Seiberg-Witten 理論の数学と物理

2025.5.14　　　飯田 暢生（東京女子大）

Chap 0　イントロダクション

いいだ　のぶお
飯田　暢生

自己紹介

石川県出身．　金沢大学附属中・高卒．

- B1〜B2　東京大学理科1類

  物理研究会で電磁気学や量子論のゼミ
  数楽で多様体や微分幾何，トポロジーのゼミ
  物理と幾何学にハマる．

- B3　東京大学理学部物理学科

  実験がつらい

- 中退（飛び級のため）
- M1〜D3　東京大学大学院数理科学研究科

  古田幹雄研究室　数学のゲージ理論の研究

- ポスドク〜　東京科学大（旧　東工大）を経て現職

  高谷先生監修の場の量子論の自主ゼミ

今回のテーマ：幾何学と物理

数学

・代数学…群・環・体、加群などの代数構造の研究

例 ・線形代数：連立1次方程式、ベクトル空間・線形写像

・ガロア理論：「5次以上の方程式に解の公式はない」

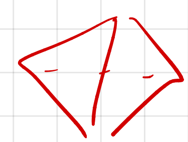
・解析学…微分積分学、微分方程式、

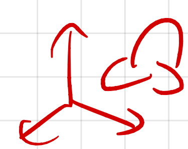
例 ・フーリエ解析

・関数解析：ヒルベルト空間 etc

・幾何学…図形や空間の研究、分類

例：多様体 (manifold)





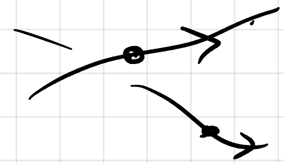
・応用数理

数理物理、保険数理…

今回のテーマ：幾何学と物理

物理学…現実世界の数学的モデルを作る

・力学…森羅万象を質点粒子の運動に還元



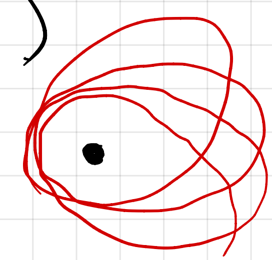
運動の法則　$m\vec{a}=\vec{F}$ ← ・重力　・電磁気力

→星の運動等を説明

・電磁気学…電磁気現象を電場・磁場の法則に還元

→電磁波を予言

・重力理論…重力とは時空の曲がり（計量 $g_{\mu\nu}$）



→水星の近日点移動，GPS …

（近似的にはニュートンの逆2乗則）

・熱・統計力学…超多体系が持つマクロな法則

その統計的説明

→気体，熱機関，化学平衡，輻射，ブラックホール

・量子論…ミクロの世界の法則

今回のテーマ：幾何学と物理

図形・空間を
研究、分類したい

(現実世界に興味がない…?)

現実世界の数学的モデル
をつくりたい

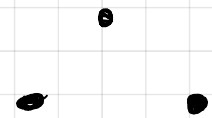
(現実以外には興味がない?)

問題意識は違えど接点がある!?

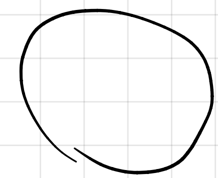
Chap 1 多様体 (manifold) とは?

…「曲がった空間」の数学的定式化

0次元 → 点の集まり

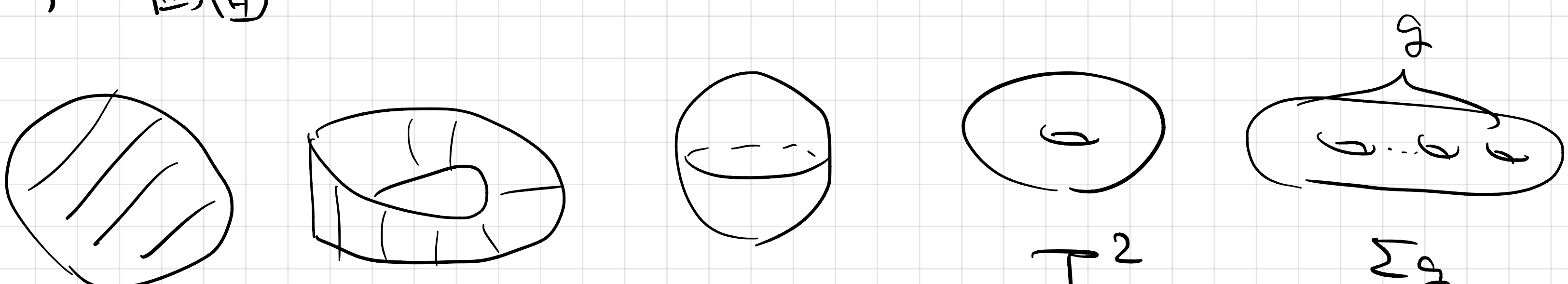


1次元 → 曲線



S^1

2次元 → 曲面



D^2 円板　メビウスの帯　S^2 球面　T^2 トーラス　Σ_g 種数gの閉曲面

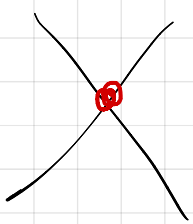
3次元以上 → イメージしにくいが数学的には考えられる.

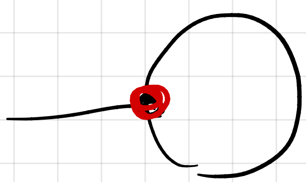
Chap 1　多様体 (manifold) とは?

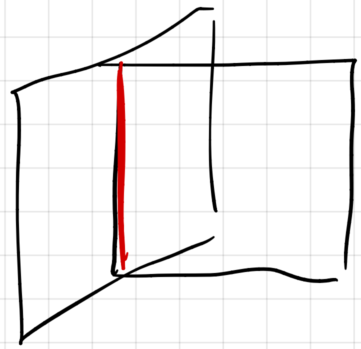
…「曲がった空間」の数学的定式化

多様体<u>ではない</u>ものの例

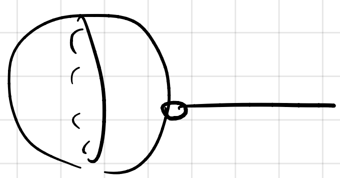
- ある点であって、そのどんなに小さい近傍も、$\mathbb{R}^n$ と同一視できない







- 次元が一様でない



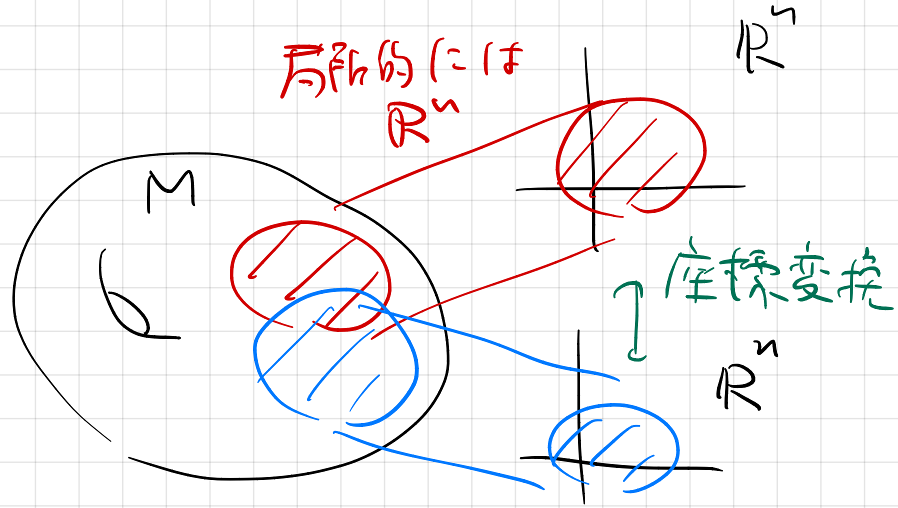
Chap 1　多様体 (manifold) とは?

…「曲がった空間」の数学的定式化

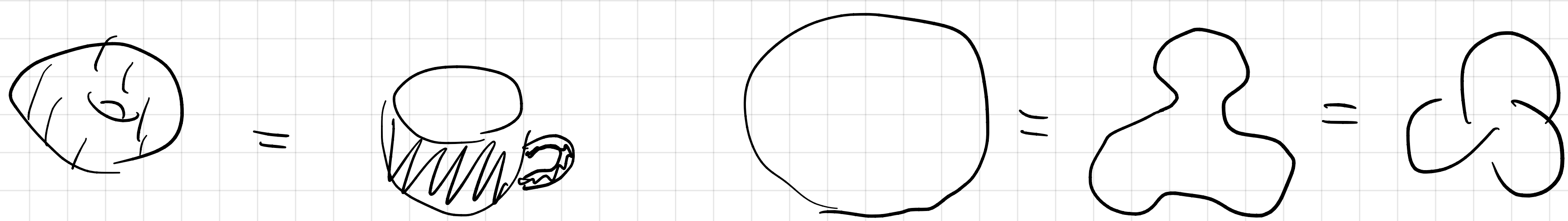
<u>説明したいこと</u>

- 多様体の数学的定義は?

→「局所ユークリッド
　　ハウスドルフ空間」



- どうして多様体を考えるのか?
- どういう多様体を「同じ」と思うか? →「同相」「微分同相」



- 多様体は分類できるか? → 現在でもさかんに研究

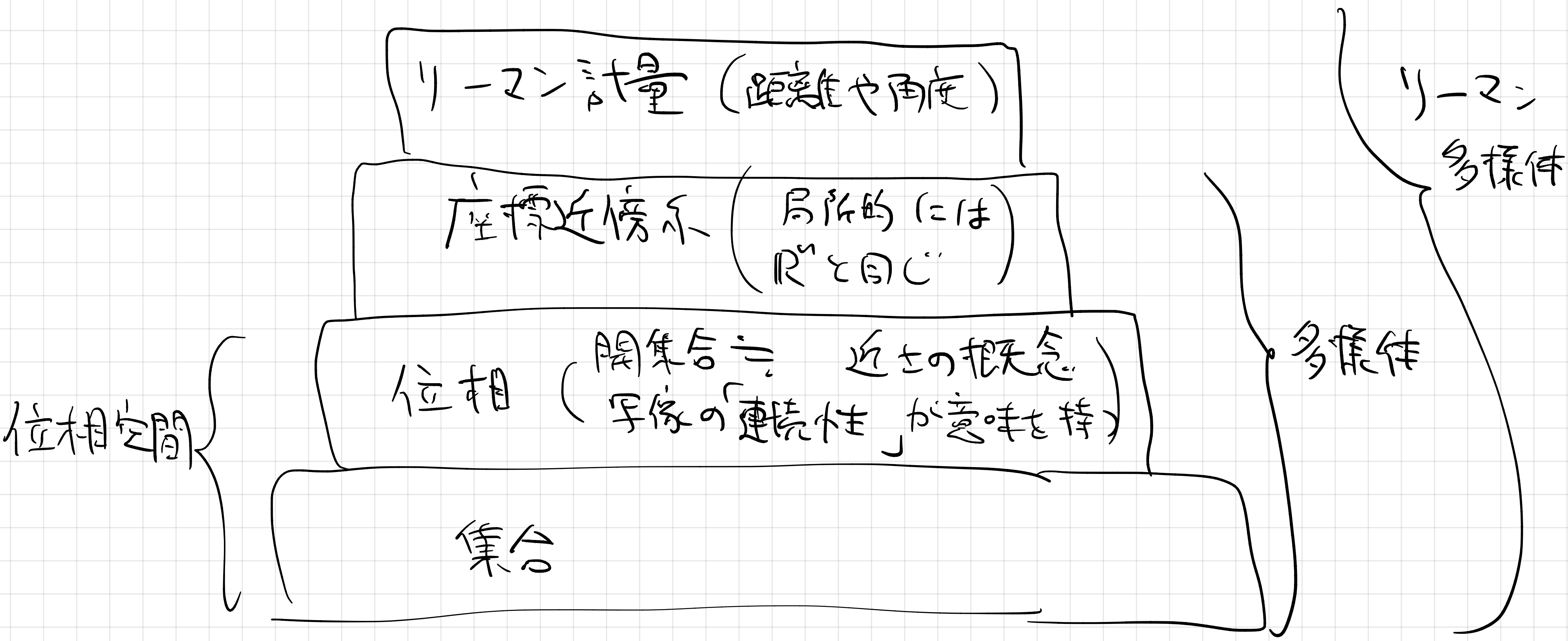
Chap 1　多様体 (manifold) とは?

…「曲がった空間」の数学的定式化

多様体の数学的定義

数学の全ては集合論に基づいている。

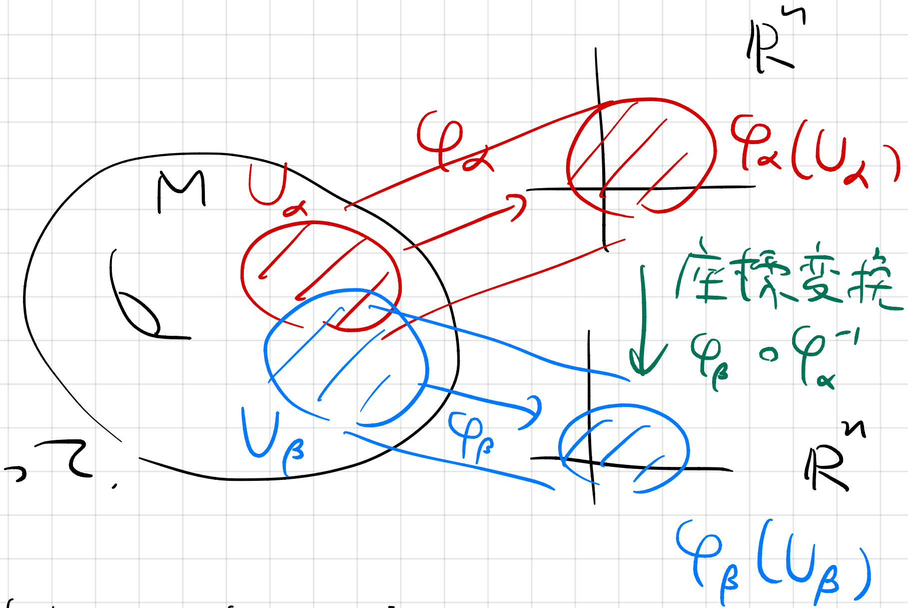
多様体は集合に付加構造を与えたものとして定義される。



Chap 1　多様体 (manifold) とは?

…「曲がった空間」の数学的定式化

多様体の数学的定義



n次元 C^∞ 多様体 とは、

ハウスドルフ位相空間 M であって、

M の開被覆 $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$ および

同相写像 $U_\alpha \xrightarrow[\simeq]{\varphi_\alpha} \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ (座標近傍)

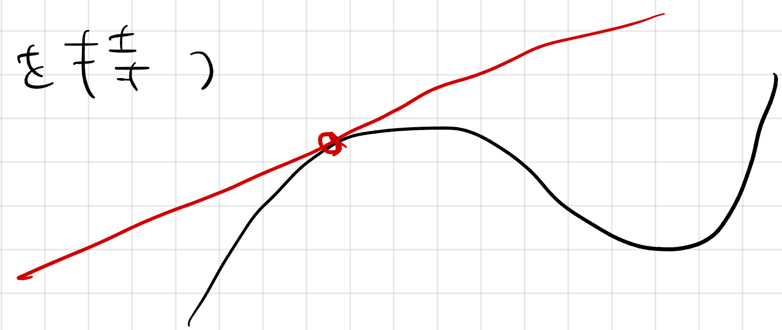
が与えられていて、$U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ ならば、座標変換

$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\beta)$ が C^∞ 写像であるもの

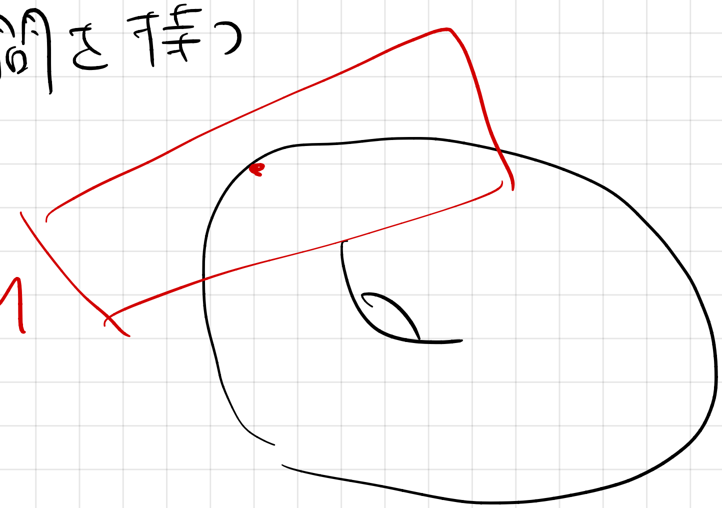
これだけでは長さ・距離や角度の概念はない。

そのような概念はリーマン計量によって与えられる。

なめらかな曲線は各点で接線を持つ



同様に多様体も各点で接空間を持つ



点 $p \in M$ における接空間 T_pM

各点での接空間にユークリッド内積を与えたもの $g = \{g_{\mu\nu}\}$ が C^∞ な座標系を持つときそれをリーマン計量という。

Chap 1　多様体（manifold）とは?

…「曲がった空間」「局所ユークリッドハウスドルフ空間」

どうして多様体を考えるのか?　その1

~1800ごろ　ユークリッド幾何学は唯一の幾何学

1820~1830ごろ　非ユークリッド幾何学の発見

by ガウス，ロバチェフスキー，ボヤイ父子

1854　多様体概念の提案　by リーマン

集合論に基づく数学の基礎づけ，位相空間論等の整備

1930年代　現在の多様体の定義

Chap 1 多様体（manifold）とは？

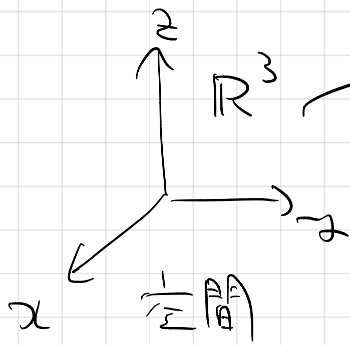
どうして多様体を考えるのか？ その2

「曲がった空間」なんて机上の空論？

→ No！ 重力は時空の曲がり

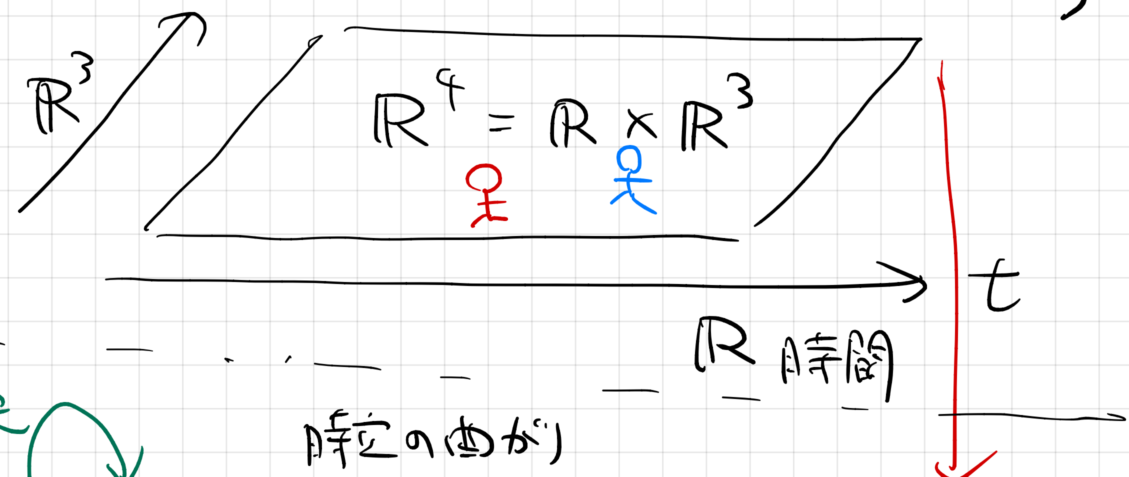
ニュートン力学

（相対論以前）



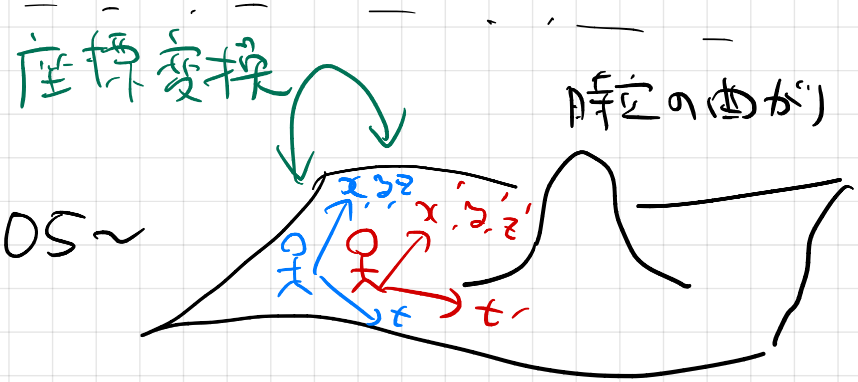
絶対時間，絶対空間

（時間・空間は全員共通）



アインシュタイン 1905〜

相対性理論



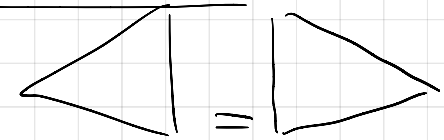
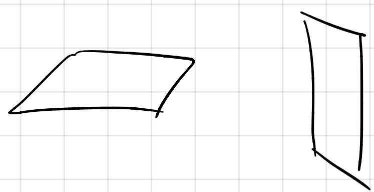
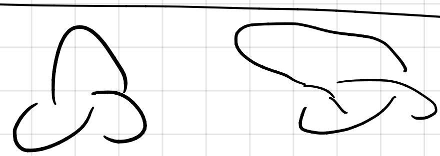
そうではない

相対的

Chap 1　多様体 (manifold) とは？

・どういう多様体を「同じ」と思うか？

数学的対象ごとに「同じ」という基準は異なる。

対象	「同じ」という関係
$\mathbb{R}^n$ の部分集合（多角形, 多面体 等）	合同, 相似 
集合	全単射
ベクトル空間 	線形同型
位相空間	同相
C^∞ 多様体 	微分同相
リーマン多様体	等長同型
結び目 	アイソトピック

Chap 1　多様体 (manifold) とは?

- どういう多様体を「同じ」と思うか?

M_0, M_1 : n 次元 C^∞ 多様体が微分同相

多様体として同じ

$\underset{\text{def}}{\iff}$ $f: M_0 \to M_1$　C^∞ 写像 (全ての座標表示が C^∞)

s.t. f は全単射 & f^{-1} も C^∞

M_0, M_1 : 位相空間が同相

より弱く位相空間として同じ

$\underset{\text{def}}{\iff}$ $f: M_0 \to M_1$　連続写像 (開集合の逆像が開集合)

s.t. f は全単射 & f^{-1} も連続

Chap 2　多様体の分類問題

ここまで

・多様体の定義：局所ユークリッドなハウスドルフ空間で座標変換が C^∞

・多様体が同じであることの定義：微分同相

$$M_0 \underset{f^{-1}:\ C^\infty}{\overset{f\ \text{全単射}.\ C^\infty}{\rightleftarrows}} M_1$$

ここから

多様体を分類する．ただし微分同相な多様体は同じとする．

Chap 2 多様体の分類問題

0次元多様体の分類

有限個の点

0点 ϕ, 1点, 2点, 3点, 4点, ……

∞コの点

いろいろな無限大がある

→ 非連結

連結 1次元多様体の分類

S^1, $\mathbb{R}$, 長い直線

コンパクト

非コンパクト(無限に広がっている)

Chap 2 多様体の分類問題

連結コンパクト2次元多様体の分類

向きづけ可能

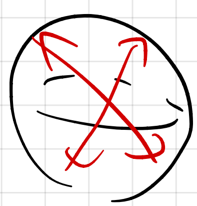
S^2, T^2, Σ_2, Σ_3, ...

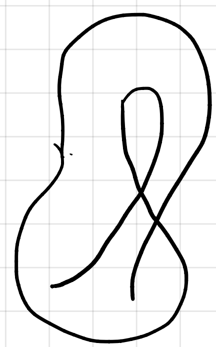
向きづけ不可能

$\mathbb{RP}^2$, $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$, $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$, ...

$\mathbb{RP}^2 = S^2/$対せき点

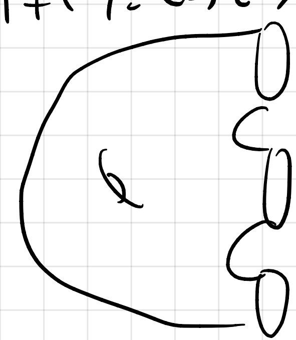
$\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 =$ クラインのつぼ





これで尽きる。

(境界つきを含めても
これらから開円板を
とり除いたもので尽きる)



3次元以上の分類 → 難しい。

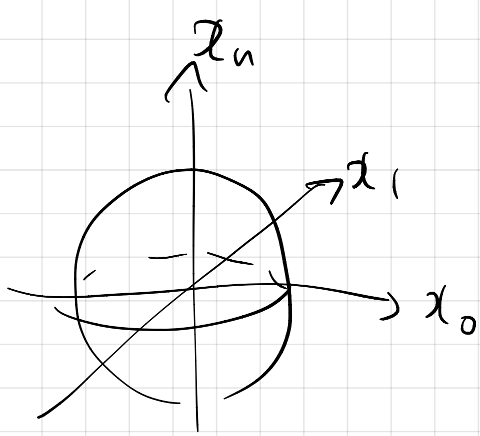
Chap 2　多様体の分類問題

3次元以上の分類 ⟶ 難しい.

特に簡単な場合として

> n次元球面
>
> $$S^n = \{(x_0, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$
>
> と同相である n次元多様体を分類せよ

という問題を考える.



Chap 2　多様体の分類問題

n次元球面

$$S^n = \{ (x_0, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \}$$

と同相である n次元　多様体 を分類せよ

$n \leq 3 \longrightarrow S^n$ しかない　(古典的)

$n = 4 \longrightarrow$ 現在でも未解決 (現在のトポロジーの最大の未解決問題のひとつ)

$n = 5, 6 \longrightarrow S^n$ しかない

$n \geq 7 \longrightarrow S^n$ 以外にもある! (7次元: 向きを区別すると 28個)

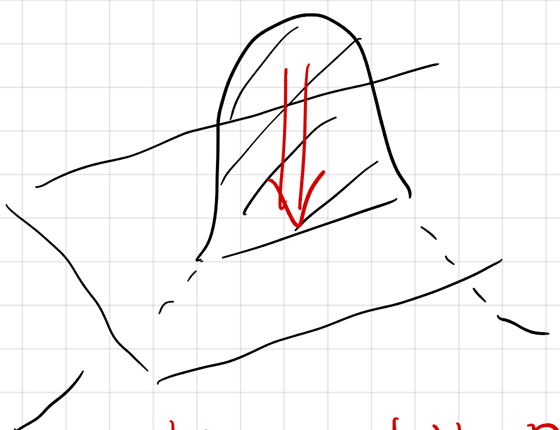
コンパクト n次元多様体 M であって

$M \underset{\text{同相}}{\cong} S^n$ but $M \underset{\text{微分同相でない}}{\not\cong} S^n$ であるもの (エキゾチック球面) が存在する. (by ミルナー)

Chap 2　多様体の分類問題

大昔　　1, 2次元多様体の分類

1960年ごろ　　5次元以上の多様体の分類理論が発達



Whitney トリック

スメイル　高次元ポアンカレ予想の証明

ミルナー・ケルベア理論（エキゾチック球面の分類）

カービー・ジーベンマン理論（C^0 vs C^∞）

1970年ごろ　　サーストンらによる3次元多様体論

→ 4次元には謎が残ったままだった。

Chap 3 ドナルドソン理論とサイバーグ・ウィッテン理論

1980年代 4次元でのブレイクスルー

・フリードマン理論 (C^0レベル)

4次元多様体を同相レベルで分類 ← 交叉形式という (ほぼ) 代数的データで分類

・ドナルドソン理論 (C^∞レベル)

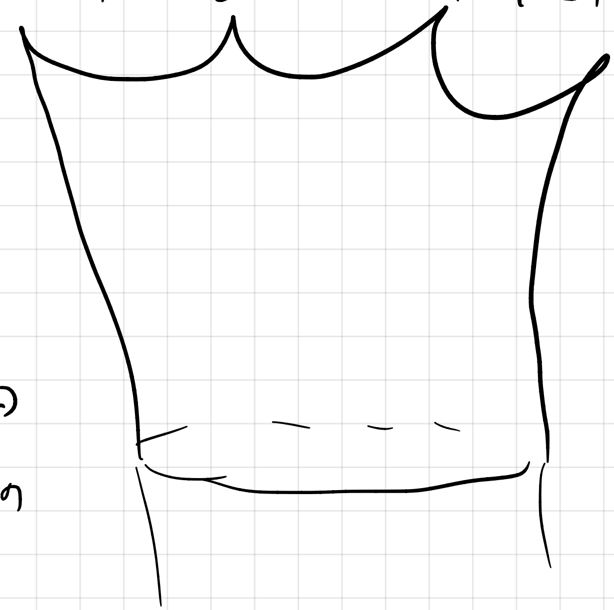
素粒子物理学の Yang-Mills ゲージ理論に由来

((A)SD)インスタントン方程式の4次元トポロジーへの応用

$$F_A^+ = 0$$

4次元多様体上の
非線形偏微分方程式
解析が難しい…

解のゲージ同値類の空間の模式図



Chap 3　ドナルドソン理論とサイバーグ・ウィッテン理論

ドナルドソン不変量

$X \rightsquigarrow D(X)$

コンパクト4次元多様体　　ドナルドソン不変量

「ASD方程式の解の数え上げ」

$X_0 \cong X_1 \Rightarrow D(X_0) = D(X_1)$

微分同相

$\rightsquigarrow D(X_0) \neq D(X_1) \Rightarrow X_0 \not\cong X_1$

微分同相類を区別できる!

エキゾチック4次元多様体の検出（エキゾチック
ドーナツ面）

Chap 3　ドナルドソン理論とサイバーグ・ウィッテン理論

1994年　物理学者 サイバーグとウィッテン (SW)

$N=2$ 超対称ゲージ理論を研究

⇝ その副産物として

SW 方程式 $\begin{cases} \frac{1}{2}F_{A^t} = (\Phi\Phi^*)_0 \\ D_A^+\Phi = 0 \end{cases}$

SW 不変量 $SW(X)$ を導入

さらに、ドナルドソン不変量との等価性

"$D(X) = SW(X)$" を予想した。

SW理論は ドナルドソン理論より

解析的に 簡単でありながら

4次元トポロジーへの応用の多くを 復元・改善した

SW方程式，SW不変量は数学的に厳密に扱える．

しかし，

- SW方程式をどうやって発見したか？
- なぜ

$$D(X) = SW(X)$$

が成り立つと予想されるか，

という物理学者の考えた筋道

は現在の数学では理解できないものである．

D = SW の物理的説明

$F_A^+ = 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho(F_A^+) = (\Phi\Phi^*)_0 \\ D_A^+\Phi = 0 \end{cases}$$

数学

Donaldson 不変量　　　　Seiberg-Witten 不変量

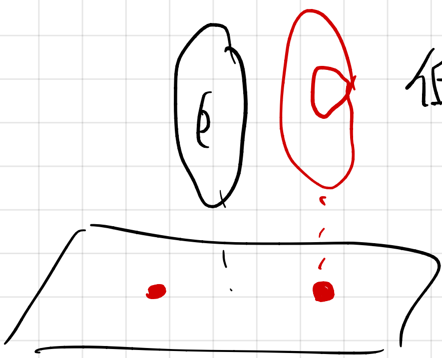
トポロジカルツイスト

$\mathcal{N} = 2$ 超対称

SU(2) Yang-Mills 理論

くりこみ群のフロー

トポロジカルツイスト



低エネルギー有効理論

(U(1) 理論)

$\longleftrightarrow$ 電磁双対性

$\mathcal{N} = 2$

超 QED

A 　　 Φ

dual photon　　モノポール場

D = SW のより正確な主張

Thm (Kronheimer–Mrowka 構造定理)　SW理論直前（直学）

X : $U(2)$ simple type ← 興味深い4mfdの多くはこれをみたす

$$\Rightarrow D_{X,w}\left(\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{\Sigma}\right) = e^{\frac{\Sigma\cdot\Sigma}{2}} \sum (-1)^{\frac{w^2+k_i\cdot w}{2}} \beta_i e^{k_i\cdot\Sigma}$$

ドナルドソン不変量

$\exists\, k_i \in H^2(X;\mathbb{Z})$, $\exists\, \beta_i \in \mathbb{Q}$

Conj ($D = SW$ Witten)

$$X : SW \text{ simple type} \Rightarrow \begin{cases} U(2) \text{ simple type} \\ K_i = c_1(s_i) \\ \beta_i = 2^{2+\frac{7\chi+11\sigma}{4}} SW(s_i) \end{cases}$$

全てのドナルドソン不変量はSW理論で書けてしまう.

↑ U(2)インスタントンに対するもの。U(3)に対しては以下を得た。

<u>Thm</u> (Daemi − I − Scaduto)

X : U(3) simple type

$$\Rightarrow D^3_{X,w}\left(\left(1+\frac{x_2}{3}+\frac{x_2^2}{9}\right)e^{\Gamma_{(2)}+\Lambda_{(3)}}\right)$$

U(3)版 ドナルドソン不変量

$$= e^{\frac{\Gamma\cdot\Gamma}{2}-\Lambda\cdot\Lambda}\sum_{i,j} c_{i,j}\,\zeta_3^{w\cdot\frac{k_i-k_j}{2}}\,e^{\frac{\sqrt{3}}{2}(k_i+k_j)\cdot\Gamma+\frac{\sqrt{-3}}{2}(k_i-k_j)\cdot\Lambda}$$

<u>Conj</u> (Marino − Moore, Daemi − Xie, DIS)

X : SW simple type $\Rightarrow$
$$\begin{cases} \text{U(3) simple type} \\ k_i = c_1(\mathfrak{s}_i) \\ c_{i,j} = 2^{\chi+\frac{3}{2}\sigma+\frac{1}{2}k_i\cdot k_j}\,3^{2+\frac{2\chi+11\sigma}{4}}\,SW(\mathfrak{s}_i)SW(\mathfrak{s}_j) \end{cases}$$

やはり全てSW理論で書けてしまう

ありがとうございました、