

# 電弱モノポールの理論的性質

宮 福太朗 大阪大学

共同研究者: 佐藤 亮介 氏

東京女子大学 5月21日(木)

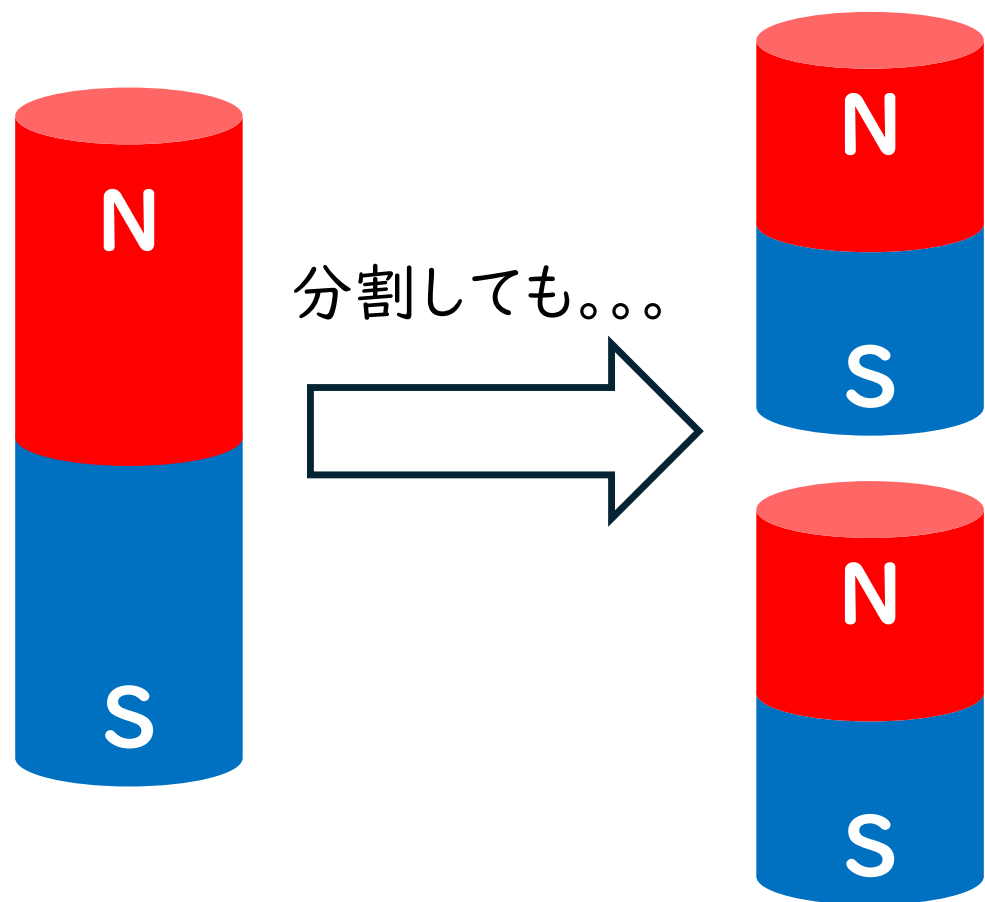
# 内容

- 磁気モノポールの導入
- 磁気モノポールの理論的レビュー
- 研究の話

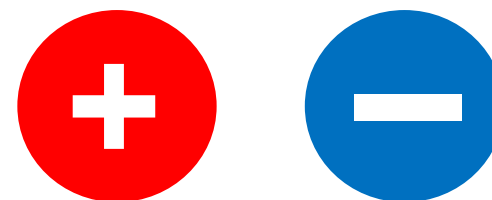
# 内容

- 磁気モノポールの導入
- 磁気モノポールの理論的レビュー
- 研究の話

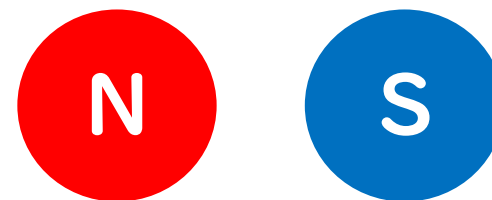
# 磁気モノポール (磁気単極子) とは？



電気モノポール



磁気モノポール?  
(実験では見つからない)



でも素粒子の標準模型の中に磁気モノポールは**存在する**

(電弱セクターで構成される**Cho-Maison<sup>[1]</sup>モノポール**)

**エネルギーが空間原点で発散している**  $E_0 \propto \int_L^\infty \frac{dr}{r^2}$   
 $\frac{1}{L}$  : カットオフスケール

$E > \frac{1}{L}$  の領域で標準模型は不適 = 標準模型は不完全

**➡ Cho-Maisonモノポールの高エネルギーでの理論は?**  
= 標準模型の **UV completion** を知りたい

[1] Y. M. Cho & D. Maison (1996)

でも素粒子の標準模型の中に磁気モノポールは**存在する**

➡ Cho-Maisonモノポールの**高エネルギーでの理論**は？

= 標準模型の **UV completion** を知りたい

Cho-Maisonモノポールとは？

Diracモノポールと't Hooft Polyakovモノポールのハイブリッド  
? ?

電磁気学におけるモノポール  
U(1) ゲージ理論

スカラー場のある理論におけるモノポール  
SU(2) → U(1) 自発的な対称性の破れ

# 内容

- 磁気モノポールの導入
- 磁気モノポールの理論的レビュー
  - Dirac モノポール
  - 't Hooft-Polyakov モノポール
  - Cho-Maison モノポール
- 研究の話

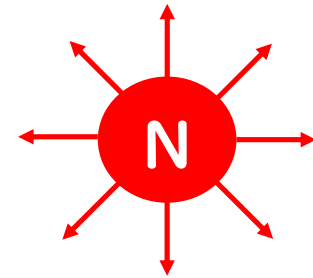
## ● Dirac モノポール

[1] P.A.M. Dirac (1948).

[2] T.T. Wu & C.N. Yang (1969).

# Dirac モノポール P. A. M. Dirac (1948).

電磁気学で構成されるモノポール



## Maxwell方程式

モノポール無し

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}$$

モノポール有り

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho_e$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \rho_m$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{j}_m$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}_e$$

磁場に対するガウスの法則

$$\nabla \cdot \vec{B} = q_M \delta^3(\vec{x})$$

この方程式を満たす  $\vec{B}$  は??

電場を思い出す

$$\vec{E} = \frac{q_e}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

磁場もこんな感じはず

# Diracモノポール 電磁気学

磁場に対するガウスの法則  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = q_M \delta^3(\vec{x})$

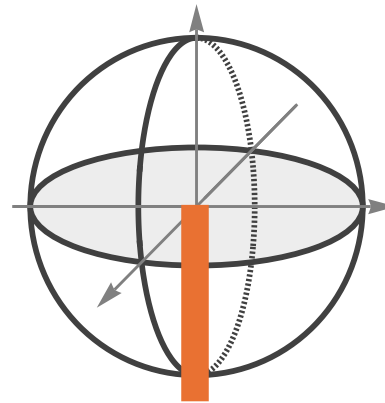
$$\theta \neq \pi \text{ の領域では } \vec{B}_{\text{monopole}} = \frac{q_M}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r} \longleftrightarrow \vec{A} = \frac{q_M}{4\pi r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$\theta = \pi$  を含む領域では

$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{X} \neq 0$  を再現するためには**特異点**が必要

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}_{\text{monopole}} + \vec{B}_{\text{string}}$$

$$\vec{B}_{\text{string}} = q_M \Theta(-z) \delta(x) \delta(y) \hat{z}$$

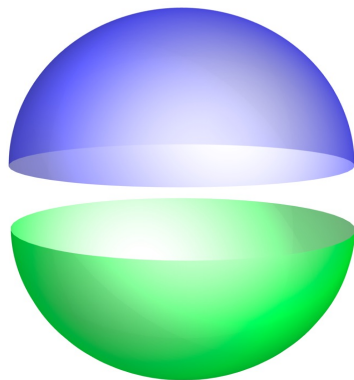


**Dirac String**

この特異性をどう扱えばよいか？

# Wu-Yang の方法 ゲージ場の特異性への対処

2枚のパッチで  
Dirac string を回避



北半球  $A_N = \frac{q_M}{4\pi r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \vec{e}_\varphi$

南半球  $A_S = \frac{q_M}{4\pi r} \frac{-1 - \cos \theta}{\sin \theta} \vec{e}_\varphi$

ゲージ変換  $A_N = A_S + \partial_\mu \chi$       赤道上での同一視  $A_N \sim A_S$

波動関数の一価性  $\Rightarrow$  Dirac 量子化条件  $q_M q_E = 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$   
電荷の量子化

[2] T.T. Wu & C.N. Yang (1969).

# U(1) ゲージ理論 (電磁気学)

$$\vec{B}_{\text{monopole}} = \frac{q_M}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Dirac モノポールのエネルギー

$$E = \frac{1}{2} \int d^3x |\vec{B}|^2 \quad |\vec{B}|^2 \propto \frac{1}{r^4}$$

$$\propto \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} \quad \text{空間原点で発散している}$$

de-Broglie 波長  $\lambda \sim \frac{1}{p}$  原点付近 = 高エネルギー領域

$r \sim \lambda_0$  の長さスケールまで適用可能

$E > \frac{1}{\lambda_0}$  よりも高エネルギーの理論は？

# 内容

- 磁気モノポールの導入
- 磁気モノポールの理論的レビュー
  - Dirac モノポール
  - 't Hooft-Polyakov モノポール
  - Cho-Maison モノポール
- 研究の話

- 't Hooft-Polyakov モノポール

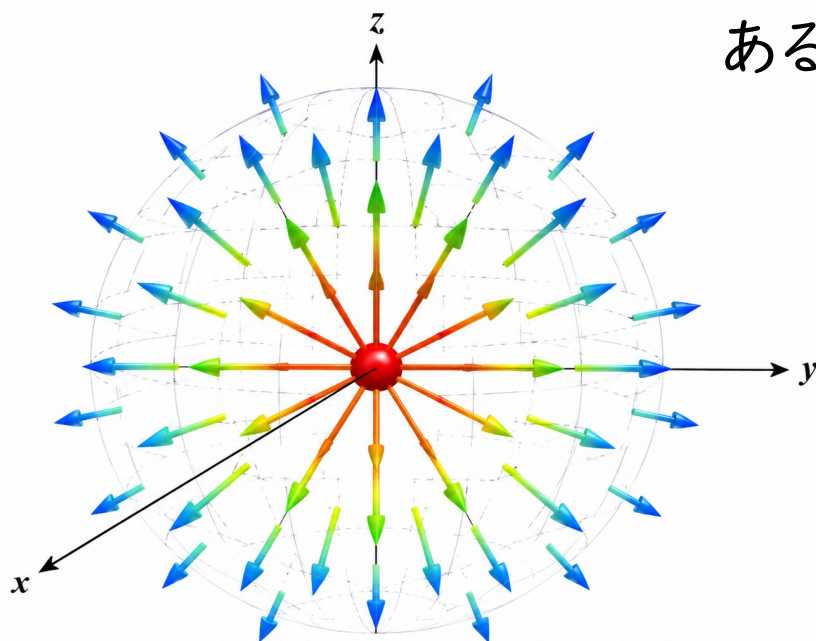
[1] G. 't Hooft (1974).

[2] A. M. Polyakov (1974).

# 't Hooft-Polyakov モノポール

$SU(2) \rightarrow U(1)$  という自発的対称性の破れに伴って生成されるエネルギーの塊

あるいは運動方程式の非自明な解



場は各時空点において値を持っている

自発的対称性の破れとは？

- 特徴
- 正則に定義された球対称な配位
  - エネルギー有限
  - 数学的に安定

数学的な安定性

$$\langle \Phi \rangle : S^2_\infty \rightarrow S^2_{\text{vacuum}}$$

$$\Pi_2(\mathcal{M}_{\text{vac}}) \neq \{e\}$$

$$G \rightarrow H \quad \mathcal{M}_{\text{vac}} = G/H$$

## U(1) ゲージ理論

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_{\mu}\phi)^{\dagger}(D^{\mu}\phi) - V(|\phi|)$$

ゲージ場の強さ

共変微分 (運動項を不変にするためゲージ場を導入)

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$$

$$D_{\mu}\phi = (\partial_{\mu} - iqA_{\mu})\phi$$

ゲージ変換性  $U \in U(1)$   $U = e^{iq\alpha(x)}$   $U^{\dagger}U = 1$  かつ  $\det U = 1$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = U\phi(x)$$

$$A_{\mu}(x) \rightarrow A'_{\mu}(x) = U(x)A_{\mu}(x)U^{-1}(x) + \frac{i}{g}U(x)\partial_{\mu}U^{-1}(x)$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{iq\alpha(x)}\phi(x) \quad A_{\mu}(x) \rightarrow A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) - \partial_{\mu}\alpha(x)$$

# U(1) ゲージ理論 真空 (最低エネルギー状態) の構造をしてみる

Higgs ポテンシャル  $V(\phi) = \lambda(|\phi|^2 - v^2)^2$

$\phi = 0$  回転対称性がある

$|\phi| = v$  回転対称性がない

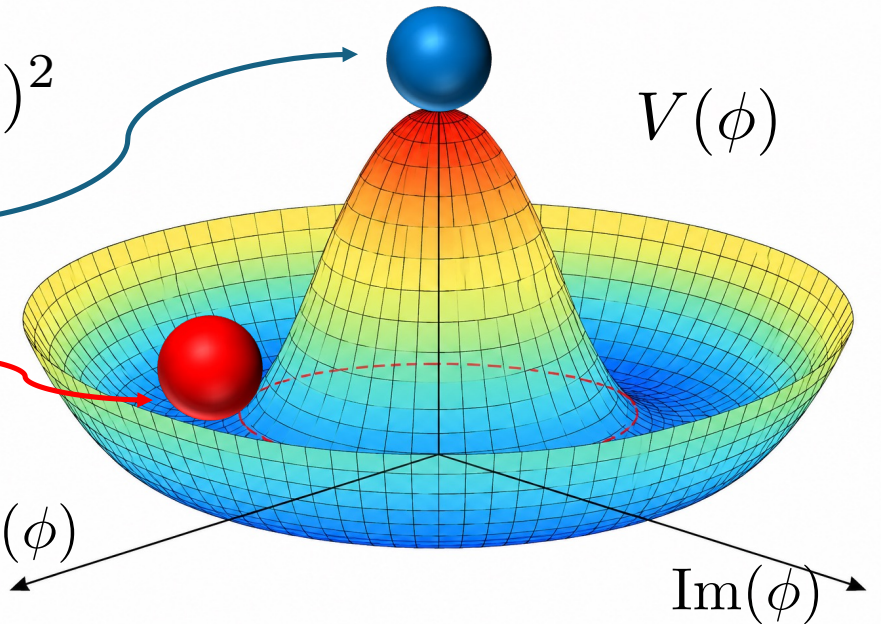
$\phi = \langle \phi \rangle \equiv v$  真空期待値を代入

Re( $\phi$ )

Im( $\phi$ )

➡  $|D_\mu \langle \phi \rangle|^2 = q^2 v^2 A_\mu A^\mu$

スカラー場について特定の方向を選ぶことによってゲージ場が質量を獲得  
= 自発的対称性の破れ Spontaneous Symmetry Breaking



## SU(2) ゲージ理論

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi)$$

物質場の導入の仕方には例えば随伴表現と基本表現などがある

ゲージ群を決めた上で物質場がどのような変換を受けるか決めないといけない

SU(2)  $\rightarrow$  U(1) の対称性の破れを実現させる表現は?

例えば**基本表現**の変換を受けるスカラー場を採用してみる

$$\text{基本表現の変換 } \Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = U(x)\Phi(x)$$

$$U \in \text{SU}(2)$$

$$\Leftrightarrow U^\dagger U = 1 \quad \text{かつ} \quad \det U = 1 \quad \text{を満たす } 2 \times 2 \text{ の複素行列全体}$$

SU(2) ゲージ理論  $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + (D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) - V(\Phi)$

ゲージ場の強さ

共変微分 (運動項を不変にするためゲージ場を導入)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \quad D_\mu\Phi = (\partial_\mu - igA_\mu)\Phi$$

基本表現のスカラ一場

Pauli 行列

$$A_\mu = A_\mu^a \frac{\sigma^a}{2}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

真空期待値  $\langle\Phi\rangle = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$  をスカラ一場の運動項に代入

$$(D_\mu\langle\Phi\rangle)^\dagger(D^\mu\langle\Phi\rangle) = g^2v^2 A_\mu^a A^{a\mu} = g^2v^2 (A_\mu^1 A^{1\mu} + A_\mu^2 A^{2\mu} + A_\mu^3 A^{3\mu})$$

3つのゲージ場が質量を獲得 = 対称性が残っていない

基本表現を採用すると、SU(2)  $\rightarrow$  U(1) という理論にならない

' + Hooft-Polyakov モノポール  $SU(2) \rightarrow U(1)$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{a\mu\nu}F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2}(D^\mu\Phi)^a(D_\mu\Phi)^a - V(\Phi) \quad V(\Phi) = \frac{\lambda}{8}(\Phi^a\Phi^a - v^2)^2$$

随伴表現  $\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = U(x)\Phi(x)U(x)^\dagger \quad \Phi = \Phi^a \frac{\sigma^a}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Phi^3 & \Phi^1 - i\Phi^2 \\ \Phi^1 + i\Phi^2 & -\Phi^3 \end{pmatrix}$

真空期待値  $\langle\Phi\rangle = v \frac{\sigma_3}{2} = \frac{v}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  をスカラー場の運動項に代入

$$(D_\mu\langle\Phi\rangle)^a(D^\mu\langle\Phi\rangle)^a = g^2v^2 (A_\mu^1 A^{1\mu} + A_\mu^2 A^{2\mu})$$

3つの内2つのゲージ場が質量を獲得 = 対称性が1つだけ残った

随伴表現を採用すると、 $SU(2) \rightarrow U(1)$  という理論になった

# 't Hooft-Polyakov モノポール $SU(2) \rightarrow U(1)$

't Hooft-Polyakov モノポールは運動方程式の解として構成される

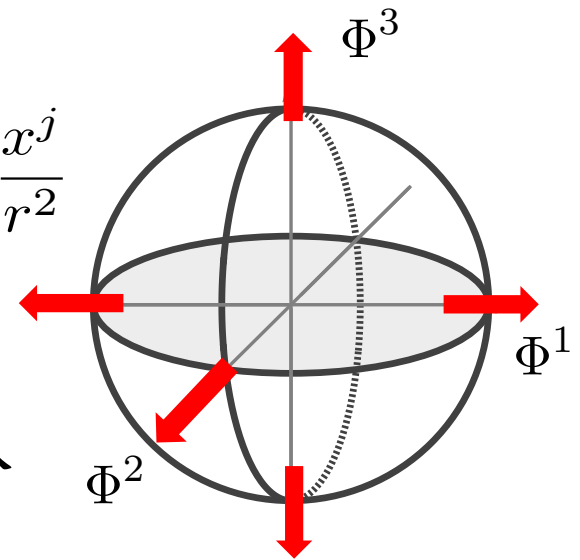
➡ **境界条件**付きの運動方程式で球対称な解を仮定して解く  
**少なくとも無限遠では場は真空**になっていないといけない

Hedgehog (はりねずみ) 配位

$$\Phi^a(x) = v_\Phi \chi(r) \frac{x^a}{r}, \quad A_0^a = 0, \quad A_i^a = \frac{1}{e} (-f(r) + 1) \varepsilon_{aij} \frac{x^j}{r^2}$$

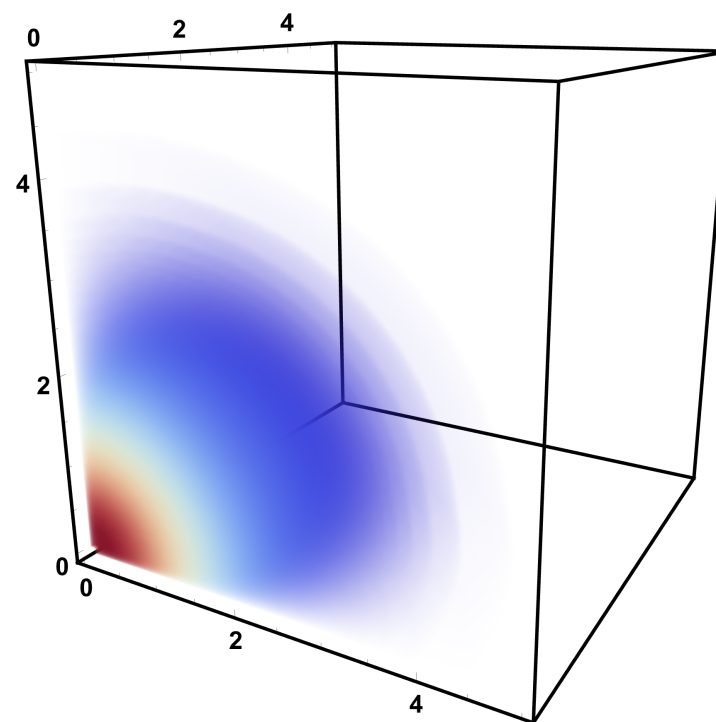
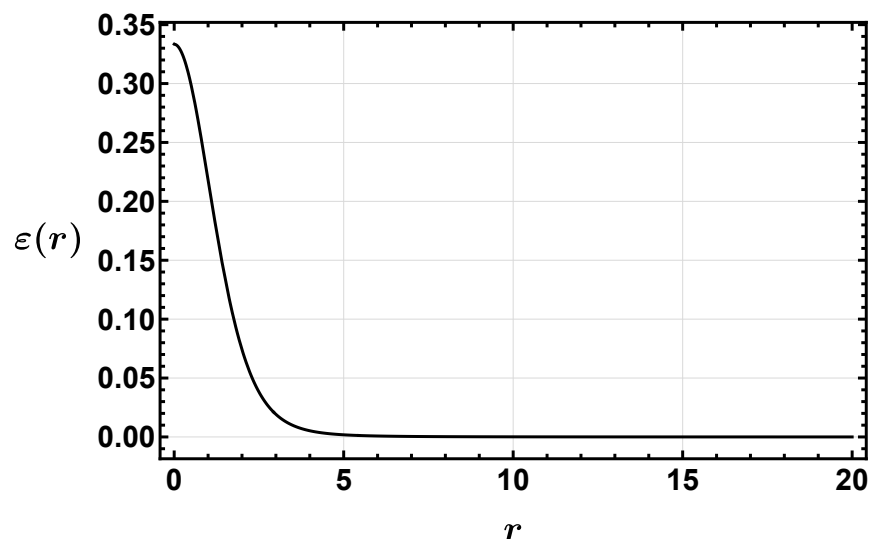
空間と場の回転が互いに相殺して**球対称な配位**

変分原理 ➡ 運動方程式 ➡ Hedgehog 配位を代入



# 't Hooft-Polyakov モノポールのエネルギーの有限性

$$E = \int d^3x \left[ \frac{1}{4} F_{ij}^a F_{ij}^a + \frac{1}{2} (D_i \Phi^a)(D_i \Phi^a) + V(\Phi) \right]$$



➡ エネルギー有限

原点付近にエネルギーが密集してる様子      エネルギー密度3次元プロット

## 't Hooft-Polyakov モノポールの存在条件

有限エネルギー条件から場は空間無限遠で真空になっているべき

➡ 真空で非自明な巻き付き数があるとモノポールが存在する

➡ 真空のトポロジー (特にホモトピー群) によって分類される

$$G \rightarrow H \quad \text{真空} \quad \mathcal{M}_{\text{vac}} = G/H$$

真空はHの対称性がある  
ので商空間で定義される

$$\Pi_2(\mathcal{M}_{\text{vac}}) \neq \{e\} \iff \text{'t Hooft-Polyakov モノポールは存在する}$$

## ここまでのまとめ

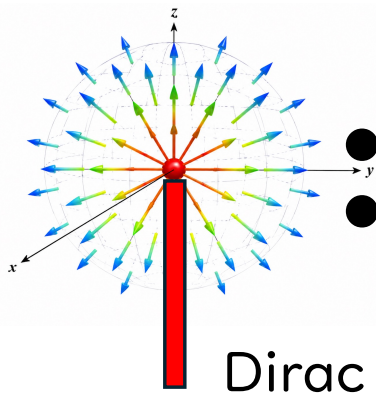
電磁気学でDiracモノポールという磁気モノポールを考えた

エネルギー発散、特異性のある場の配位

そのUV completionとして't Hooft-Polyakovモノポールを考えた

Diracモノポール

$U(1)$

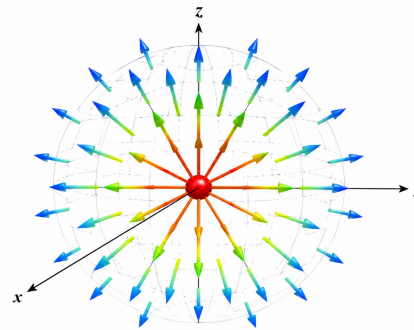


- エネルギー発散
- 特異性のある場の配位

Dirac string

't Hooft-Polyakovモノポール

$SU(2) \rightarrow U(1)$



- エネルギー有限
- 正則な場の配位
- トポロジーにより安定

$$\Pi_2(\mathcal{M}_{\text{vac}}) \neq \{e\}$$

$$G \rightarrow H \quad \mathcal{M}_{\text{vac}} = G/H$$

$\Pi_2(\mathcal{M}_{\text{vac}}) \neq \{e\} \implies$  't Hooft-Polyakov モノポールは存在する

$\Pi_2(\mathcal{M}_{\text{vac}}) = \{e\} \stackrel{?}{\implies}$  モノポールは存在しない

$$\Pi_2 \left( \frac{\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y}{\text{U}(1)_{\text{EM}}} \right) = \{e\}$$

't Hooft-Polyakov モノポール  
は存在しないは正しい  
標準模型の中に他のモノポール  
存在しない?

 Cho-Maison モノポールは存在する

Y. M. Cho & D. Maison (1996).

# 内容

- 磁気モノポールの導入
- 磁気モノポールの理論的レビュー
  - Dirac モノポール
  - 't Hooft-Polyakov モノポール
  - Cho-Maison モノポール
- 研究の話

# Cho-Maisonモノポールとは？

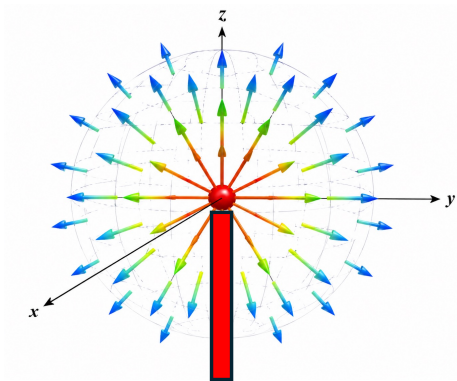
Diracモノポールと'Hooft-Polyakovモノポールのハイブリッド

電磁気学におけるモノポール  
U(1) ゲージ理論

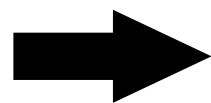
スカラー場のある理論におけるモノポール  
SU(2)  $\rightarrow$  U(1) 自発的な対称性の破れ

## Cho-Maisonモノポール

= 電弱理論の自発的な対称性の破れに伴って生成されるが、  
特異性のあるモノポール



運動方程式の球対称解として構成される



運動方程式を解けば良い

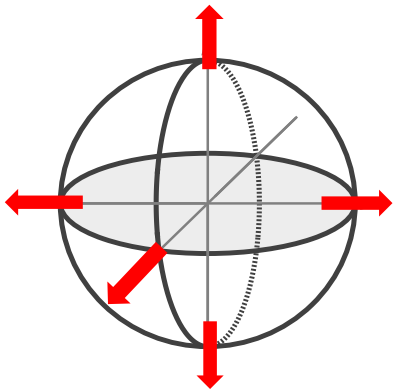
# Cho-Maisonモノポール $SU(2)_L \times U(1)_Y \longrightarrow U(1)_{EM}$

Hedgehog 配位 (球対称な配位)

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \rho(r) \xi, \quad \xi = i \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) e^{-i\varphi} \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad \text{この配位は } \theta = \pi \text{ で不定}$$

$$W_i^a = \frac{1}{g} [1 - f(r)] \varepsilon_{aij} \frac{x^j}{r^2} \quad \text{† Hooft-Polyakov モノポールと同じ配位}$$

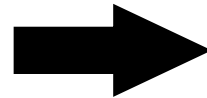
$$B_i = \frac{1}{g'} \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta} (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0) \quad \text{Dirac モノポールと同じ配位 } \theta = \pi \text{ で不定}$$



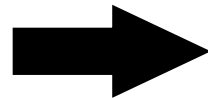
$$E = E_0 + E_1$$

$$E_0 \propto \int_0^\infty \frac{dr}{r^2}$$

空間原点でエネルギー発散



高エネルギー領域 (コア付近) での記述が不十分



Cho-Maison モノポールの UV completion は?

解の存在性: [Y. Yang (2001)]

解の安定性: [R. Gervalle & M.S. Volkov (2022)]

Cho-Maisonモノポール  $SU(2)_L \times U(1)_Y \longrightarrow U(1)_{EM}$

$$\mathcal{L} = |D_\mu H|^2 - \frac{\lambda}{2} \left( H^\dagger H - \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$$

運動方程式

$$\frac{d^2 \rho}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\rho}{dr} - \frac{f^2}{2r^2} \rho - \mu^2 (\rho^2 - 1) \rho = 0$$
$$\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{f}{r^2} (f^2 - 1) - \frac{g^2 v^2}{4} \rho^2 f = 0$$

原点近傍の振る舞い

$$\frac{d^2 \rho}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\rho}{dr} - \frac{\rho}{2r^2} \simeq 0 \quad \rho(r) \propto r^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \rho(r) \xi,$$

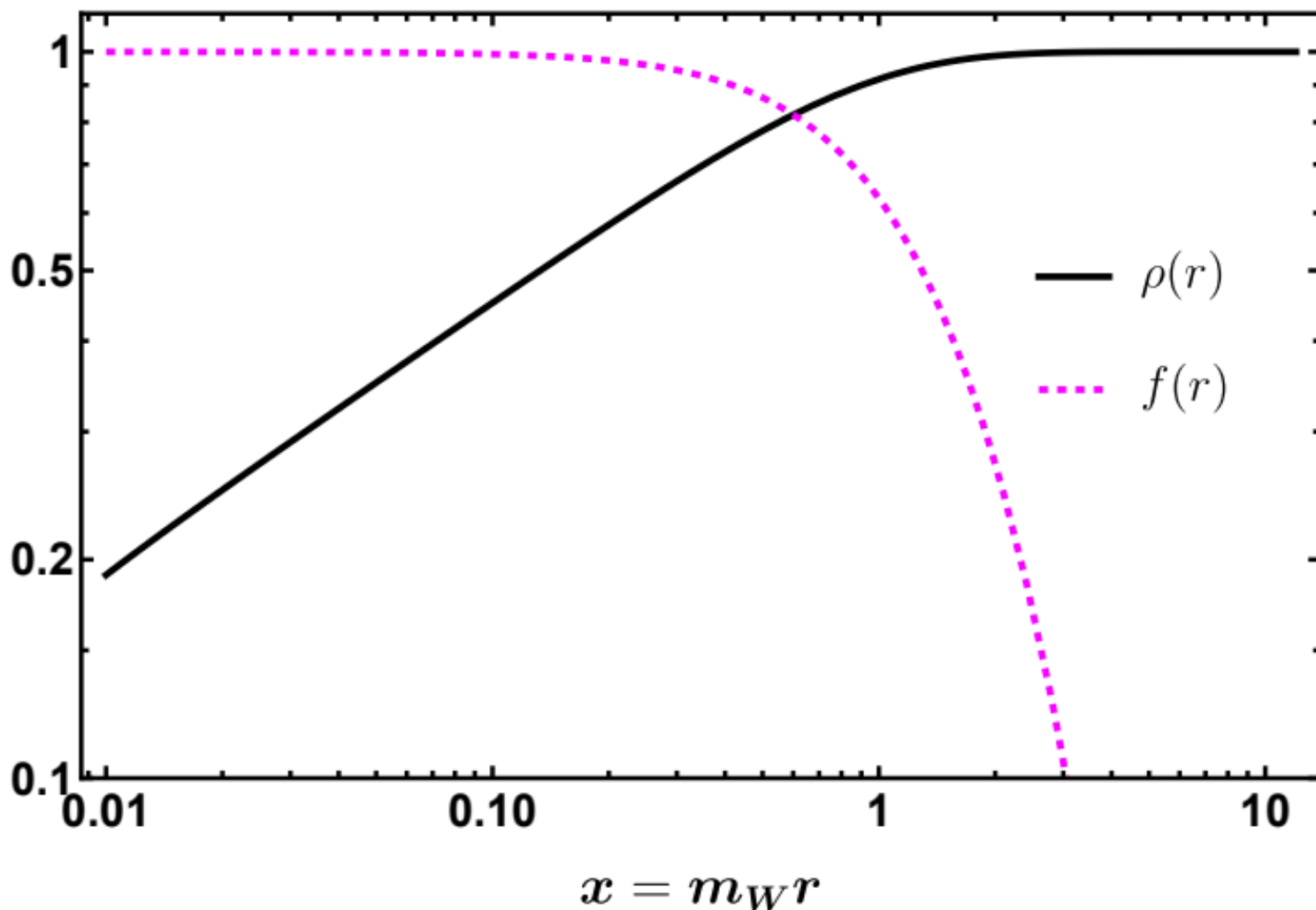
$$W_i^a = \frac{1}{g} [1 - f(r)] \varepsilon_{aij} \frac{x^j}{r^2}$$

有限エネルギー条件から  
少なくとも場は空間無限遠  
で真空になっているべき

境界条件

$$\rho(r \rightarrow \infty) = 1$$

$$f(r \rightarrow \infty) = 0$$



運動方程式の解のプロット

## 問題提起

① Cho-Maison モノポールが構成されるのはどういう時か？

$$\Pi_2(G/H) \neq \{e\} \iff \text{'t Hooft-Polyakov モノポール}$$

$SU(2) \times U(1) \rightarrow U(1)_{\text{diag}}$  CMモノポールではこの構造が本質的？

この構造を含むより広い群においても

CMモノポールのようなものを構成できそう。。。期待

② Cho-Maison モノポールの UV completion は何か？

$$E_0 \propto \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} \quad \text{空間原点でエネルギー発散}$$

't Hooft-Polyakov モノポールは高エネルギー領域でも定義された物体

これを使えそう。。。期待

# 内容

- 磁気モノポール研究の背景と課題
- 磁気モノポールの理論的レビュー
- **私の研究の話**
  - Cho-Maison モノポールの一般化
  - Cho-Maison モノポールのUV completion

➤ **Cho-Maison モノポールの一般化**

## Cho-Maison モノポール

$$SU(2) \times U(1) \rightarrow U(1)_{\text{diag}} \quad \text{この構造本質的??}$$

条件① この構造を含むより広い群

条件② 標準模型のように 't Hooft-Polyakov モノポールを含まない群

$$\begin{array}{ccc} SU(3) \times SO(3) & \rightarrow & SO(3)_{\text{diag}} \\ \cup & & \cup \\ SU(2) & \times & U(1) & \rightarrow & U(1)_{\text{diag}} \end{array}$$

$$\Pi_2(G/H) = \Pi_2 \left( \frac{SU(3) \times SO(3)}{SO(3)_{\text{diag}}} \right) \simeq \Pi_2(SU(3)) = \{e\}$$

これからやること

運動方程式を解いてCMモノポールと比較して同じ振る舞いをすることを確認

$$\text{SU}(3) \times \text{SO}(3) \rightarrow \text{SO}(3)_{\text{diag}}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^A G^{A\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} + \text{Tr}[(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi)] - V(\Phi),$$

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi - ig G_\mu^A \frac{\lambda^A}{2} \Phi + ig' \Phi W_\mu^a J^a,$$

$$G_{\mu\nu}^A = \partial_\mu G_\nu^A - \partial_\nu G_\mu^A + gf^{ABC} G_\mu^B G_\nu^C,$$

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g' \varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c$$

$$V(\Phi) = \frac{\lambda}{2} (\text{tr}[\Phi \Phi^\dagger])^2 + \frac{\lambda'}{2} \text{tr}[\Phi \Phi^\dagger \Phi \Phi^\dagger] - \mu^2 \text{tr}[\Phi \Phi^\dagger] - \kappa (\det \Phi + \det \Phi^\dagger)$$

$$\Phi \rightarrow U \Phi R^T \quad U \in \text{SU}(3) \quad R \in \text{SO}(3)$$

モノポールの解の仮定  $SU(3) \times SO(3) \rightarrow SO(3)_{\text{diag}}$

$$G_0^a = -\frac{1}{g} A(r) \hat{r}^a, \quad G_i^a = \frac{1}{g} [f(r) - 1] f^{abc} \hat{r}^b \partial_i \hat{r}^c, \quad a = 1, 2, 3 \quad G_\mu^a = 0, \quad a = 4, \dots, 8$$

$$W_0^3 = -\frac{1}{2g'} B(r), \quad W_i^3 = -\frac{1}{2g'} (1 - \cos \theta) \partial_i \varphi \quad W_\mu^1 = W_\mu^2 = 0$$

$$U_3(\theta, \varphi) = \exp(-i\varphi\lambda^3/2) \exp(-i\theta\lambda^2/2) \exp(i\varphi\lambda^3/2),$$

$$\Phi(x) = v U_3(\theta, \varphi) [\rho(r) T_\rho + \chi(r) T_\chi] \quad T_\rho = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_\chi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

境界条件

$$\rho(0) = 0, \quad \chi(0) = \chi_0, \quad f(0) = 1$$

$$\rho(\infty) = 1, \quad \chi(\infty) = 1, \quad f(\infty) = 0$$

$$\text{SU}(3) \times \text{SO}(3) \rightarrow \text{SO}(3)_{\text{diag}}$$

運動方程式

CMモノポールと同じ構造

$$\frac{d^2 \rho}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\rho}{dr} - \frac{f^2}{2r^2} \rho + \mu^2 \rho - \lambda v^2 \rho (2\rho^2 + \chi^2) - \lambda' v^2 \rho^3 + \kappa v \rho \chi = 0$$

$$\frac{d^2 \chi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\chi}{dr} + \mu^2 \chi - \lambda v^2 \chi (2\rho^2 + \chi^2) - \lambda' v^2 \chi^3 + \kappa v \rho^2 = 0,$$

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{f - f^3}{r^2} - g^2 v^2 f \rho^2 = 0$$

CMモノポールの運動方程式

$$\frac{d^2 \rho}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\rho}{dr} - \frac{f^2}{2r^2} \rho - \mu^2 (\rho^2 - 1) \rho = 0$$

$$\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{f}{r^2} (f^2 - 1) - \frac{g^2 v^2}{4} \rho^2 f = 0$$

原点近傍の振る舞い

$$\frac{d^2 \rho}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\rho}{dr} - \frac{\rho}{2r^2} \simeq 0$$

$$\rho(r) \propto r^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$$

$SU(3) \times SO(3) \rightarrow SO(3)_{\text{diag}}$

の対称性の破れを再現する  
スカラー場の表現を選ぶ

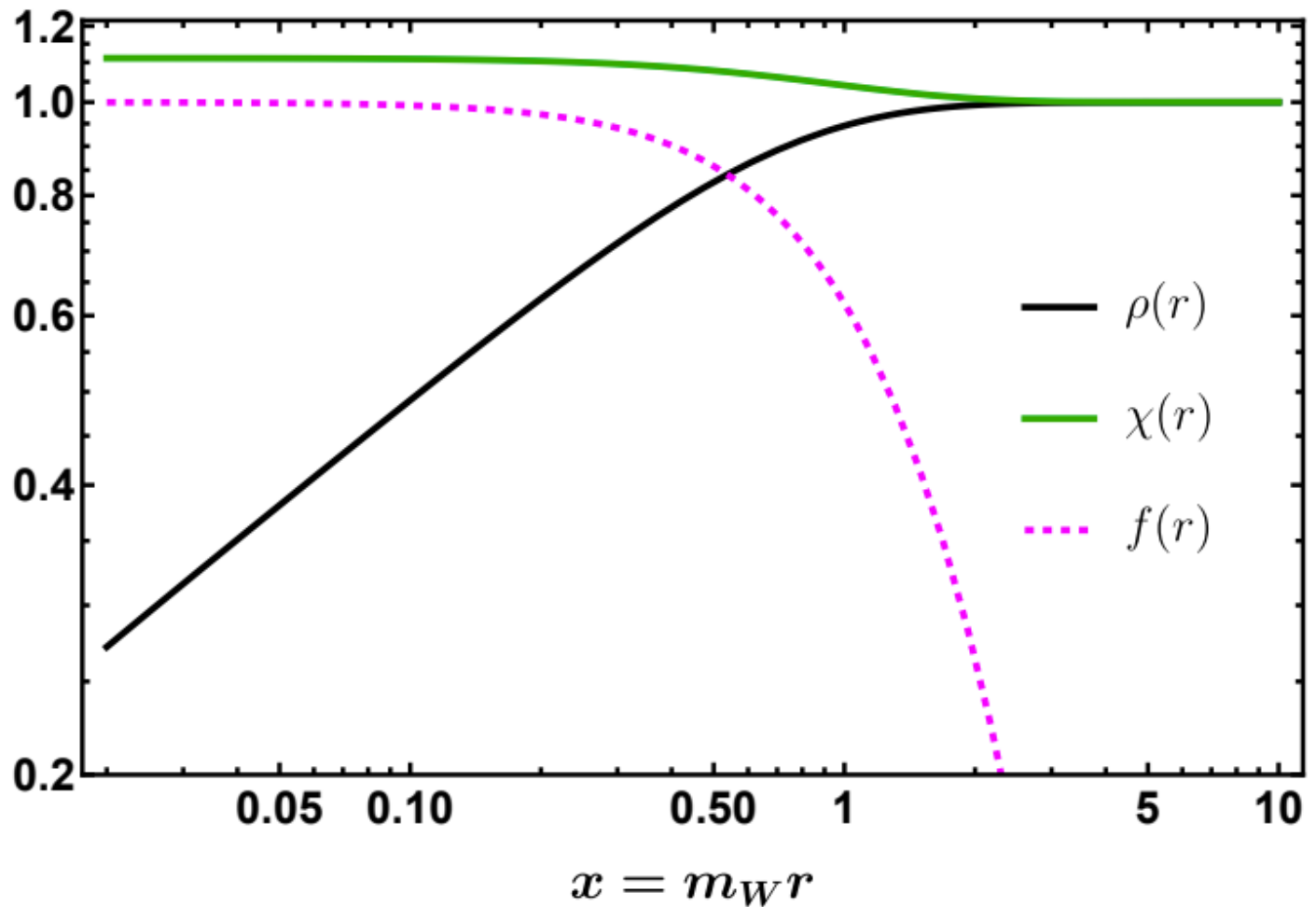
球対称解を仮定して  
運動方程式を解いた

境界条件

$$\rho(\infty) = 1$$

$$\chi(\infty) = 1$$

$$f(\infty) = 0$$



このゲージ群でCho-Maison like なモノポールを構成できた

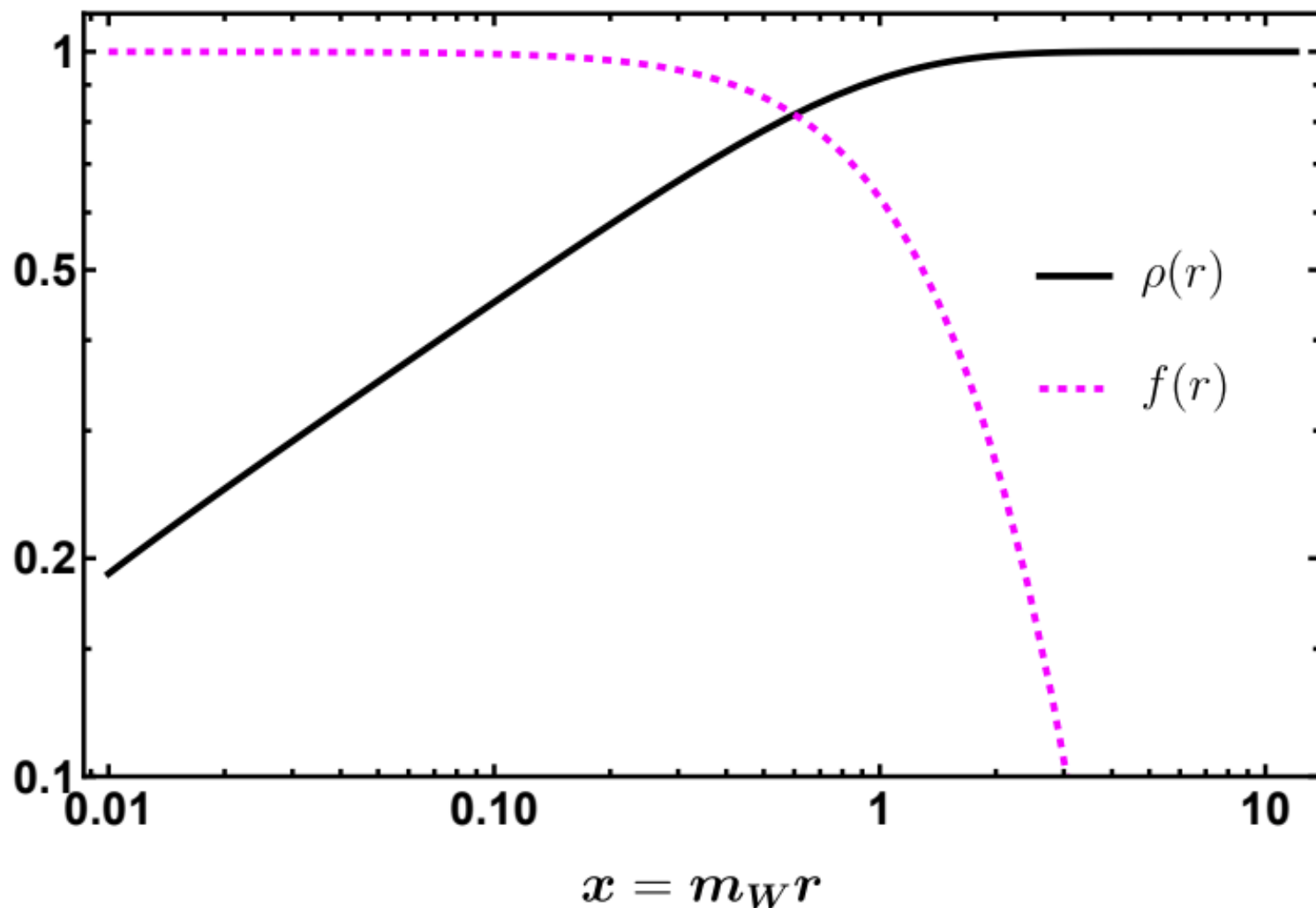
$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho(r)\xi,$$

$$W_i^a = \frac{1}{g} [1 - f(r)] \varepsilon_{aij} \frac{x^j}{r^2}$$

境界条件

$$\rho(r \rightarrow \infty) = 1$$

$$f(r \rightarrow \infty) = 0$$



より広いゲージ群でCho-Maison like なモノポールを構成できた

➤ **Cho-Maison モノポールの UV completion**

● 't Hooft-Polyakov モノポール

$$SU(2) \rightarrow U(1)$$

- 正則な配位
- エネルギー有限

数学的な安定性

$$\langle \Phi \rangle : S^2_\infty \rightarrow S^2_{\text{vacuum}}$$

$$\Pi_2(\mathcal{M}_{\text{vac}}) \neq \{e\}$$

● Cho-Maison モノポール

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \longrightarrow U(1)_{EM}$$

- 特異点を持つ配位
- 空間原点でエネルギー発散

標準模型内にはこの数学的条件を満たさないため、't HPモノポールは不在

$$\Pi_2(\mathcal{M}_{\text{vac}}^{\text{SM}}) = \{e\}$$

UV completionのシナリオ

高エネルギーでは 't Hooft-Polyakov モノポール

低エネルギーでは Cho-Maison モノポール



我々の研究でこのシナリオを再現する具体的なモデルを調べた

# Cho-Maison モノポールのUV Completion

## ● Pati-Salam 模型

$$SU(4)_C \times SU(2)_L \times SU(2)_R$$

$$\downarrow \langle \Phi \rangle$$

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$

$$\downarrow \langle H \rangle$$

$$SU(3)_C \times U(1)_{EM}$$

真空期待値の階層性

$$\langle \Phi \rangle \gg \langle H \rangle$$

J. C. Pati & A. Salam (1974).

't HP モノポールの存在条件

$$\Pi_2(G/H) = \mathbb{Z}$$

この低エネルギー有効理論ではCMモノポールのように見える

確認したいこと

$H(x)$  が高エネルギー領域で 't HP モノポールのよう振る舞うこと

今からやる解析

- 解として Hedgehog 配位を仮定して、運動方程式を解く
- 空間座標に対する解の振る舞いをプロットして  $H(x)$  の挙動を調べる

# ● Pati-Salam 模型

球対称な解を仮定して運動方程式を解く

$$V(H, \Phi) = -\mu_\Phi^2 \text{Tr} \Phi^\dagger \Phi - \mu_H^2 \text{Tr} H^\dagger H + \lambda_1 (\text{Tr} \Phi^\dagger \Phi)^2 + \lambda_2 \text{Tr} \Phi^\dagger \Phi \Phi^\dagger \Phi + \lambda_3 (\text{Tr} H^\dagger H)^2 + \lambda_4 \text{Tr} H^\dagger H H^\dagger H$$

Hedgehog 配位  $\hat{r}^a = \frac{x^a}{r} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$

## スカラー場

$$\Phi(4, 1, 2) \quad \Phi \rightarrow \Phi' = U_4 \Phi U_R^\dagger \quad \langle \Phi \rangle = v_\Phi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(x) = v_\Phi \chi(r) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$H(1, 2, 2) \quad H \rightarrow H' = U_L H U_R^\dagger \quad \langle H \rangle = v_H \begin{pmatrix} 0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$H(x) = v_H h(r) \left( 1_2 + \frac{x^a \sigma^a}{r} \right) = v_H h(r) \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix}$$

## ゲージ場

$$G_{4i}^a = \frac{1}{g_4} (-f_4(r) + 1) \varepsilon_{aij} \frac{x^j}{r^2}$$

$$W_{Ri}^a = \frac{1}{g_R} (-f_R(r) + 1) \varepsilon_{aij} \frac{x^j}{r^2}$$

$$W_{Li}^a = \frac{1}{g_L} (-f_L(r) + 1) \varepsilon_{aij} \frac{x^j}{r^2}$$

$$G_{40}^a = W_{L0}^a = W_{R0}^a = 0$$

$$\text{SU}(4)_C \times \text{SU}(2)_L \times \text{SU}(2)_R$$

$$\downarrow \langle \Phi \rangle$$

$$\text{SU}(3)_C \times \text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y$$

$$\downarrow \langle H \rangle$$

$$\text{SU}(3)_C \times \text{U}(1)_{\text{EM}}$$

$$\langle \Phi \rangle \gg \langle H \rangle$$

# ● Pati-Salam 模型

## 運動方程式の解のプロット

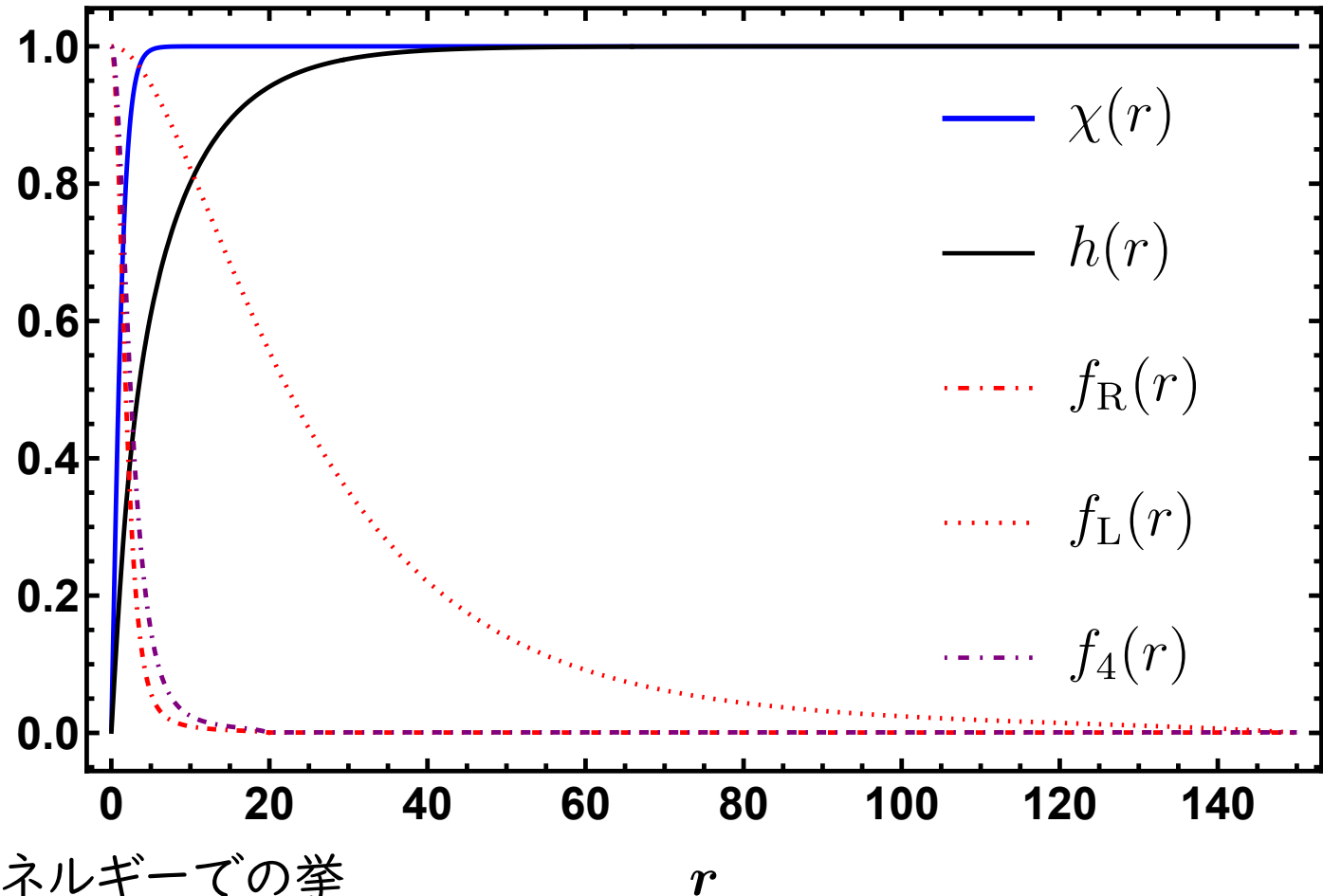
$$\Phi(x) = v_\Phi \chi(r) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$H(x) = v_H h(r) \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & e^{-i\varphi} \sin \theta \\ e^{i\varphi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$G_{4i}^a = \frac{1}{g_4} (-f_4(r) + 1) \varepsilon_{aij} \frac{x^j}{r^2}$$

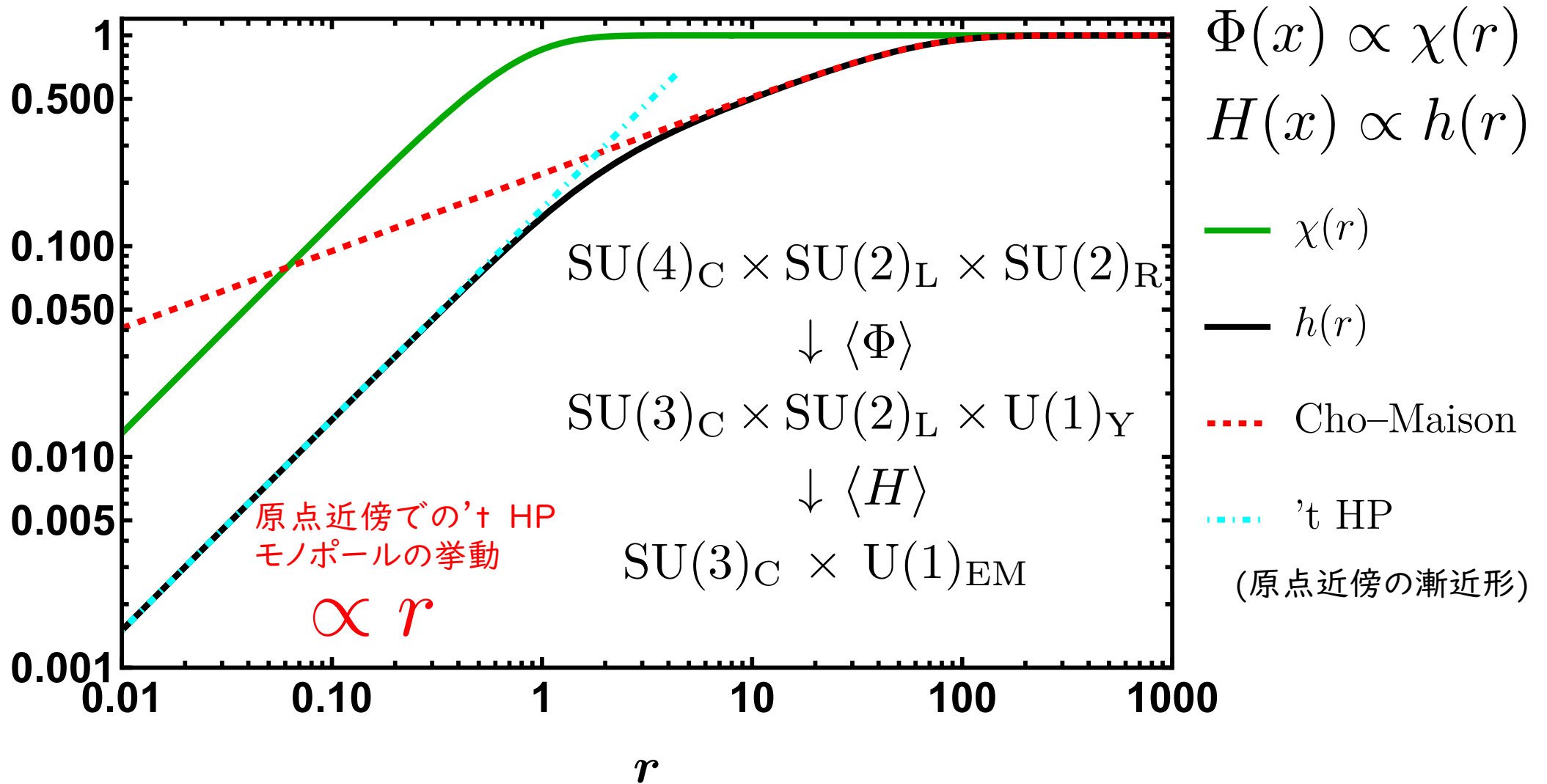
$$W_{Ri}^a = \frac{1}{g_R} (-f_R(r) + 1) \varepsilon_{aij} \frac{x^j}{r^2}$$

$$W_{Li}^a = \frac{1}{g_L} (-f_L(r) + 1) \varepsilon_{aij} \frac{x^j}{r^2}$$

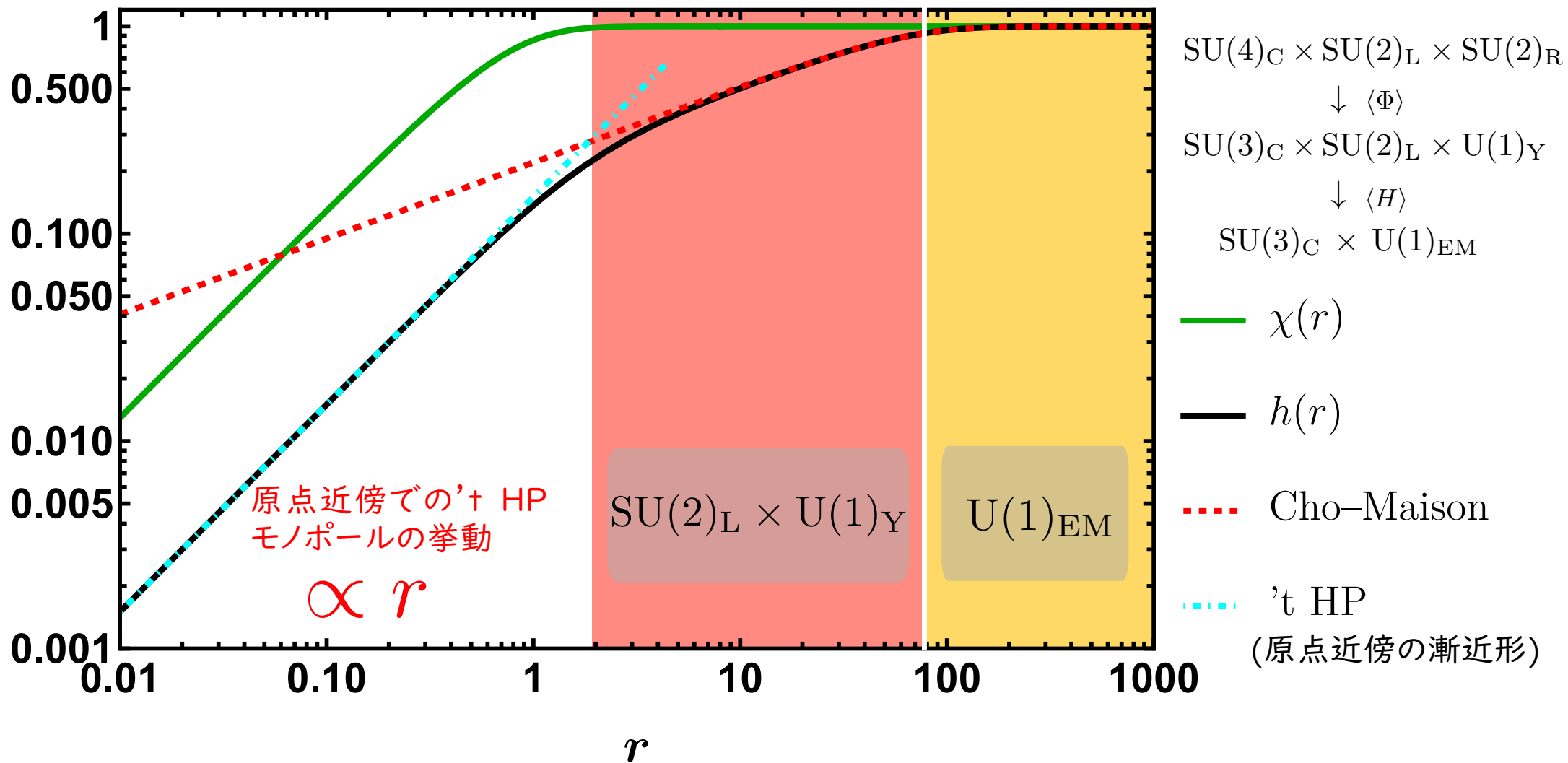


$h(r)$  の高エネルギー／低エネルギーでの挙動はどうなっているだろうか

# ● Pati-Salam 模型



# ● Pati-Salam 模型



## ● まとめ

Cho-Maison モノポール

標準模型の中に存在し得る  
空間原点でエネルギー発散

### ➤ Cho-Maison モノポールの一般化

$$SU(3) \times SO(3) \rightarrow SO(3)_{\text{diag}}$$

というより広いゲージ群において Cho-Maison like モノポールを構成した

### ➤ Cho-Maison モノポールの UV completion

Pati-Salam 模型

高エネルギーでは 't Hooft Polyakov モノポール

低エネルギーでは Cho-Maison モノポール

という具体的な模型において CMモノポールの高エネルギーでの記述を提示した



## ● SU(5)

$$U(\theta, \varphi) \sigma^3 U^\dagger(\theta, \varphi) = \hat{r}^a \cdot \sigma^a$$

$$U(\theta, \varphi) = \exp\left(-\frac{i\varphi}{2}\sigma^3\right) \exp\left(-\frac{i\theta}{2}\sigma^2\right) \exp\left(\frac{i\varphi}{2}\sigma^3\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -e^{-i\varphi} \sin(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

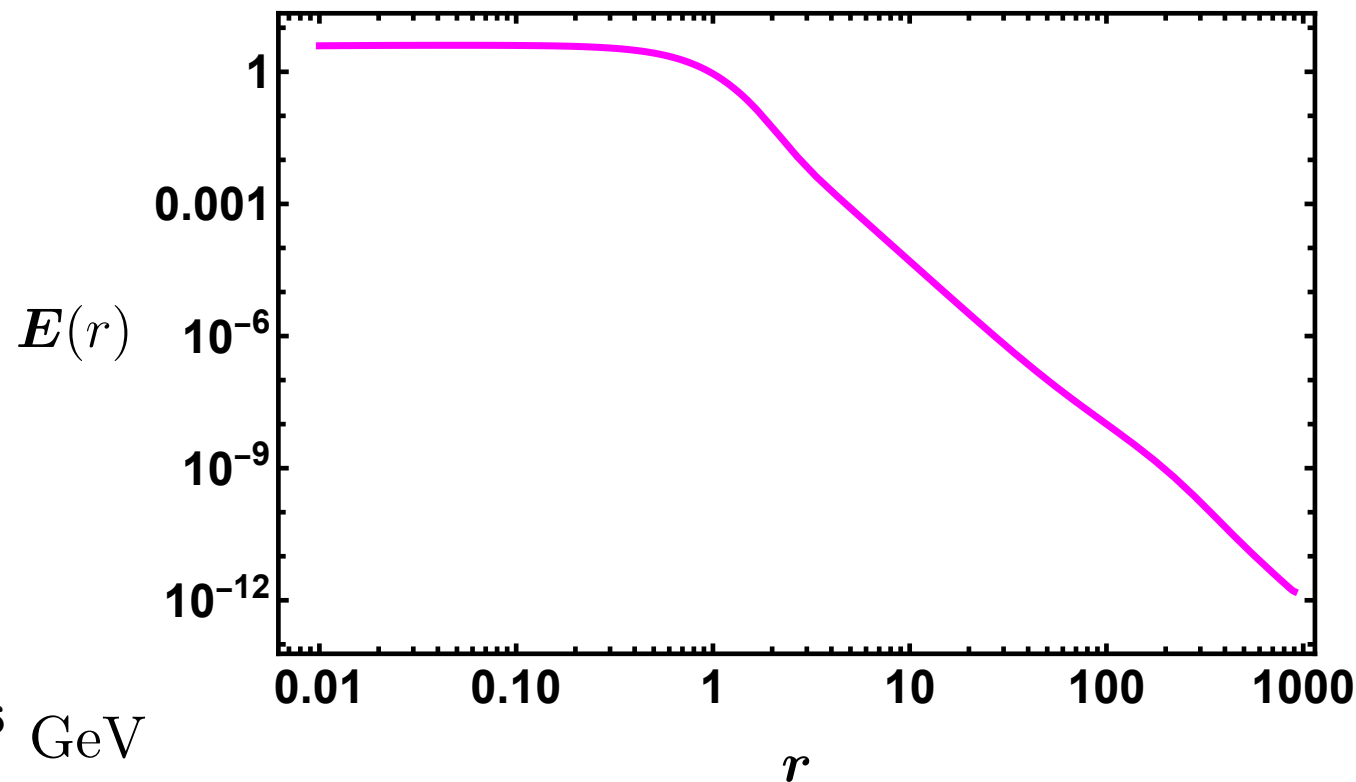
$$\langle \Phi \rangle = v_\Phi \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\langle \Phi \rangle \rightarrow U \langle \Phi \rangle U^\dagger$$

$$\langle H \rangle = \frac{v_H}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle H \rangle \rightarrow U \langle H \rangle$$

● エネルギーの有限性



$v_\Phi \sim 10^{16}$  GeV

モノポールのエネルギー  $E_M = \int d\Omega E(r) \sim 10^{17}$  GeV

モノポールのサイズ  $L_M \sim 10^{-31}$  cm

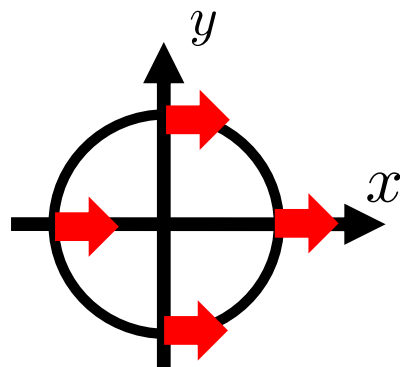
## 簡単な例 $S^1$ での説明

空間座標での無限遠で1周する間に場の配位は何回転するか(巻き付くか)

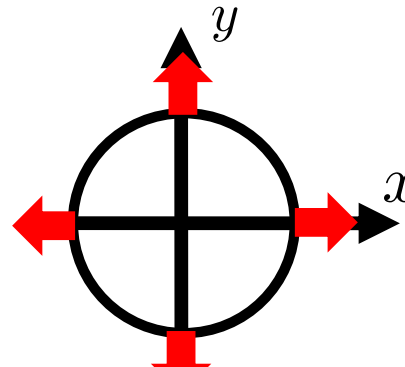
= 巻き付き数  $n$

巻き付き数の異なる配位同士は連続変形によって遷移できない

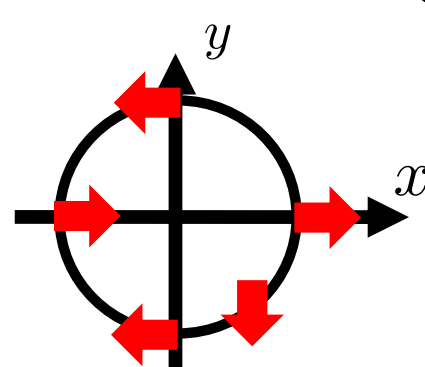
➡ **非自明な真空配位を取れる**



0回転  $n = 0$   
 $\langle \Phi \rangle = v$



1回転  $n = 1$   
 $\langle \Phi \rangle = ve^{i\theta}$



2回転  $n = 2$   
 $\langle \Phi \rangle = ve^{i2\theta}$

# 磁気モノポール (磁気単極子) とは？

存在していると嬉しい

電気と磁気の変換性

素粒子の標準模型で説明できていない

未解決問題

暗黒物質、バリオン数生成 など

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}_m$$

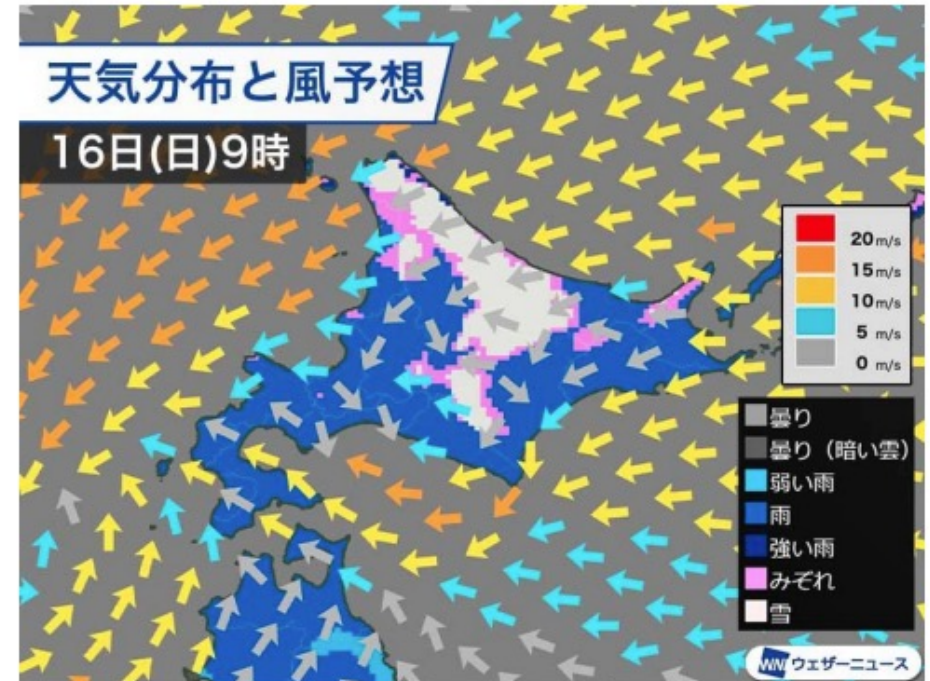
$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{j}_e$$

$$\mathbf{F} = q_e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + q_m (\mathbf{B} - \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{E}}{c^2})$$

## スカラー関数 (スカラー場)



## ベクトル関数 (ベクトル場)



- 数式で言うと

$$\phi(x, y, z) \equiv \phi(x)$$

$$\vec{A}(x, y, z) \equiv \vec{A}(x)$$

引用元: Yu Hamada さんのスライド

't Hooft-Polyakov モノポール

ソリトンの一つ

ソリトンとは？

非線形な場の方程式の非自明な解

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x, t) + m^2 \phi(x, t) = \mathcal{O}(\phi^2)$$

さっきはこの部分(非線形項)を無視してたが、ここが重要になって安定な励起が存在することがある

¥phi=0 は自明な解

矢印の絵で説明

## 高エネルギー領域と低エネルギー領域でのスカラー場の振る舞い

't Hooft-Polyakov モノポール

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\chi}{dr} = 2 \frac{f^2\chi}{r^2} + \lambda(\chi^2 - 1)\chi$$



原点近傍での振る舞い

$$\chi(r) \sim a_1 r + \dots$$

$$\frac{d^2f}{dr^2} = \frac{f(f^2 - 1)}{r^2} + \chi^2 f$$

$U(1)_Y$  の寄与が効いている

無限遠近傍

$$\rho(r) \sim 1 - \frac{a_2}{r} \exp(-\kappa r) + \dots$$

Cho-Maison モノポール

$$\frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{2} \frac{f^2\rho}{r^2} + \lambda(\rho^2 - 1)\rho$$



原点近傍

$$\frac{d^2f}{dr^2} = \frac{f(f^2 - 1)}{r^2} + \rho^2 f$$

$$\rho(r) \sim a_1 r^\delta + \dots \quad \delta = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

# 't Hooft-Polyakov モノポール $SU(2) \rightarrow U(1)$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{a\mu\nu}F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2}(D^\mu\Phi)^a(D_\mu\Phi)^a - V(\Phi) \quad V(\Phi) = \frac{\lambda}{8}(\Phi^a\Phi^a - v^2)^2$$

随伴表現  $\Phi = \Phi^a \frac{\sigma^a}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Phi^3 & \Phi^1 - i\Phi^2 \\ \Phi^1 + i\Phi^2 & -\Phi^3 \end{pmatrix}$  基本表現だとVEVを不変にする生成子が残らない

## Hedgehog 配位

$$\Phi^a(x) = v_\Phi \chi(r) \frac{x^a}{r}, \quad A_0^a = 0, \quad A_i^a = \frac{1}{e}(-f(r) + 1)\varepsilon_{aij} \frac{x^j}{r^2}$$

空間と場の回転が互いに相殺して球対称な配位

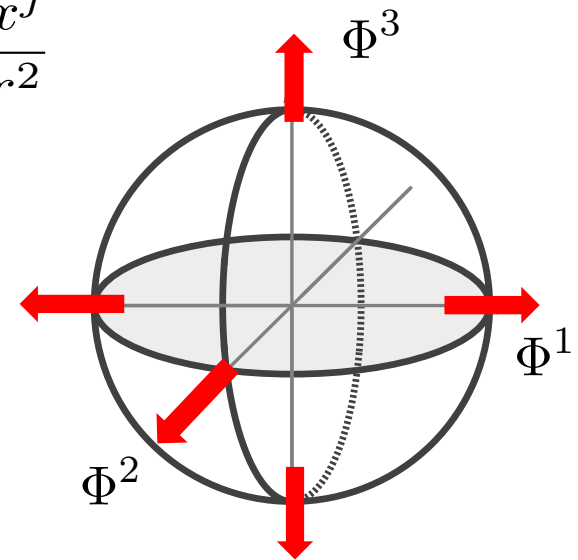
$$\vec{K} = \vec{J} + \vec{I} = \vec{x} \times \frac{1}{i}\nabla + \frac{\vec{\sigma}}{2} \quad [\vec{K}, \Phi(x)] = 0$$

$$[L_i, A_j^a] = i\varepsilon_{imn}x_m\partial_n A_j^a,$$

$$[S_i, A_j^a] = -i\varepsilon_{ijk}A_k^a,$$

$$[I_i, A_j^a] = -i\varepsilon_{iab}A_j^b,$$

$$K_i = L_i + S_i + I_i \quad [K_i, A_j^a] = 0$$

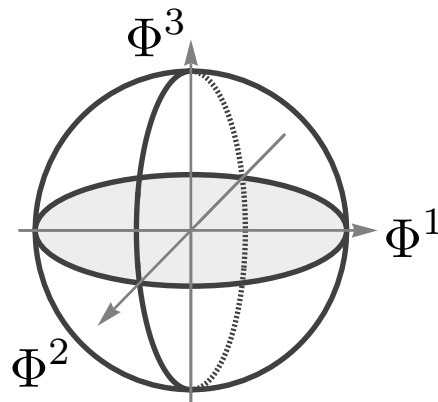


# 真空の配位

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi} = 0 \Rightarrow (\Phi^1)^2 + (\Phi^2)^2 + (\Phi^3)^2 = \frac{v^2}{2}$$

$$\langle \Phi \rangle : S^2_\infty \rightarrow S^2_{\text{vacuum}}$$

$$\Pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$$



磁荷  $q_M = \int_{S^2} d\vec{S} \cdot \vec{B} = \frac{4\pi n}{e} \quad n \in \mathbb{Z}$

この非自明なホモトピーは安定性を保証する

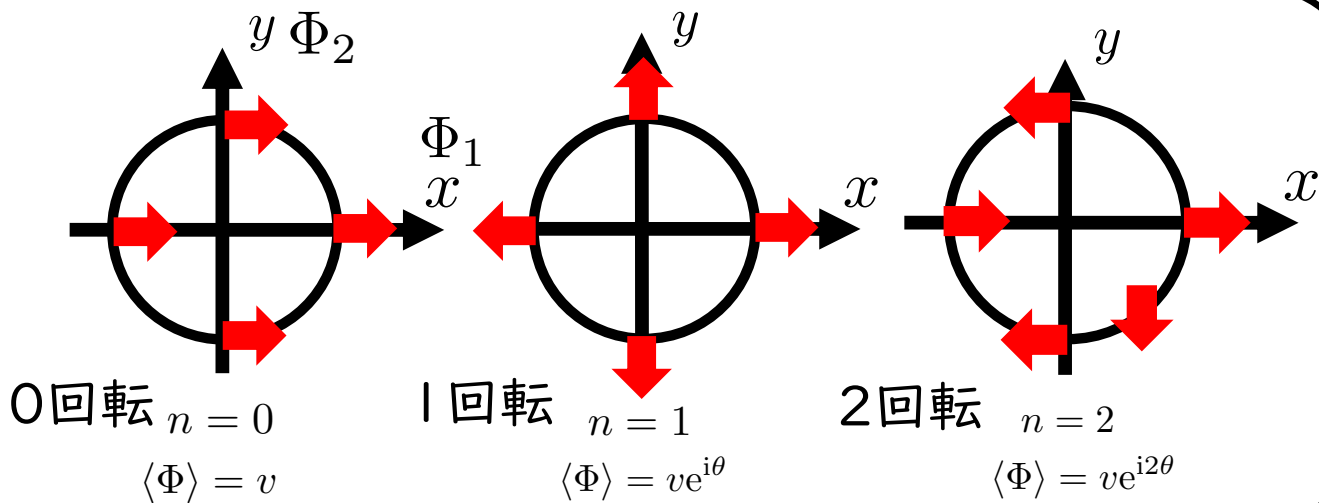
## 簡単な例 $S^1$ での説明

空間無限遠で1周する間に  
場の配位は何回転するか (巻き付くか)

= 巻き付き数  $n$

巻き付き数の異なる配位同士は連続  
変形によって遷移できない

➡ 非自明な真空配位を取れる



$\Pi_2(\mathcal{M}_{\text{vac}}) \neq \{e\} \implies$  't Hooft-Polyakov モノポールは存在する

$\Pi_2(\mathcal{M}_{\text{vac}}) = \{e\} \stackrel{?}{\implies}$  モノポールは存在しない

$$\Pi_2 \left( \frac{\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y}{\text{U}(1)_{\text{EM}}} \right) = \{e\}$$

't Hooft-Polyakov モノポール  
は存在しないは正しい

標準模型の中に他のモノポール  
存在しない？

 Cho-Maison モノポールは存在する

[3] Y. M. Cho & D. Maison (1996).

高エネルギー領域と低エネルギー領域でのスカラー場の振る舞い

‘t Hooft-Polyakov モノポール

原点近傍での振る舞い



$$\chi(r) \sim a_1 r + \dots$$

$$\frac{d^2 \chi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\chi}{dr} = 2 \frac{f^2 \chi}{r^2} + \lambda (\chi^2 - 1) \chi$$

$$\frac{d^2 f}{dr^2} = \frac{f(f^2 - 1)}{r^2} + \chi^2 f$$

