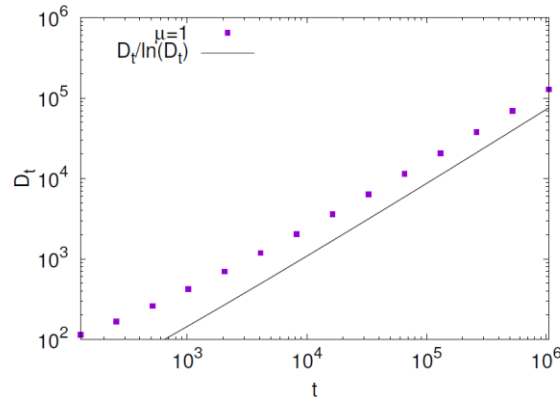
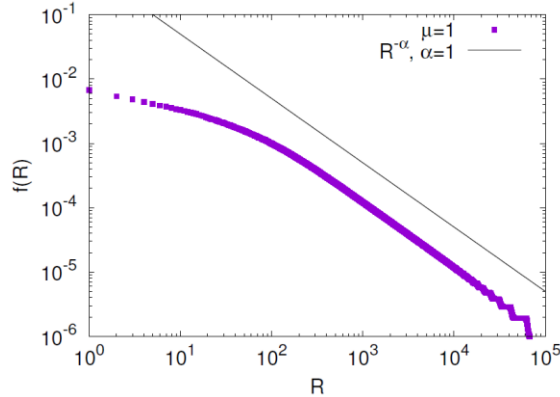
Zipfの法則

Heapsの法則

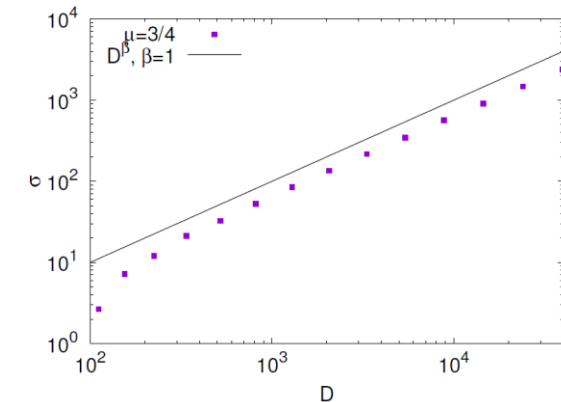
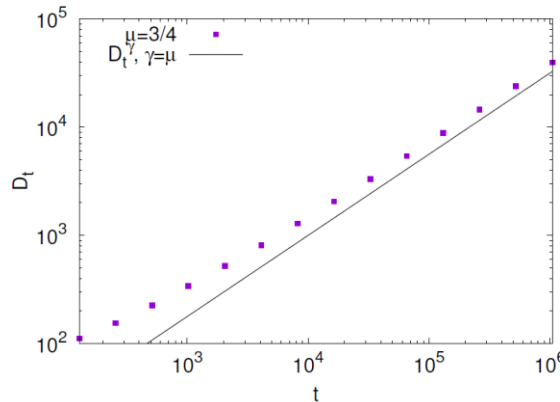
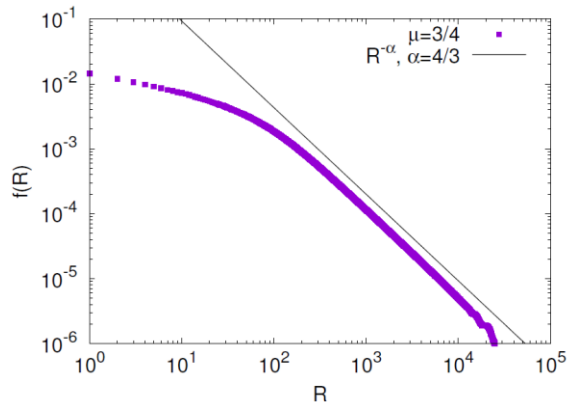
Taylorの法則

数値シミュレーションとの比較(3/3)

$\mu = 1$



$\mu = 3/4$



Zipfの法則

Heapsの法則

Taylorの法則

まとめ

- 圏論における稠密性定理
 - 前層として書けるシステムの部分と全体の関係についての主張と解釈できる
 - 有向ネットワークの場合
 - 有向ネットワークは、頂点と矢印を貼り合わせてできている
- 稠密性定理の「宙吊り」
 - 貼り合わせを忘れ、「要素」を集める
⇒ タイプ(頂点)とトークン(矢印)を対等に扱う
 - 「内から」というあり方(内部観測(松野、郡司))の一つの実装
 - 「内から」は、トークンはタイプと異なる
 - Internally, chance would not differ from choice (Salthe, 2018)
- 複雑系の数理モデルでの研究例を2つ紹介した