

情報論的・代数的くりこみ群

Informational and algebraic renormalization group

森崇人 (立教大学/理研)

長澤輝明さん（金沢大）との共著

arXiv: 2609.30362 に基づく



東京女子大学物理学セミナー, 2026年10月1日

第1部

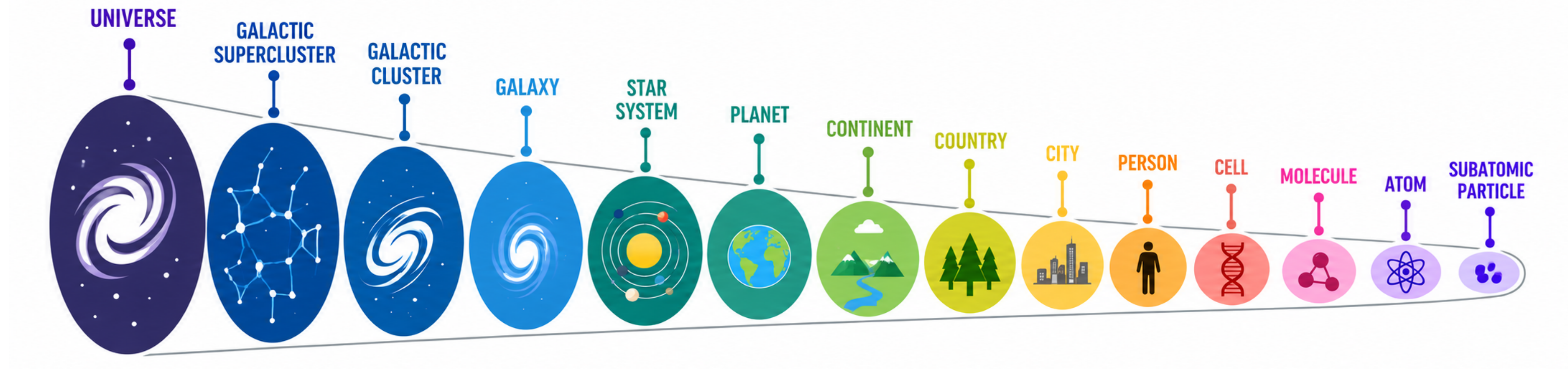
繰り込み・情報・リソース理論

物理とは何か？

- 物の理（ことわり）を探究すること
- 特に素粒子や万物の理論 (Theory of Everything) では、世界の最小要素、物質や力を全て統一する根源的理論を目指す

物理とは何か？

- そのためには、
巨視的（マクロ）のある程度観測できること（例：電磁場、流体）から、
微視的（ミクロ）の理論（例：素粒子、弦理論）を構成したい
- では、マクロの理論とミクロの理論はどう関係しているのか？



くりこみ

- ミクロとマクロはくりこみ操作で関係づく
- ミクロから細かすぎる情報を捨て、マクロで重要な情報だけ取り出していく
(≡ 情報圧縮)

くりこみ

- ミクロとマクロはくりこみ操作で関係づく
- ミクロから細かすぎる情報を捨て、マクロで重要な情報だけ取り出していく
(≡ 情報圧縮)

0 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1

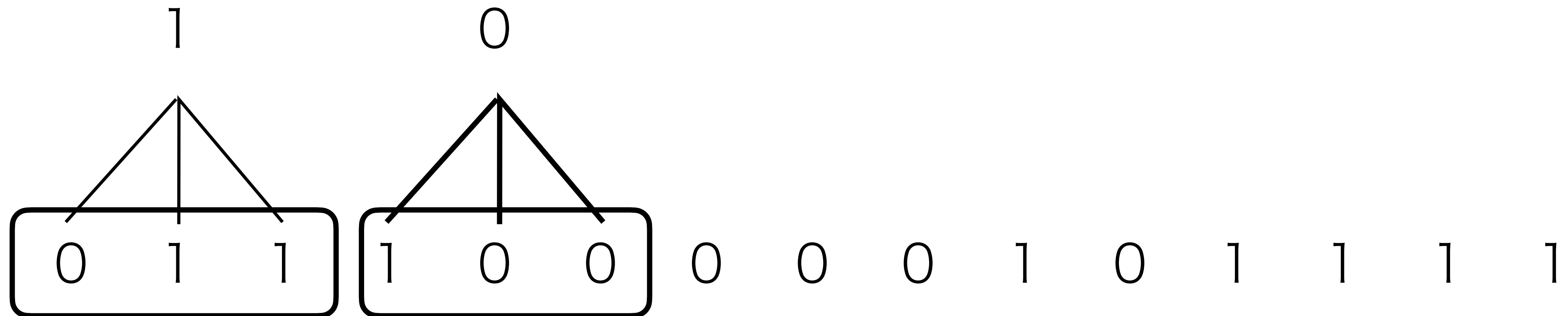
くりこみ

- ミクロとマクロはくりこみ操作で関係づく
- ミクロから細かすぎる情報を捨て、マクロで重要な情報だけ取り出していく
(≡ 情報圧縮)



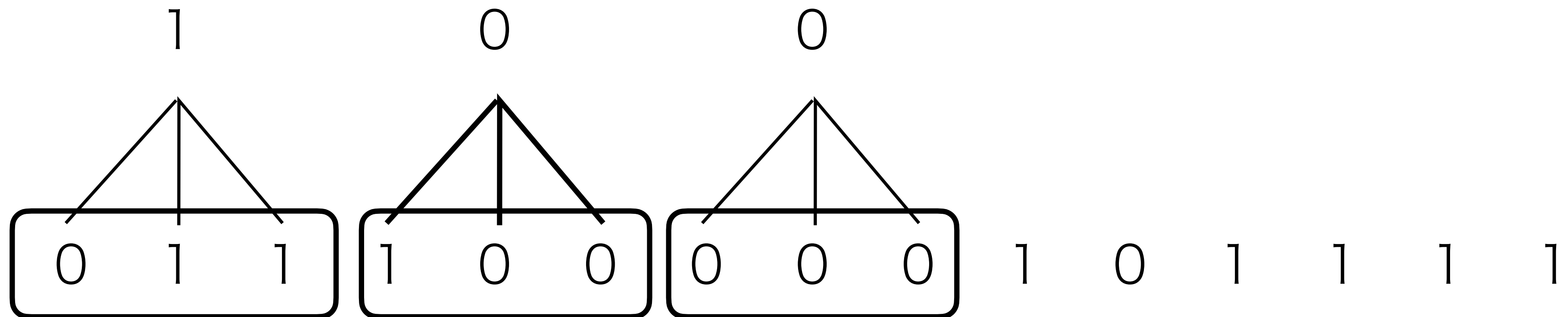
くりこみ

- ミクロとマクロはくりこみ操作で関係づく
- ミクロから細かすぎる情報を捨て、マクロで重要な情報だけ取り出していく
(≡ 情報圧縮)



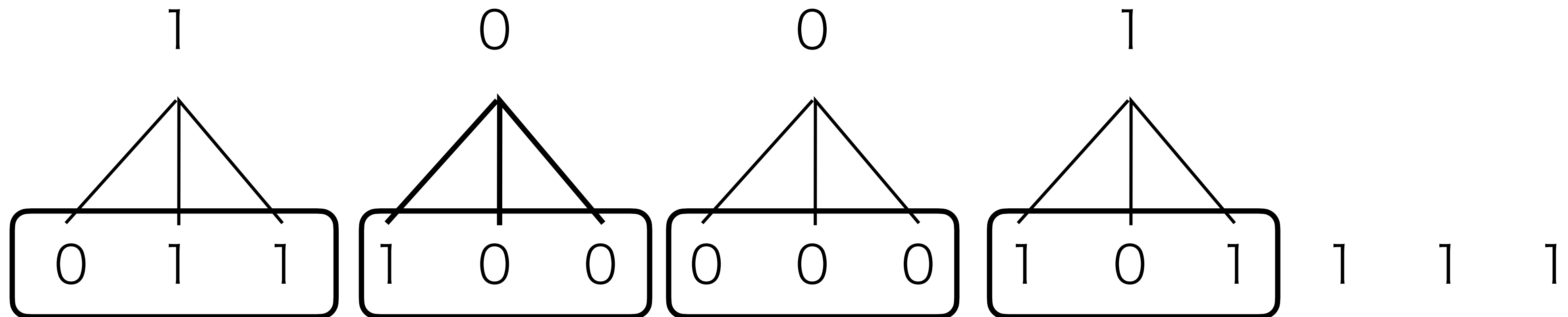
くりこみ

- ミクロとマクロはくりこみ操作で関係づく
- ミクロから細かすぎる情報を捨て、マクロで重要な情報だけ取り出していく
(≡ 情報圧縮)



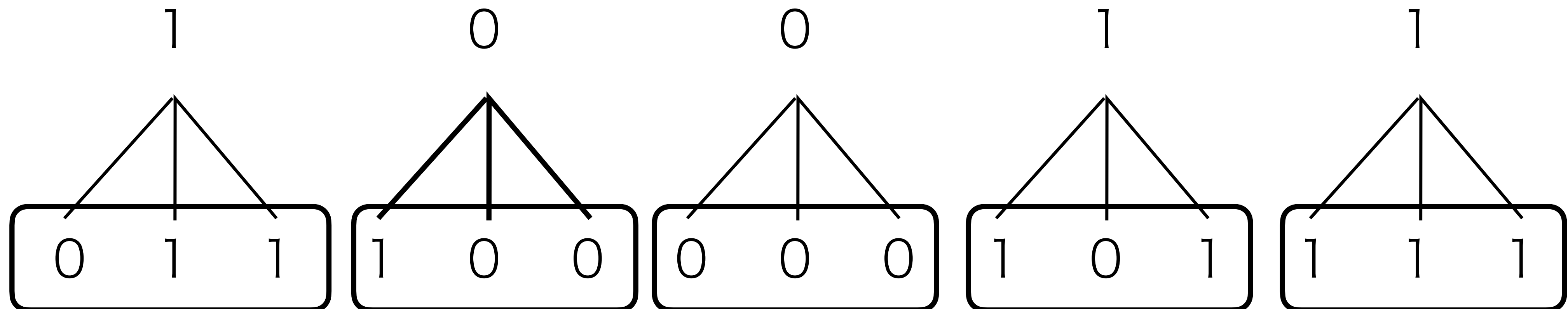
くりこみ

- ミクロとマクロはくりこみ操作で関係づく
- ミクロから細かすぎる情報を捨て、マクロで重要な情報だけ取り出していく
(≡ 情報圧縮)



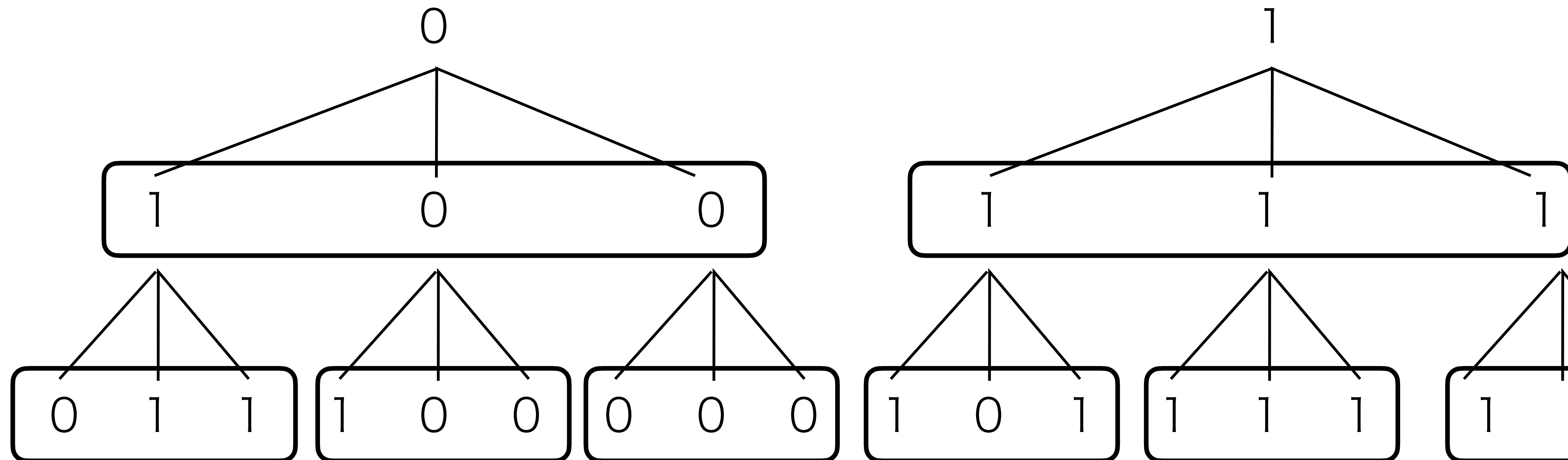
くりこみ

- ミクロとマクロはくりこみ操作で関係づく
- ミクロから細かすぎる情報を捨て、マクロで重要な情報だけ取り出していく
(≡ 情報圧縮)



くりこみ

- ミクロとマクロはくりこみ操作で関係づく
- ミクロから細かすぎる情報を捨て、マクロで重要な情報だけ取り出していく
(≡ 情報圧縮)



くりこみ

- ミクロとマクロはくりこみ操作で関係づく
- ミクロから細かすぎる情報を捨て、マクロで重要な情報だけ取り出していく
(≡ 情報圧縮)

0

1

ほとんど0

ほとんど1

0	1	1	1	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---

1	0	1	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

くりこみ

- ミクロとマクロはくりこみ操作で関係づく
- ミクロから細かすぎる情報を捨て、マクロで重要な情報だけ取り出していく
(≡ 情報圧縮)

0

1

ほとんど0

何を捨て、何を残すのか
= 「自由度」

ほとんど1

0	1	1	1	0	0	0	0	0
---	---	---	---	---	---	---	---	---

1	0	1	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---

くりこみ

- ミクロとマクロはくりこみ操作で関係づく
- ミクロから細かすぎる情報を捨て、マクロで重要な情報だけ取り出していく
(≡ 情報圧縮)
- 見ているスケールごとに実質的に支配する状態・理論が異なっていく
➡ 状態や理論の「流れ」を生み出す

くりこみ

- ミクロとマクロはくりこみ操作で関係づく
 - ミクロから細かすぎる情報を捨て、マクロで重要な情報だけ取り出していく
(≡ 情報圧縮)
 - 見ているスケールごとに実質的に支配する状態・理論が異なっていく
 - ➡ 状態や理論の「流れ」を生み出す
- 理論＝パラメーターで決まる物理法則
(例：ボールの運動のパラメータ＝重さ)

くりこみ

- ミクロとマクロはくりこみ操作で関係づく
- ミクロから細かすぎる情報を捨て、マクロで重要な情報だけ取り出していく
(≡ 情報圧縮)
- 見ているスケールごとに実質的に支配する状態・理論が異なっていく
➡ 状態や理論の「流れ」を生み出す
理論＝パラメーターで決まる物理法則
(例：ボールの運動のパラメータ＝重さ)
- 異なる理論でも同じ有効理論（マクロの理論）：「大体同じ」

普遍性 (universality)

くりこみ

- 見ているスケールごとに実質的に支配する状態・理論が異なっていく
➡ 状態や理論の「流れ」を生み出す
- 異なる理論でも同じ有効理論（マクロの理論）：「大体同じ」

色 形 味
赤 丸い 甘い



色 形 味
赤 細長い 辛い



くりこみ

- 見ているスケールごとに実質的に支配する状態・理論が異なっていく
➡ 状態や理論の「流れ」を生み出す
- 異なる理論でも同じ有効理論（マクロの理論）：「大体同じ」

色	形	味
赤	丸い	なし



色	形	味
赤	細長い	なし



くりこみ

- 見ているスケールごとに実質的に支配する状態・理論が異なっていく
➡ 状態や理論の「流れ」を生み出す
- 異なる理論でも同じ有効理論（マクロの理論）：「大体同じ」

色	形	味
赤	点	なし



色	形	味
赤	点	なし



くりこみ

- 見ているスケールごとに実質的に支配する状態・理論が異なっていく
➡ 状態や理論の「流れ」を生み出す
- 異なる理論でも同じ有効理論（マクロの理論）：「大体同じ」

普遍性 (universality)

色 形 味
赤 点 なし



=

色 形 味
赤 点 なし



くりこみ

- 見ているスケールごとに実質的に支配する状態・理論が異なっていく
➡ 状態や理論の「流れ」を生み出す
- 異なる理論でも同じ有効理論（マクロの理論）：「大体同じ」

色 形 味
赤 丸い 甘い



色 形 味
黄 細長い 甘い



くりこみ

- 見ているスケールごとに実質的に支配する状態・理論が異なっていく
➡ 状態や理論の「流れ」を生み出す
- 異なる理論でも同じ有効理論（マクロの理論）：「大体同じ」

色	形	味
赤	丸い	なし



色	形	味
黄	細長い	なし



くりこみ

- 見ているスケールごとに実質的に支配する状態・理論が異なっていく
➡ 状態や理論の「流れ」を生み出す
- 異なる理論でも同じ有効理論（マクロの理論）：「大体同じ」

色
赤

形
点

味
なし

異なる普遍性クラス

≠

色
黄

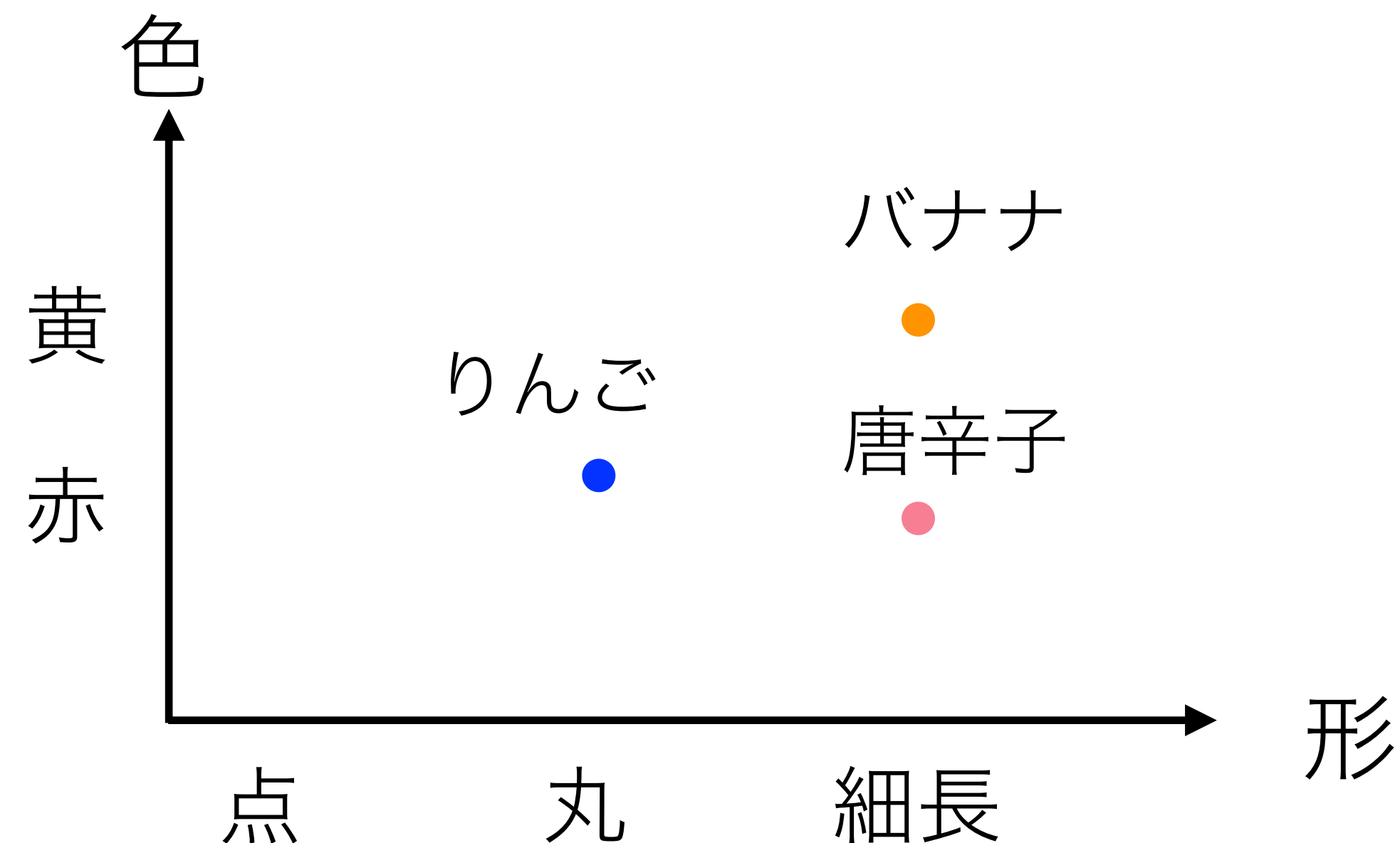
形
点

味
なし



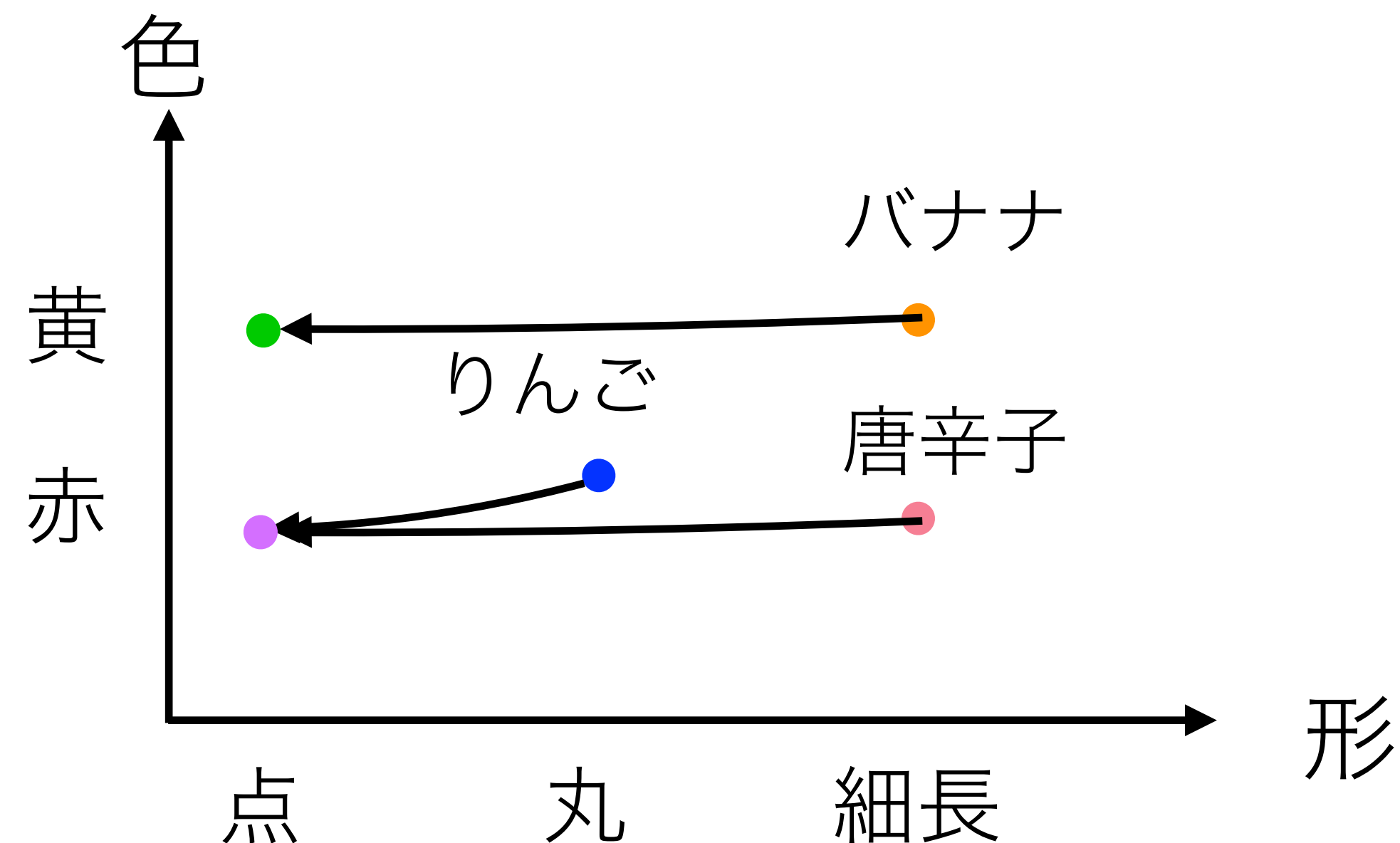
くりこみ

- 見ているスケールごとに実質的に支配する状態・理論が異なっていく
➡ 状態や理論の「流れ」を生み出す
- 異なる理論でも同じ有効理論（マクロの理論）：「大体同じ」
- 状態・理論空間でのパラメータの流れ＝くりこみ変換



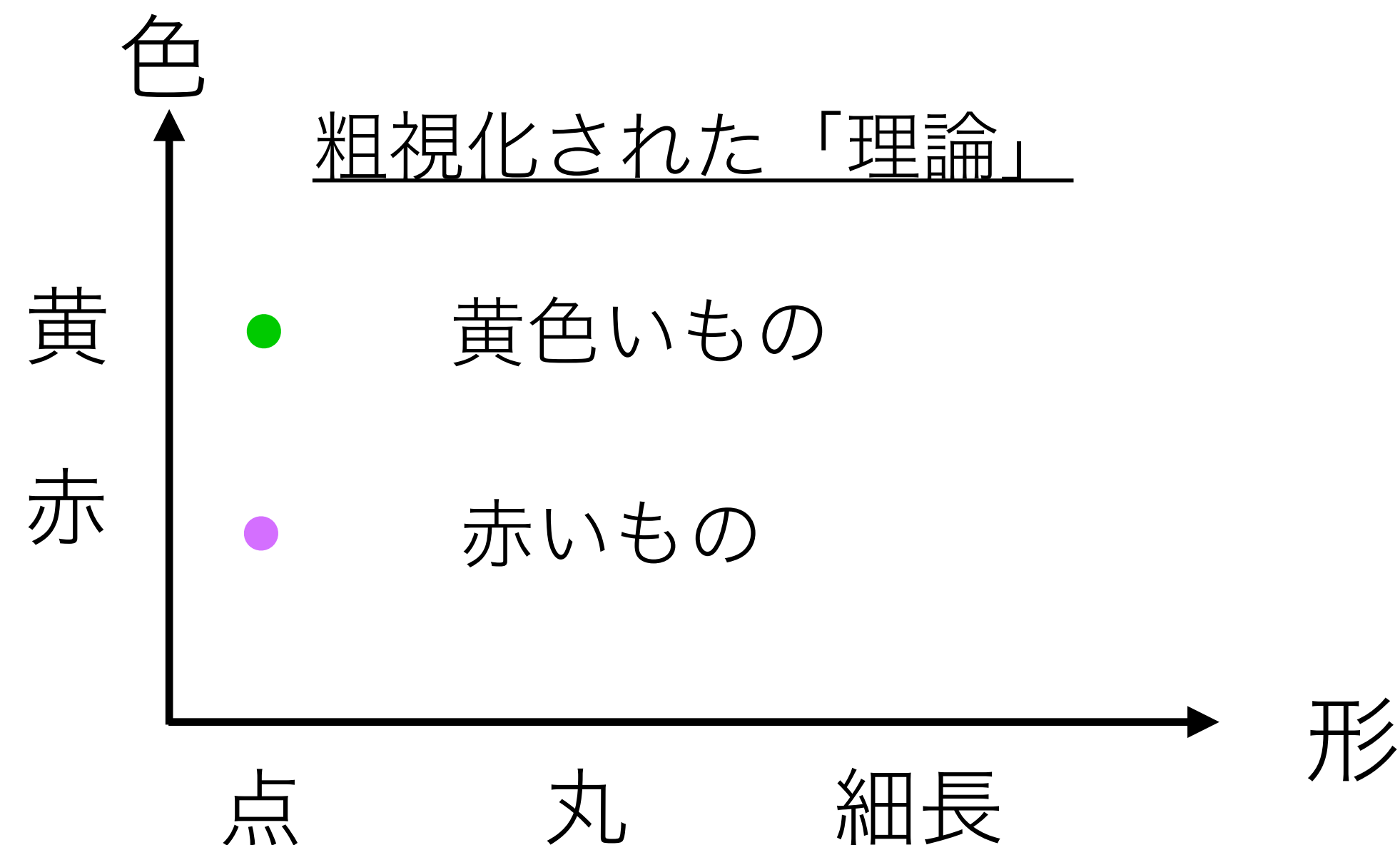
くりこみ

- 見ているスケールごとに実質的に支配する状態・理論が異なっていく
➡ 状態や理論の「流れ」を生み出す
- 異なる理論でも同じ有効理論（マクロの理論）：「大体同じ」
- 状態・理論空間でのパラメータの流れ＝くりこみ変換



くりこみ

- 見ているスケールごとに実質的に支配する状態・理論が異なっていく
➡ 状態や理論の「流れ」を生み出す
- 異なる理論でも同じ有効理論（マクロの理論）：「大体同じ」
- 状態・理論空間でのパラメータの流れ＝くりこみ変換

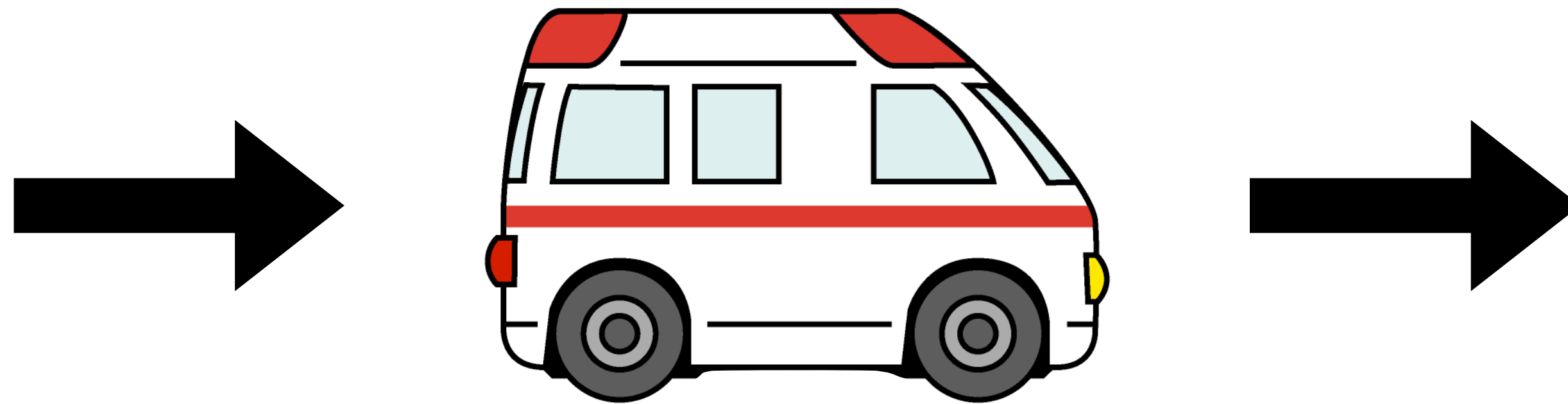


情報

情報とは何か

ものがあるかどうか、物理現象の認識は主観的

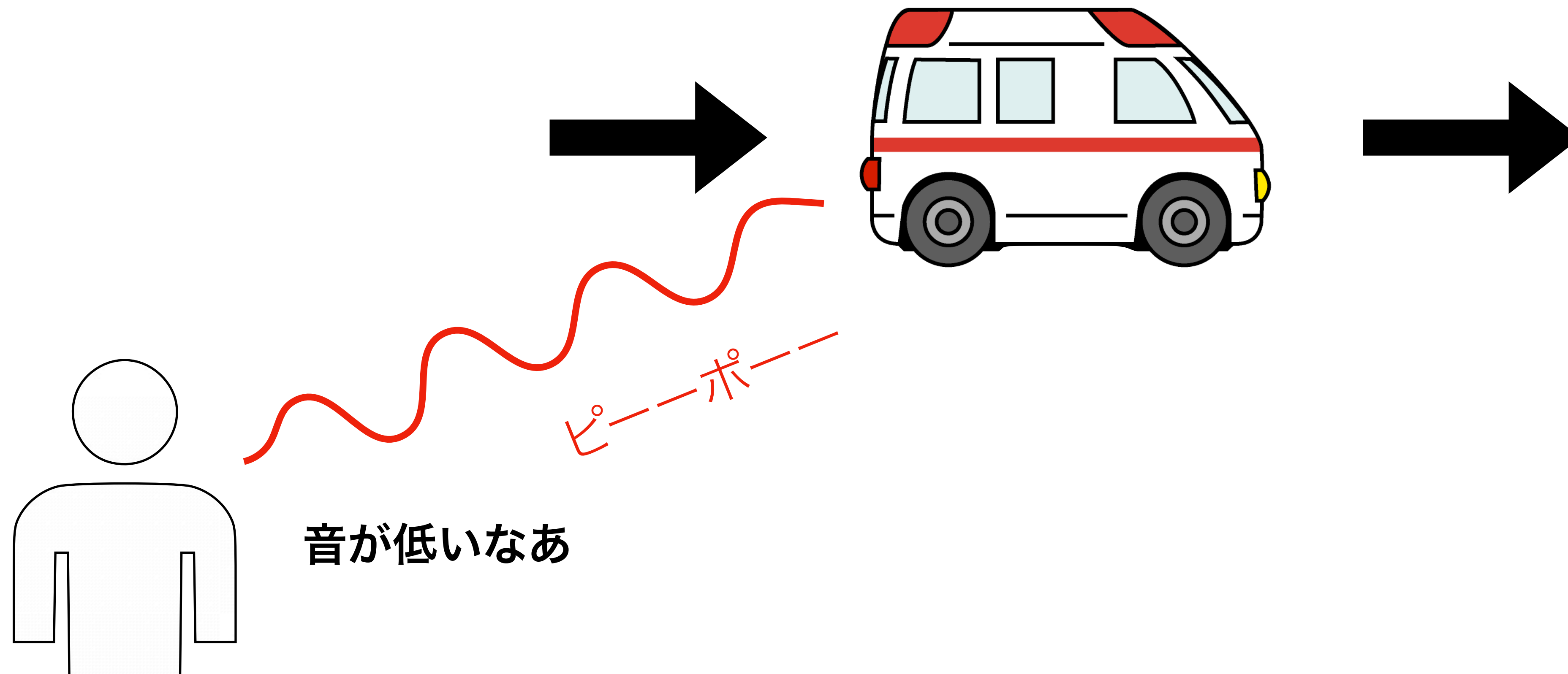
例：ドップラー効果



情報とは何か

ものがあるかどうか、物理現象の認識は主観的

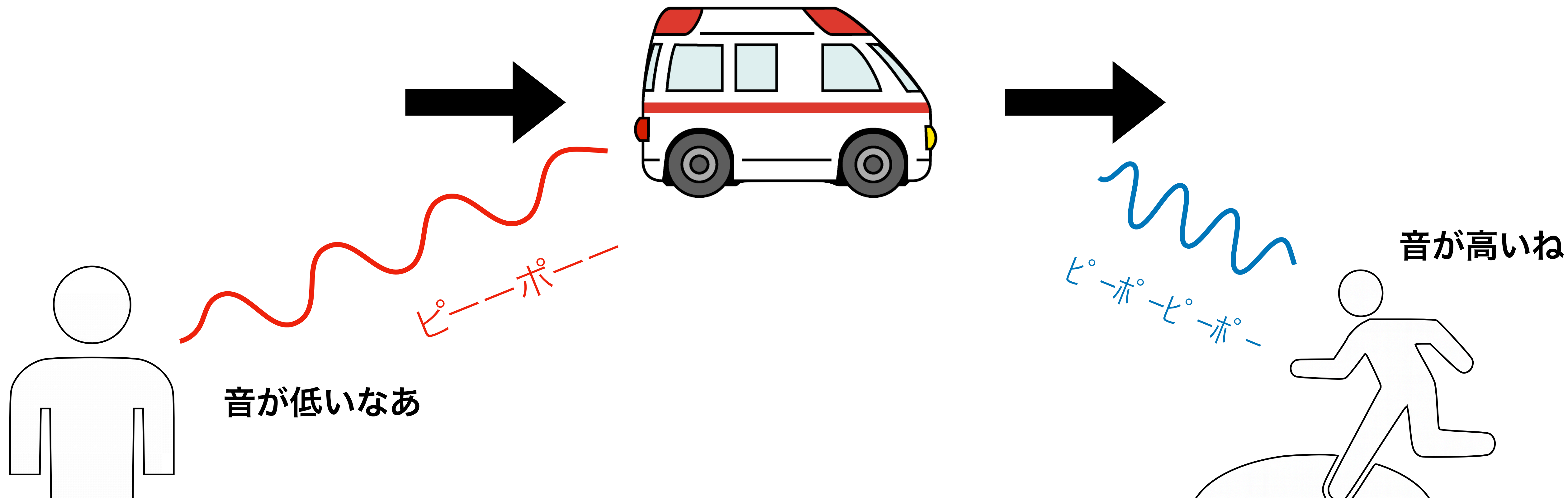
例：ドップラー効果



情報とは何か

ものがあるかどうか、物理現象の認識は主観的

例：ドップラー効果



情報とは何か

よくあるのは古典情報

りんごがあるかないか 0 か 1 か

打ち上げ花火、下から見るか？横から見るか？

点数が 1 ～ 10 点のうちどれか

サイコロ 1 ～ 6 のうちどれが出てくるか

量子力学の世界ではそれ自体も揺らぎうる → 量子情報

私の研究

<https://arxiv.org/abs/2609.30362>

- 量子的な状態に対するくりこみ操作の定式化
- 特に一つの定式化である、ウィルソンのくりこみ群を拡張した
くりこみ = 粗視化 + リスケール（再拡大）
- どれだけの情報を捨てているか？どれだけ自由度が残っているか？
= 情報論的には「リソース（資源）」として扱える

私の研究

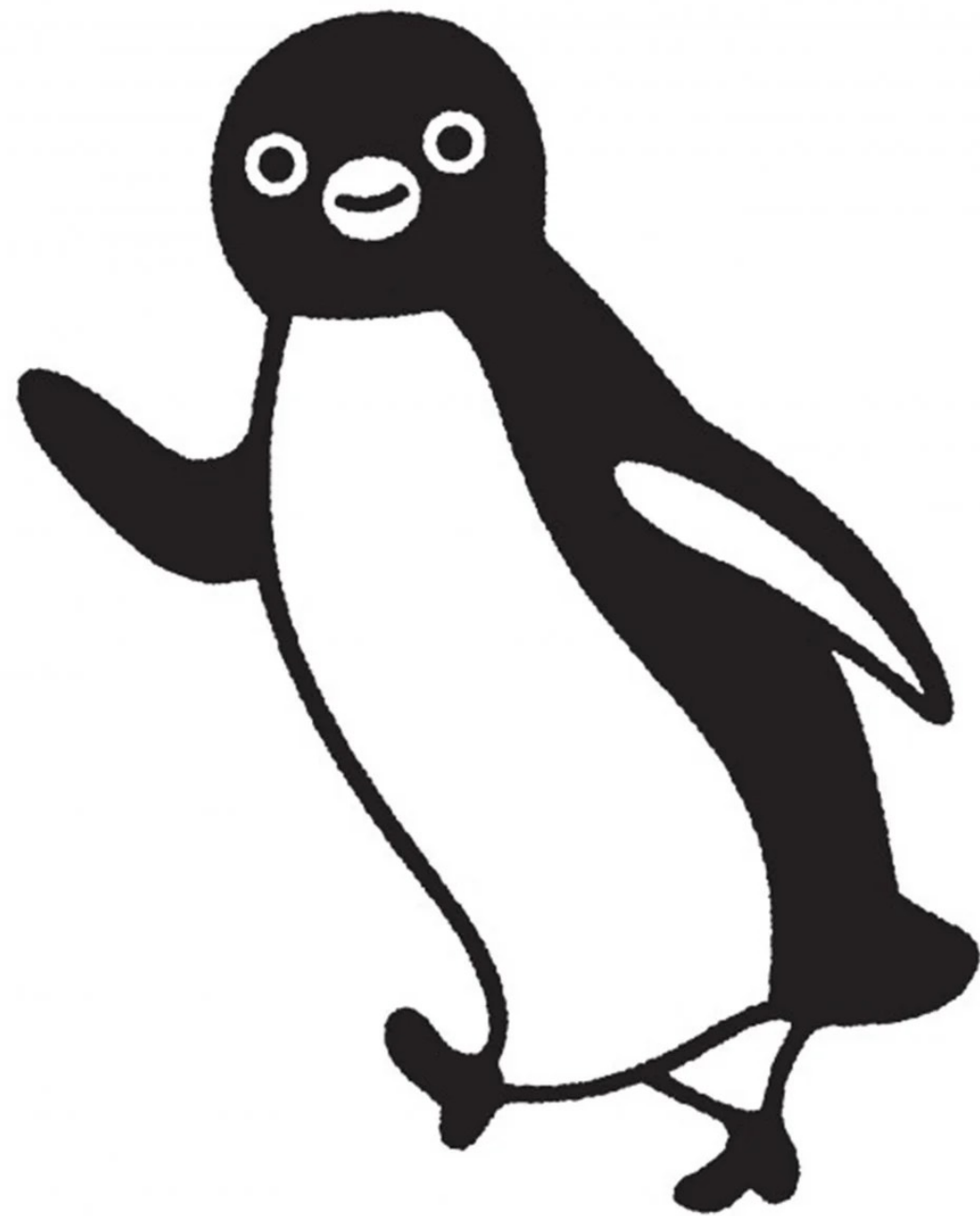
<https://arxiv.org/abs/2609.30362>

- くりこみ = 粗視化 + リスケール（再拡大）

私の研究

<https://arxiv.org/abs/2609.30362>

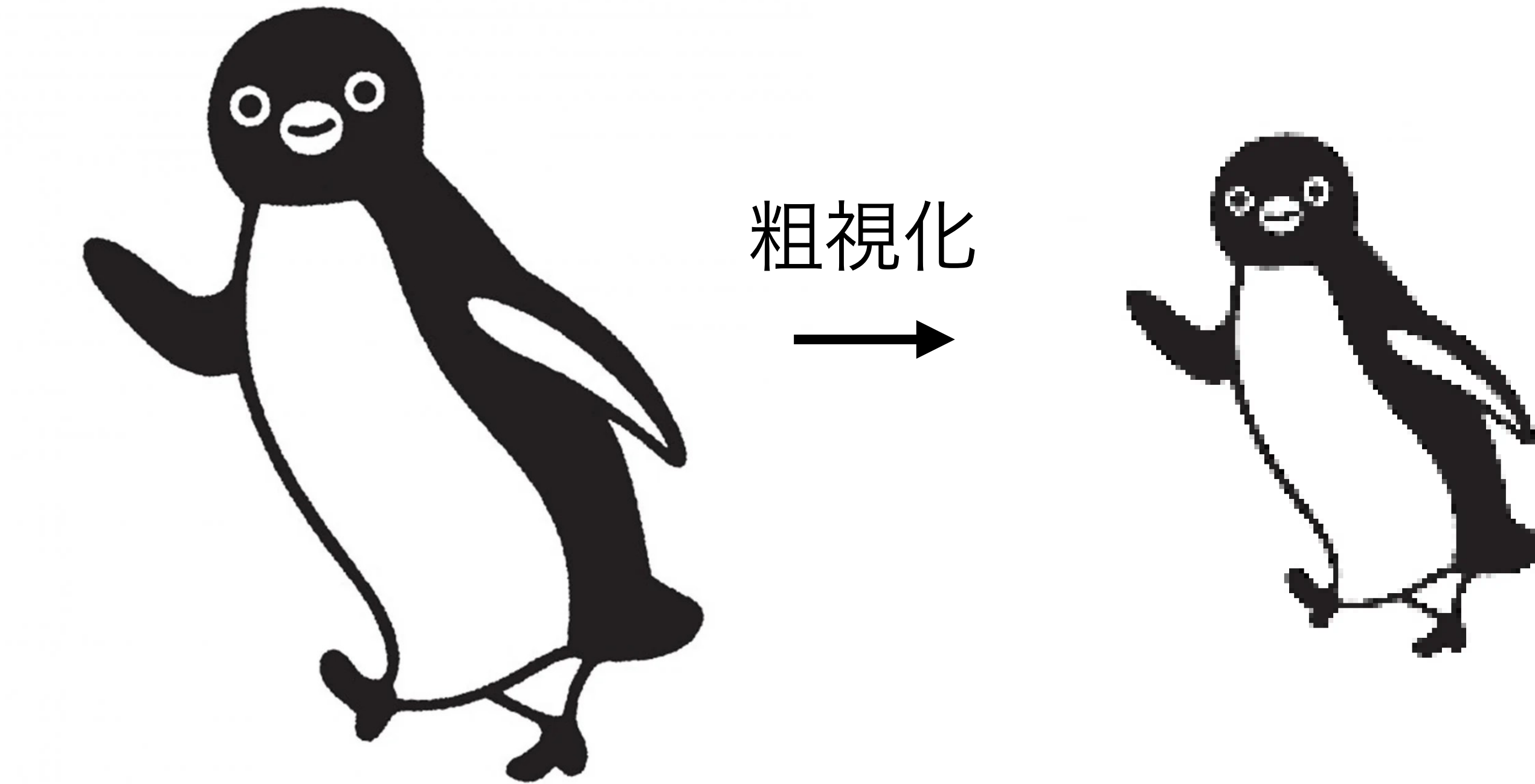
- くりこみ = 粗視化 + リスケール（再拡大）



私の研究

<https://arxiv.org/abs/2609.30362>

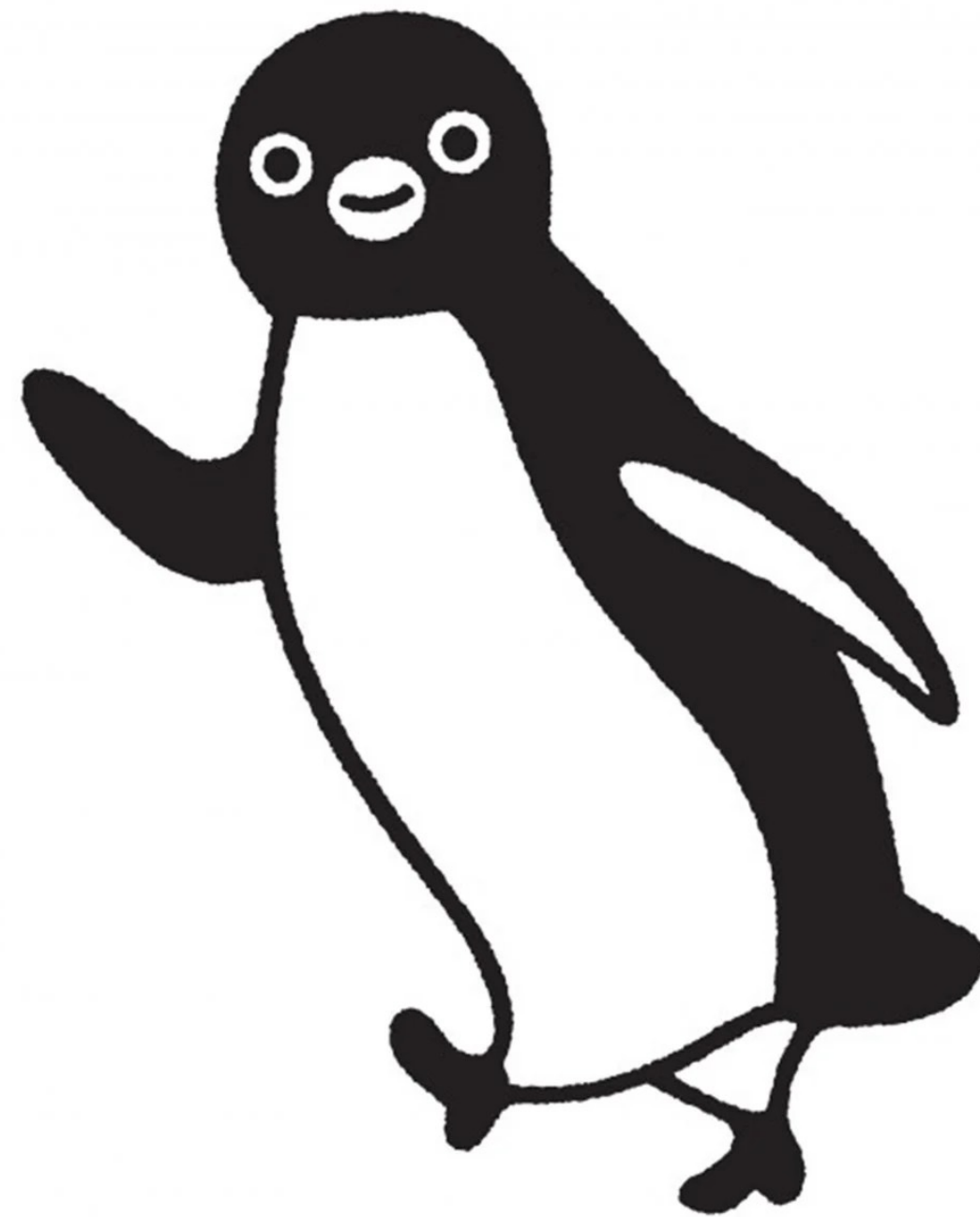
- くりこみ = 粗視化 + リスケール（再拡大）



私の研究

<https://arxiv.org/abs/2609.30362>

- くりこみ = 粗視化 + リスケール（再拡大）



粗視化

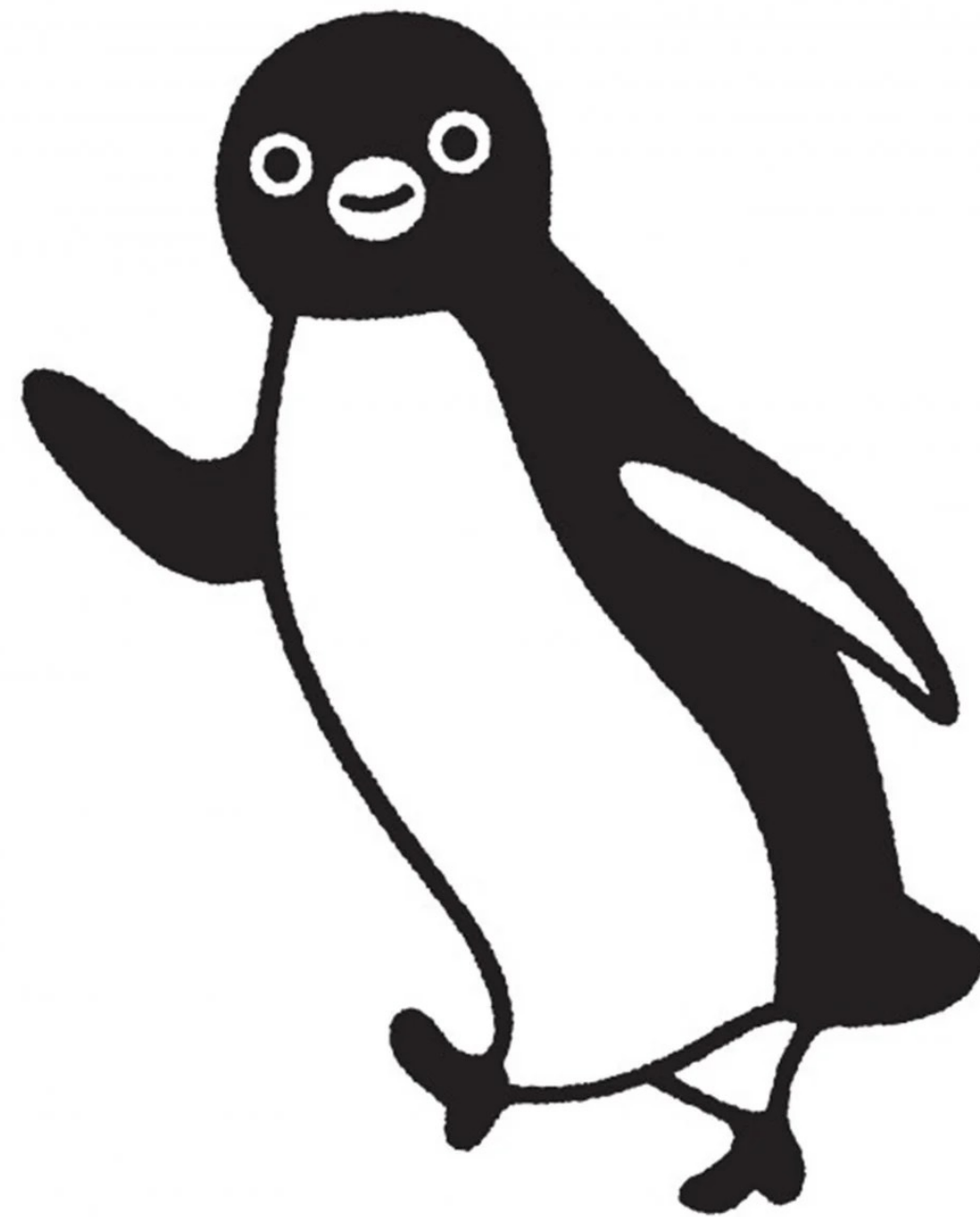


画素数が落ちている

私の研究

<https://arxiv.org/abs/2609.30362>

- くりこみ = 粗視化 + リスケール（再拡大）



粗視化



画素数が落ちている

リスケール

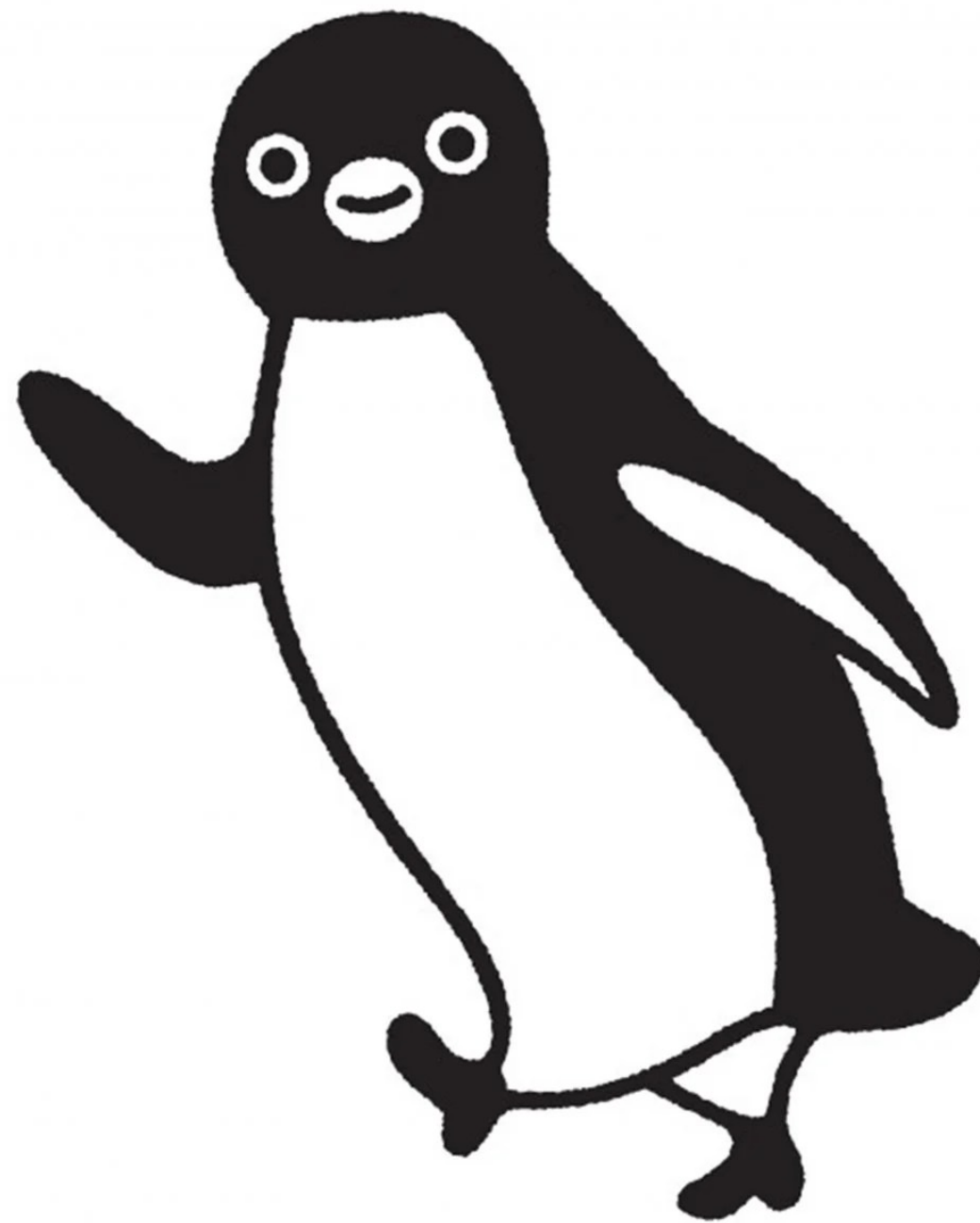


元のサイズに戻す

私の研究

<https://arxiv.org/abs/2609.30362>

- くりこみ = 粗視化 + リスケール（再拡大）



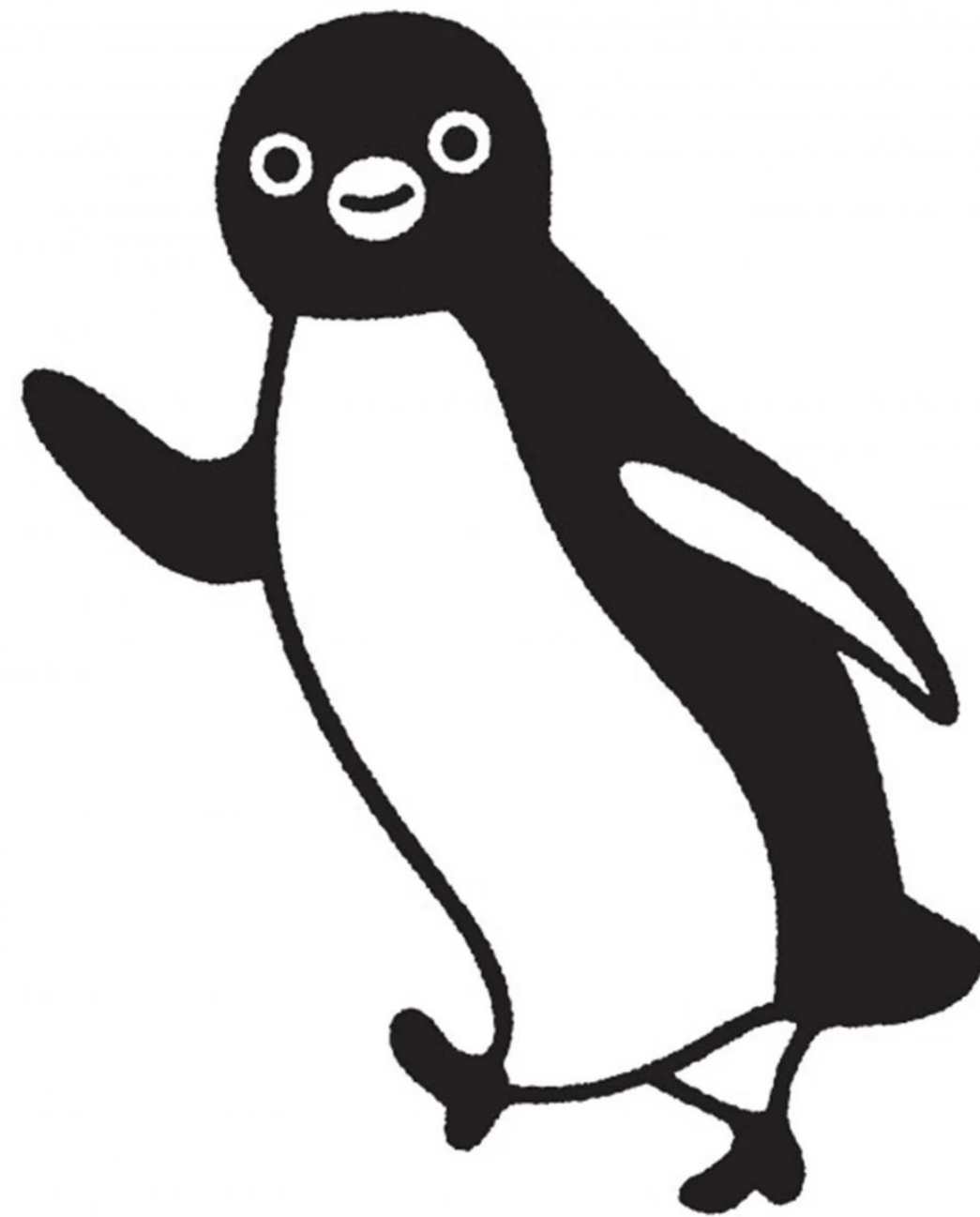
くりこまれたペンギン



私の研究

<https://arxiv.org/abs/2609.30362>

- くりこみ = 粗視化 + リスケール（再拡大）



くりこまれたペンギン



これを量子状態に対する操作（チャンネル）として &
エネルギーについてのくりこみを代数（計算ルール）として体系化した

くりこみとは何をしているのか

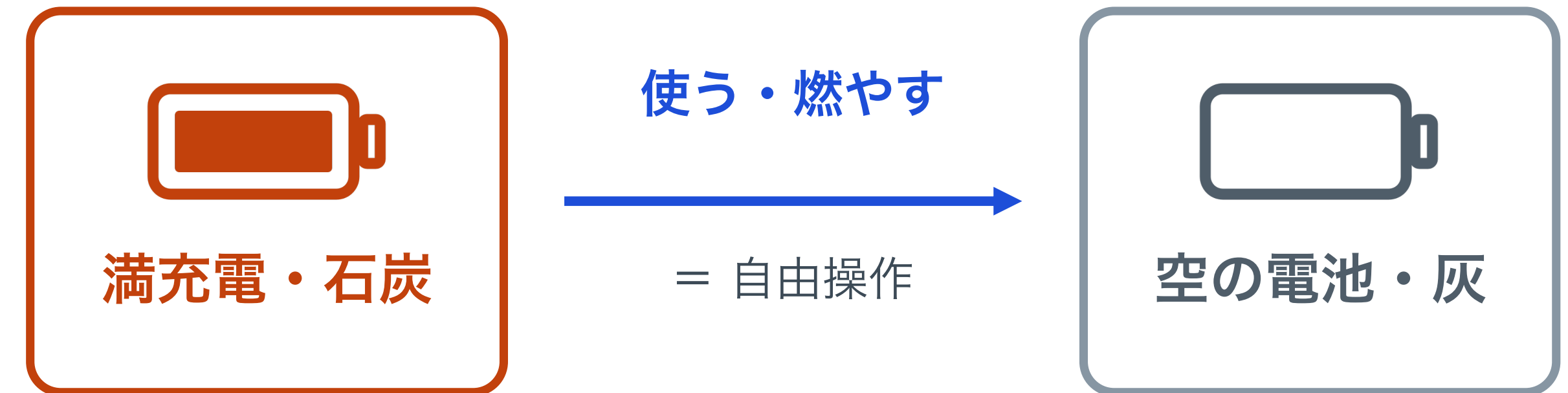
情報の観点から見直す

- どれだけ情報を捨てているか？ どれだけ自由度が残っているか？
＝情報論的には「**リソース（資源）**」
として扱える
- リソース理論では、資源を使う操作や制限を体系化する

くりこみとは何をしているのか

情報の観点から見直す

- どれだけ情報を捨てているか？ どれだけ自由度が残っているか？
＝情報論的には「リソース（資源）」として扱える
- リソース理論では、資源を使う操作や制限を体系化する

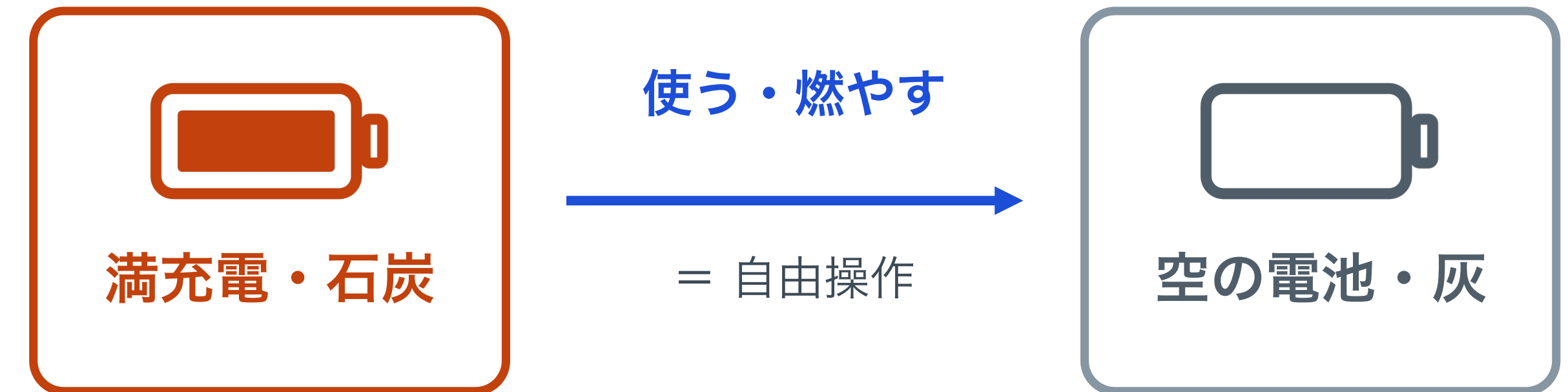


資源を消費して仕事や熱を取り出せる

くりこみとは何をしているのか

情報の観点から見直す

- どれだけ情報を捨てているか？ どれだけ自由度が残っているか？
＝情報論的には「リソース（資源）」として扱える
- リソース理論では、資源を使う操作や制限を体系化する



資源を消費して仕事や熱を取り出せる



資源は無から作れない。
(外部からの供給が必要)

私の研究

<https://arxiv.org/abs/2609.30362>

- どれだけの情報を捨てているか？ どれだけの自由度が残っているか？
＝情報論的には「リソース（資源）」として扱える
- リソース理論を使って、くりこみで単調減少するリソースを定式化

まとめ

<https://arxiv.org/abs/2609.30362>

- 物理学において、くりこみと理論・状態の関係を探ることは重要。
- くりこみは粗視化とリスケール。重要な情報を残す。
- 量子情報とリソース理論を使って、くりこみ操作を体系化した。

＊質問などがあればお気軽にメール等で（takato.mori@rikkyo.ac.jp）

＊X (元Twitter) もやっています：@QFTlover

第2部

情報論的・代数的くりこみ群—具体的な構成と
くりこみ群のリソース理論の構築

Two questions

1. What is RG for generic systems?

Wilsonian RG:
continuum, infinite dim., momentum=energy

Real-space RG:
spatially extended, no infinitesimal flow,
mostly numerical

Generic scheme?

- analytically tractable
- computable
- discrete/continuous
- finite/infinite dims

Two questions

2. Universal RG monotone?

c-theorem:

limited to 2d, extension to higher dim
is subtle

Entropic c-function and Wilsonian
cutoff?

Two questions

1. What is RG for generic systems?

Wilsonian RG:
continuum, infinite dim., momentum=energy

Real-space RG:
spatially extended, no infinitesimal flow,
mostly numerical

Generic scheme?

- analytically tractable
- computable
- discrete/continuous
- finite/infinite dims

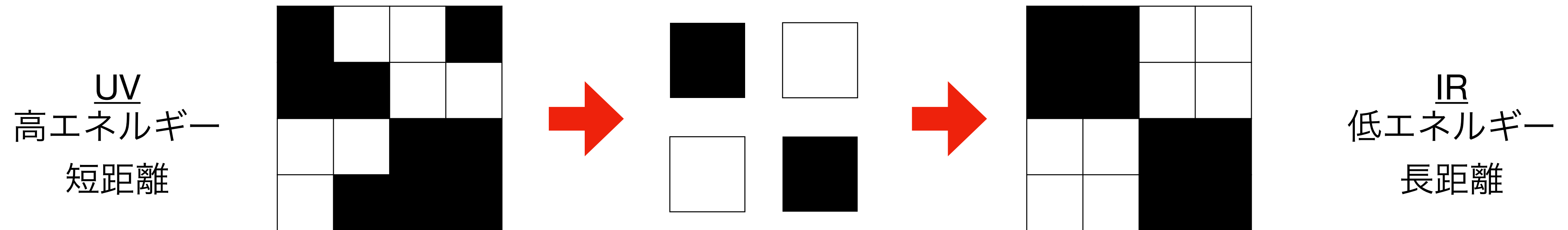
2. Universal RG monotone?

c-theorem:
limited to 2d, extension to higher dim
is subtle

Entropic c-function and Wilsonian
cutoff?

くりこみ群とそのアプローチ

くりこみ群 (RG) : 粗視化とリスケール



- **実空間くりこみ** [Kadanoff '66; White '92; Levin-Nave '07; Vidal '06; ...]
多体系の分配関数や状態を扱う。解析計算が困難。有限サイズでは無限小変換がない。
- **ウィルソンのくりこみ (運動量空間くりこみ)** [Wilson '71; Wetterich '93; Morris '94; Polchinski '84; ...]
主に分配関数や有効作用の変化＝理論空間 (相互作用の結合定数) のフローを扱う。
無限次元無限サイズを仮定。場の理論以外への拡張が明らかでない。

RGを一般の量子系に対する量子チャネルとして定義できるか？

→その操作で失われる情報から、単調量を構成する

This talk: Quantum informational and algebraic reformulation of Wilsonian RG

Informational RG (IRG)

- **Coarse graining** as **partial trace**
- **Rescaling** as a product of **isometries**
- ✓ Explicit Kraus operator realization
(Haar random unitary/basis scrambling)
- ☹ Tensor factorization assumed

Algebraic RG (ARG)

- Constructing **Wilsonian low/high-energy algebra** from **one-particle operators**
- **Rescaling** as **one-particle isometry**
- **RG** as **conditional expectation**
- ✓ No factorization assumed

This talk: Quantum informational and algebraic reformulation of Wilsonian RG

Informational RG (IRG)

- Coarse graining as partial trace
- Rescaling as a product of isometries
- ✓ Explicit Kraus operator realization
(Haar random unitary/basis scrambling)
- ☹ Tensor factorization assumed

Algebraic RG (ARG)

- Constructing Wilsonian low/high-energy algebra from one-particle operators
- Rescaling as one-particle isometry
- RG as conditional expectation
- ✓ No factorization assumed

- ☺ **Resource-theoretic formulation** leads to a **rigorous RG monotone!**
- ☺ Explicit relation between **QI metric** and **Zamolodchikov metric/central charge!**
- ☺ Holographic calculation!

Recap: Wilsonian RG (WRG)

$$Z_{\Lambda} = \int \mathcal{D}\phi_{<} \int \mathcal{D}\phi_{>} e^{-S_{\Lambda}[\phi_{<}, \phi_{>}]} = \int \mathcal{D}\phi_{<} e^{-S'_{\Lambda(s)}[\phi_{<}]}$$

**Integrating out high-
momentum modes**

$$\phi_{>} := \tilde{\phi}(p \geq e^{-s}\Lambda)$$

Recap: Wilsonian RG (WRG)

$$Z_{\Lambda} = \int \mathcal{D}\phi_{<} \int \mathcal{D}\phi_{>} e^{-S_{\Lambda}[\phi_{<}, \phi_{>}]} = \int \mathcal{D}\phi_{<} e^{-S'_{\Lambda(s)}[\phi_{<}]} \rightarrow \int \mathcal{D}\phi' e^{-S_{\Lambda}^{(s)}[\phi']}$$

Integrating out high-momentum modes

$$\phi_{>} := \tilde{\phi}(p \geq e^{-s}\Lambda)$$

Rescale each mode

$$\begin{aligned} \phi'(p' = e^s p \leq \Lambda) \\ := \phi_{<}(p \leq e^{-s}\Lambda) \end{aligned}$$

Recap: Wilsonian RG (WRG)

$$Z_{\Lambda} = \int \mathcal{D}\phi_{<} \int \mathcal{D}\phi_{>} e^{-S_{\Lambda}[\phi_{<}, \phi_{>}]} = \int \mathcal{D}\phi_{<} e^{-S'_{\Lambda(s)}[\phi_{<}]} \rightarrow \int \mathcal{D}\phi' e^{-S_{\Lambda}^{(s)}[\phi']}$$

Integrating out high-momentum modes

$$\phi_{>} := \tilde{\phi}(p \geq e^{-s}\Lambda)$$

Rescale each mode

$$\phi'(p' = e^s p \leq \Lambda)$$

$$:= \phi_{<}(p \leq e^{-s}\Lambda)$$

➡ This iterative, infinitesimal procedure defines the effective action $S_{\Lambda}^{(s)}[\phi]$ at each renormalization scale s

粗視化

粗視化＝運動量空間での部分トレース [Costa-Brink-Nogueira-Klein '22, '23]

一般には高エネルギー（＝高1粒子運動量）部分のreference依存性が入りうる

$$\mathcal{E}(\rho) := \int dU_{>} K_U^{(\sigma)} \rho K_U^{(\sigma)\dagger} = (\text{Tr}_{>} \rho) \otimes \sigma_{>}$$

$$K_U^{(\sigma)} = \sqrt{d_{>}} (\mathbf{1}_{<} \otimes \sqrt{\sigma_{>}})(\mathbf{1}_{<} \otimes U_{>})$$

↑
高運動量参照状態

↑
高エネルギー部分だけスクランブル

✓ U のアンサンブルを一般に取ること、対称性に制限されたUVの情報を取り入れられる

✓ 各々の測定outcome U を追うことで純粋状態の変換も記述可能

Rescaling

$$\frac{\Lambda}{\Delta p} \sim \# \text{ of modes}$$

🤔 Rescaling is a mere relabeling? Consider a discrete system

$$\phi(p_0 = 0)$$

$$\phi(p_1 = \Delta p)$$

$$\phi(p_2 = 2\Delta p = \Lambda)$$

Rescaling

$$\frac{\Lambda}{\Delta p} \sim \# \text{ of modes}$$

🤔 Rescaling is a mere relabeling? Consider a discrete system

$$\phi(p_0 = 0) \quad \phi(p_1 = \Delta p) \quad \phi(p_2 = 2\Delta p = \Lambda)$$

integrating out $\int d\phi(p_2)$ $\downarrow$

$$\phi(p_0 = 0) \quad \phi(p_1 = \Delta p = e^{-s}\Lambda)$$

🤔 Infinitesimal RG?

$$\frac{\Lambda}{\Delta p} - \frac{e^{-s}\Lambda}{\Delta p} = 1 \text{ 'infinitesimal'}$$

Rescaling

$$\frac{\Lambda}{\Delta p} \sim \# \text{ of modes}$$

🤔 Rescaling is a mere relabeling? Consider a discrete system

$$\phi(p_0 = 0) \quad \phi(p_1 = \Delta p) \quad \phi(p_2 = 2\Delta p = \Lambda)$$

integrating out $\int d\phi(p_2)$ $\downarrow$

$$\phi(p_0 = 0) \quad \phi(p_1 = \Delta p = e^{-s}\Lambda)$$

relabel $p \rightarrow p' = e^s p$ $\downarrow$

$$\phi(p'_0 = 0) \quad \phi(p'_2 = 2\Delta p = \Lambda)$$

Rescaling

$$\frac{\Lambda}{\Delta p} \sim \# \text{ of modes}$$

🤔 Rescaling is a mere relabeling? Consider a discrete system

$$\phi(p_0 = 0)$$

$$\phi(p_1 = \Delta p)$$

$$\phi(p_2 = 2\Delta p = \Lambda)$$

Dimensions disagree!

Cannot compare two on the same ground!

$$\phi(p'_0 = 0)$$

$$\phi(p'_2 = 2\Delta p = \Lambda)$$

Rescaling

$$\frac{\Lambda}{\Delta p} \sim \# \text{ of modes}$$

🤔 Rescaling is a mere relabeling? Consider a discrete system

$$\phi(p_0 = 0) \quad \phi(p_1 = \Delta p) \quad \phi(p_2 = 2\Delta p = \Lambda)$$

Dimensions disagree!

Cannot compare two on the same ground!

→ We need an **interpolation**!

$$\phi(p'_0 = 0) \quad \phi(p_1 = \Delta p) \quad \phi(p'_2 = 2\Delta p = \Lambda)$$

Recap: Wilsonian RG

$$Z_\Lambda = \int \mathcal{D}\phi_{<} \int \mathcal{D}\phi_{>} e^{-S_\Lambda[\phi_{<}, \phi_{>}]} = \int \mathcal{D}\phi_{<} e^{-S'_{\Lambda(s)}[\phi_{<}]} \rightarrow \int \mathcal{D}\phi' e^{-S_\Lambda^{(s)}[\phi']}$$

Integrating out high-momentum modes

$$\phi_{>} := \tilde{\phi}(p_i \geq e^{-s}\Lambda)$$

Relabel each mode

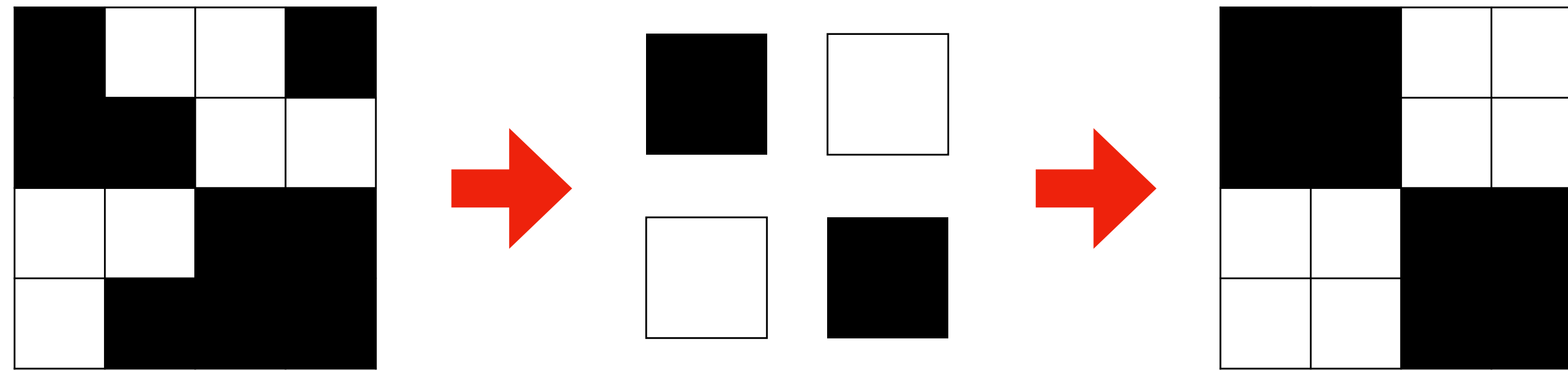
$$\begin{aligned} \phi'(p'_I = e^s p_i \leq \Lambda) \\ := \phi_{<}(p_I \leq e^{-s}\Lambda) \end{aligned}$$

Resample to bring back to the original dimensions

$$\{\phi'(p'_I)\}_{I=1}^N \rightarrow \{\phi'(p_i)\}_{i=1}^M$$

リスケール

粗視化後、元の系と比べるには次元を戻す必要がある

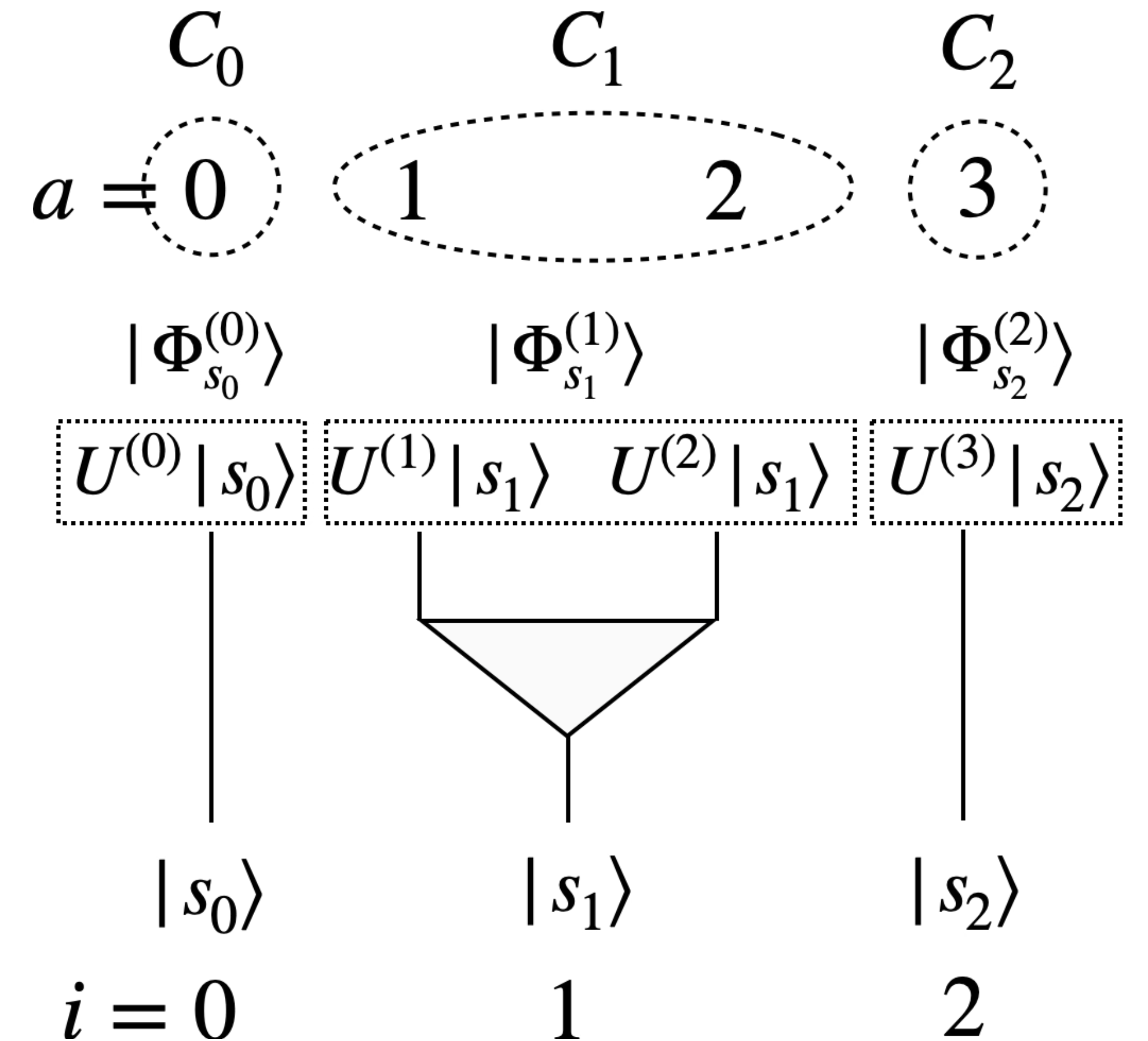


ただし、

- 低エネルギーの情報だけに依存
- 運動量空間で局所的 (UVとIRを混ぜない)

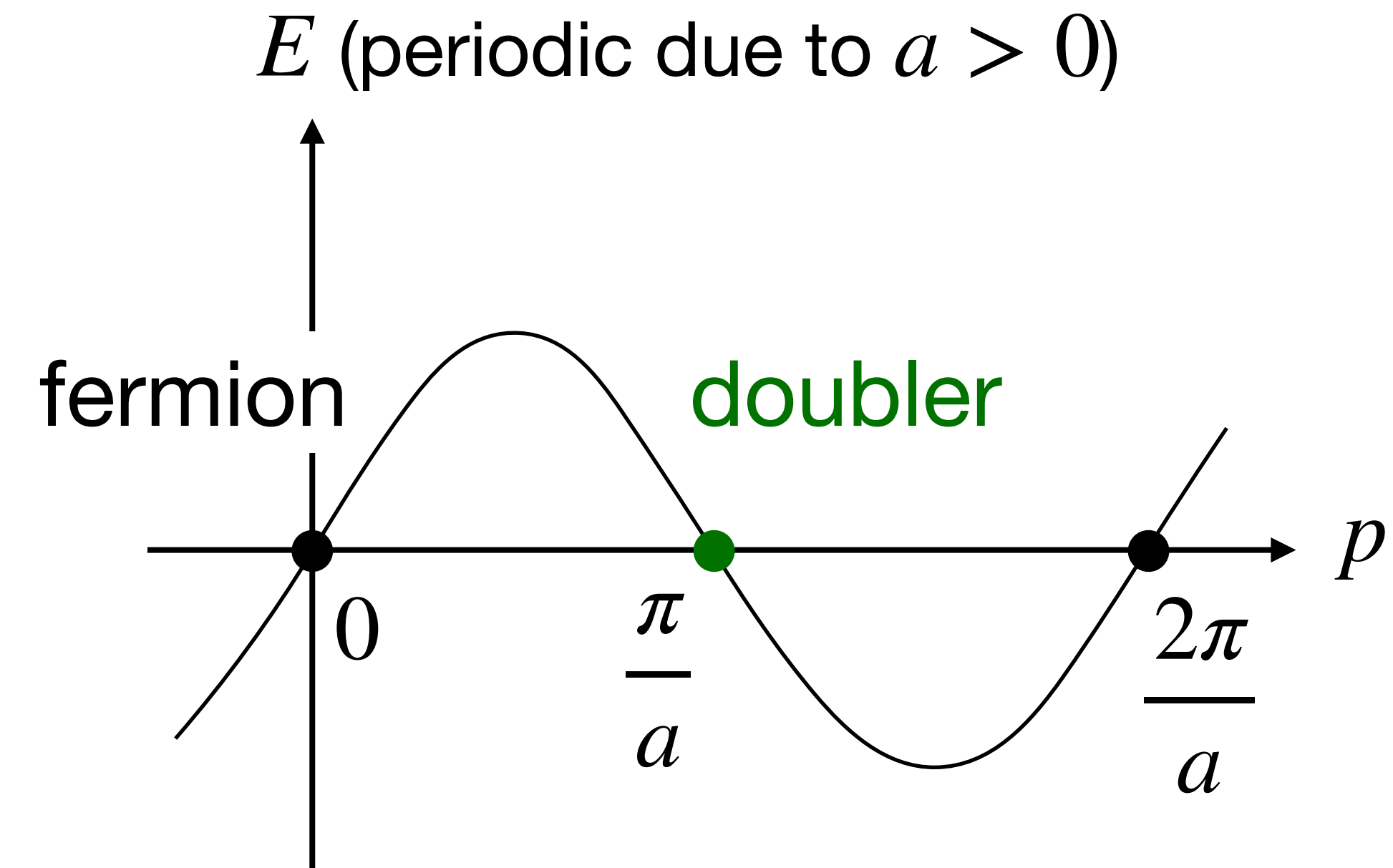
→ product of isometries

$$V := \bigotimes_{i=0}^{N-1} V_i \quad V_i = \int \mathcal{D}\phi_i \left(\bigotimes_{i \in C_i} U^{(i)} |\phi_i\rangle \right) \langle \phi_i | \quad V_i : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_{C_i}, \quad V_i^\dagger V_i = \mathbf{1}_i$$



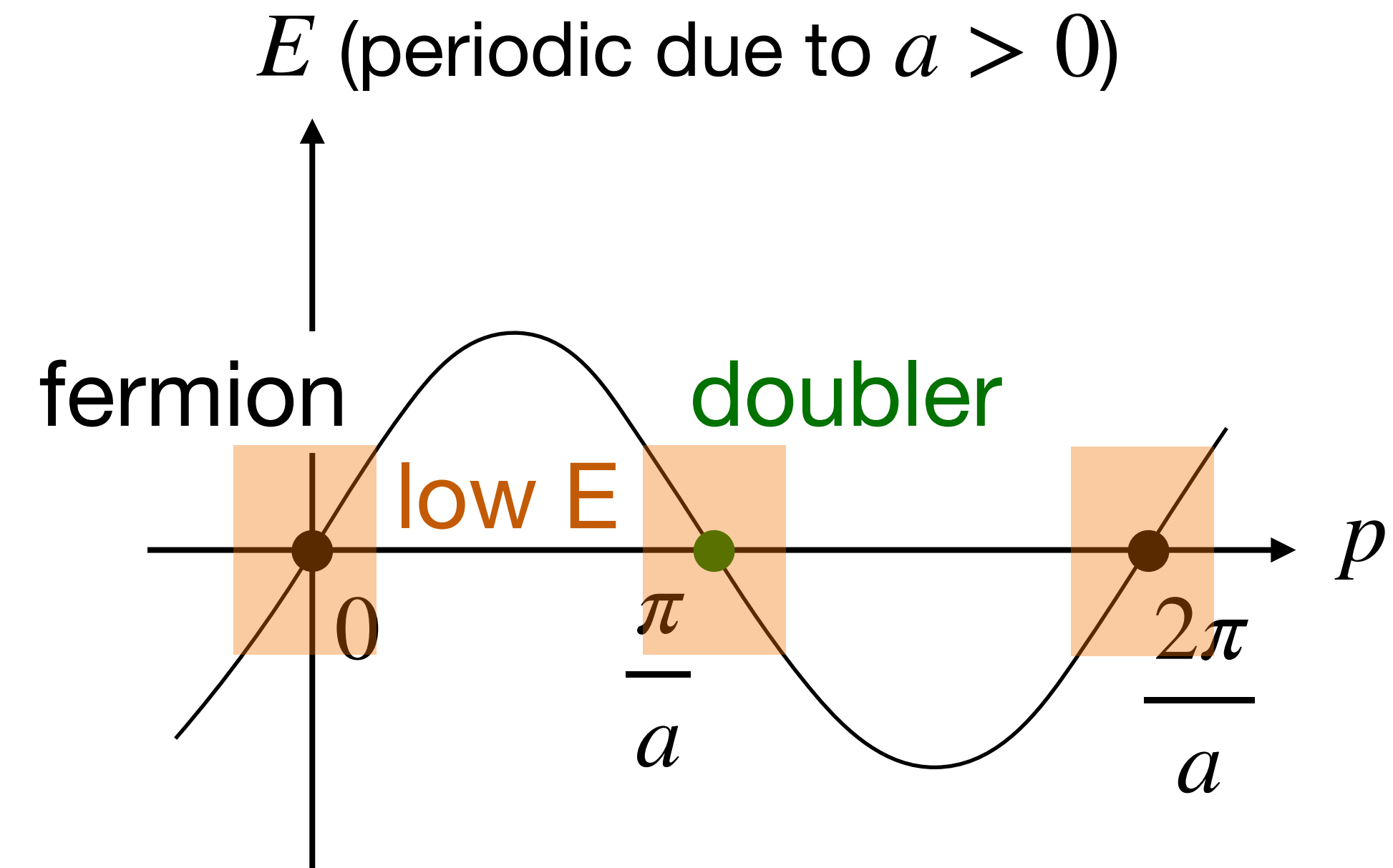
Information to Algebra

- IRG still assumes a tensor product structure $\mathcal{H} = \mathcal{H}_< \otimes \mathcal{H}_>$
- Beyond free theories, tensor product structure is not guaranteed
- Without translational invariance, momentum $\neq$ energy



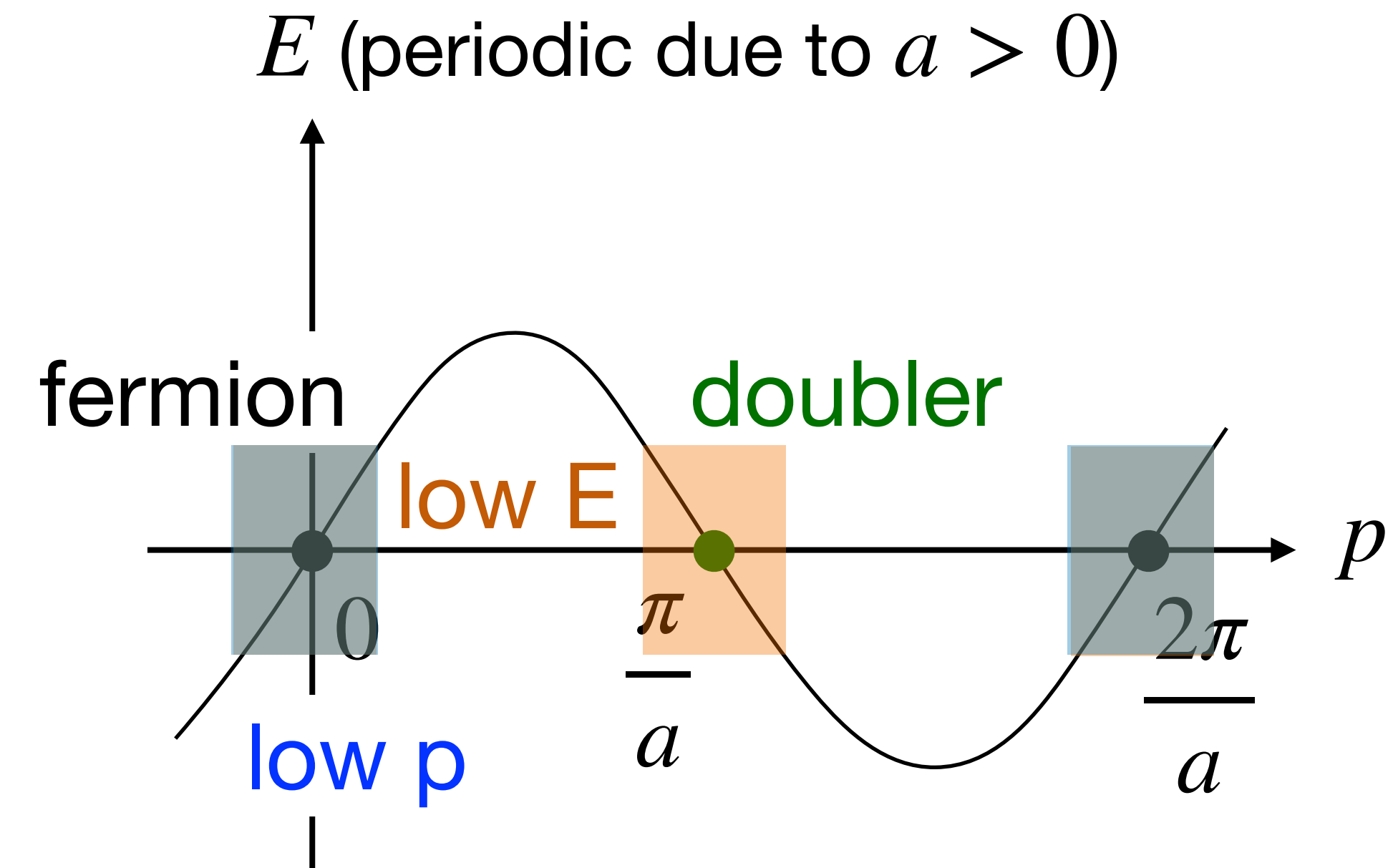
Information to Algebra

- IRG still assumes a tensor product structure $\mathcal{H} = \mathcal{H}_< \otimes \mathcal{H}_>$
- Beyond free theories, tensor product structure is not guaranteed
- Without translational invariance, momentum $\neq$ energy



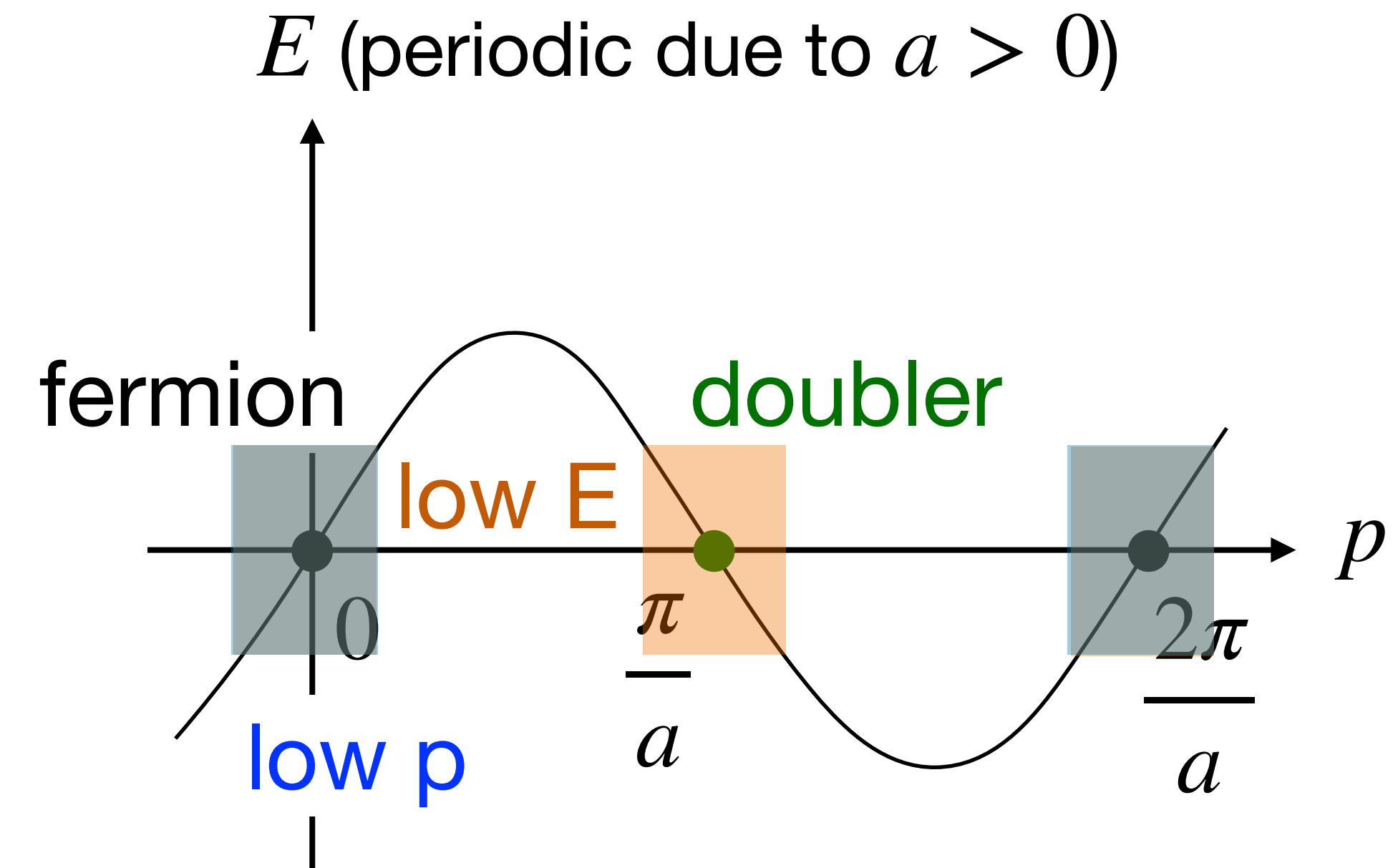
Information to Algebra

- IRG still assumes a tensor product structure $\mathcal{H} = \mathcal{H}_< \otimes \mathcal{H}_>$
- Beyond free theories, tensor product structure is not guaranteed
- Without translational invariance, momentum $\neq$ energy



Information to Algebra

- IRG still assumes a tensor product structure $\mathcal{H} = \mathcal{H}_< \otimes \mathcal{H}_>$
- Beyond free theories, tensor product structure is not guaranteed
- Without translational invariance, momentum $\neq$ energy



We first need to define “low/high energy”... What does it mean?

Algebraic RG (ARG)

We should distinguish two notions of energy:

- Total energy: $E = \int_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}}$
- Modewise energy = one-particle energy $\omega_{\mathbf{p}}$ ← ‘energy’ in Wilsonian RG

Collective excitations can carry a large amount of energy but this is not a UV phenomenon, e.g. electromagnetism

Algebraic RG (ARG)

In free theory

1. Choose ‘particle’ excitations $S_{1p} = \{\mathbf{1}\} \cup \{O_i\}_i \Rightarrow \mathcal{V}_1 = \text{span}\{S_{1p}\}$
s.t. they are separating on $|\Omega\rangle$

$a_p^\dagger$

Algebraic RG (ARG)

In free theory

1. Choose ‘particle’ excitations $S_{1p} = \{\mathbf{1}\} \cup \{O_i\}_i \Rightarrow \mathcal{V}_1 = \text{span}\{S_{1p}\}$
s.t. they are separating on $|\Omega\rangle$

2. Define one-particle (1p) Hilbert space $\mathcal{H}_1 = \text{span}\{O|\Omega\rangle \mid O \in \mathcal{V}_1\}$
and the one-particle projector $P_1\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$

$$a_p^\dagger$$

$$\{a_p^\dagger|\Omega\rangle = |p\rangle\}_p$$

$$P_1 = \sum_p |p\rangle\langle p|$$

Algebraic RG (ARG)

In free theory

1. Choose 'particle' excitations $S_{1p} = \{\mathbf{1}\} \cup \{O_i\}_i \Rightarrow \mathcal{V}_1 = \text{span}\{S_{1p}\}$
s.t. they are separating on $|\Omega\rangle$ $a_p^\dagger$
2. Define one-particle (1p) Hilbert space $\mathcal{H}_1 = \text{span}\{O|\Omega\rangle \mid O \in \mathcal{V}_1\}$ $\{a_p^\dagger|\Omega\rangle = |p\rangle\}_p$
and the one-particle projector $P_1\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$ $P_1 = \sum_p |p\rangle\langle p|$
3. Construct 1p Hamiltonian $H_1 = P_1HP_1 = \sum_i \varepsilon_i |\varepsilon_i\rangle\langle\varepsilon_i|$ $\sum_p \frac{3\omega_p}{2} |p\rangle\langle p|$

Algebraic RG (ARG)

In free theory

1. Choose 'particle' excitations $S_{1p} = \{\mathbf{1}\} \cup \{O_i\}_i \Rightarrow \mathcal{V}_1 = \text{span}\{S_{1p}\}$
s.t. they are separating on $|\Omega\rangle$

$$a_p^\dagger$$

2. Define one-particle (1p) Hilbert space $\mathcal{H}_1 = \text{span}\{O|\Omega\rangle \mid O \in \mathcal{V}_1\}$
and the one-particle projector $P_1\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$

$$\{a_p^\dagger|\Omega\rangle = |p\rangle\}_p$$

$$P_1 = \sum_p |p\rangle\langle p|$$

3. Construct 1p Hamiltonian $H_1 = P_1 H P_1 = \sum_i \varepsilon_i |\varepsilon_i\rangle\langle\varepsilon_i|$

$$\sum_p \frac{3\omega_p}{2} |p\rangle\langle p|$$

4. Low-E 1p projection to construct low-E 1p Hilbert space

$$P_{1,L} = \sum_{\varepsilon_i \leq \Lambda} |\varepsilon_i\rangle\langle\varepsilon_i| \Rightarrow \mathcal{H}_{1,L} = P_{1,L}\mathcal{H}_1$$

$$P_{1,L} = \sum_{p \leq \Lambda} |p\rangle\langle p|$$

$$|p \leq \Lambda\rangle \in \mathcal{H}_{1,L}$$

→ Low-E 1p generators $\mathcal{V}_{1,L} = \{O \in \mathcal{V}_1 \mid O|\Omega\rangle \in \mathcal{H}_{1,L}\}$

$$a_{p \leq \Lambda}^\dagger$$

Algebraic RG (ARG)

In free theory

6. Rescale each generator via isometry

$$\tilde{\mathcal{V}}_{1,L} = W \mathcal{V}_{1,L} W^\dagger, \quad W = \sum_i \left(\frac{1}{\sqrt{m_i}} \sum_{a \in B_i} |\varepsilon_a\rangle \right) \langle \varepsilon_i|$$

$$\text{with } \{1, \dots, d'\} = \bigsqcup_{i=1}^d B_i, \quad m_i := |B_i|, \quad \sum_{i=1}^d m_i = d'$$

$$\text{where } d' = \dim \mathcal{H}_1, \quad d = \dim \mathcal{H}_{1,L}$$

$$W = \int_p |p\rangle \langle e^{-s} p|$$

Algebraic RG (ARG)

In free theory

6. Rescale each generator via isometry

$$\tilde{\mathcal{V}}_{1,L} = W \mathcal{V}_{1,L} W^\dagger, \quad W = \sum_i \left(\frac{1}{\sqrt{m_i}} \sum_{a \in B_i} |\varepsilon_a\rangle \right) \langle \varepsilon_i|$$

$$\text{with } \{1, \dots, d'\} = \bigsqcup_{i=1}^d B_i, \quad m_i := |B_i|, \quad \sum_{i=1}^d m_i = d'$$

$$\text{where } d' = \dim \mathcal{H}_1, \quad d = \dim \mathcal{H}_{1,L}$$

7. Take double commutant to define the low-energy algebra

$$\mathcal{A}_L = (\tilde{\mathcal{V}}_{1,L} \cup \tilde{\mathcal{V}}_{1,L}^\dagger)''$$

$$W = \int_p |p\rangle \langle e^{-s} p|$$

$$O_{<} \otimes \mathbf{1}_{>} \in \mathcal{A}_L$$

Algebraic RG (ARG)

In free theory

6. Rescale each generator via isometry

$$\tilde{\mathcal{V}}_{1,L} = W \mathcal{V}_{1,L} W^\dagger, \quad W = \sum_i \left(\frac{1}{\sqrt{m_i}} \sum_{a \in B_i} |\varepsilon_a\rangle \right) \langle \varepsilon_i|$$

$$\text{with } \{1, \dots, d'\} = \bigsqcup_{i=1}^d B_i, \quad m_i := |B_i|, \quad \sum_{i=1}^d m_i = d'$$

$$\text{where } d' = \dim \mathcal{H}_1, \quad d = \dim \mathcal{H}_{1,L}$$

7. Take double commutant to define the low-energy algebra

$$\mathcal{A}_L = (\tilde{\mathcal{V}}_{1,L} \cup \tilde{\mathcal{V}}_{1,L}^\dagger)''$$

8. The high-energy algebra is its relative commutant

$$\mathcal{A}_H = \mathcal{A}'_L \cap \mathcal{A}$$

$$W = \int_p |p\rangle \langle e^{-s} p|$$

$$O_{<} \otimes \mathbf{1}_{>} \in \mathcal{A}_L$$

$$\mathbf{1}_{<} \otimes O_{>} \in \mathcal{A}_H$$

Algebraic RG (ARG)

- ✓ Infinitesimal RG ($N \rightarrow N - 1 \rightarrow N \rightarrow \dots$) as a single-site isometry (spontaneously breaking translational invariance in energy spectrum).
- ✓ Applicable to any systems
 - No tensor factorization assumed. Not limited to ∞ dim or continuum.
 - Definition of ‘particle’ can be arbitrary. e.g. single-site Pauli op.
 - ‘Hamiltonian’ need not be a physical one. e.g. $\sqrt{H^2 - \mathbf{P}^2}$ (Lorentz invariant)

くりこみ群のリソース理論

リソース理論：

制限された操作の下、どのような状態がリソースとなるのか、体系的に扱うフレームワーク

リソース理論

Chitambar-Gour, Rev. Mod.
Phys. 91, 025001 (2019)

自由状態 $\mathcal{F}$

コストなしで用意できる

例：separable states, Gibbs state

自由操作 $\mathcal{O}$

制約下で許される操作

例：LOCC, thermal operations

資源を持つ状態

$\mathcal{F}$ の外側すべて

例：Bell pair, 非平衡状態

ルール

$$\rho \in \mathcal{F}, \quad \mathcal{E} \in \mathcal{O} \implies \mathcal{E}(\rho) \in \mathcal{F}$$

free operation は資源を作れない。

リソース測度

$$R(\rho) = \min_{\sigma \in \mathcal{F}} D(\rho \parallel \sigma), \quad R(\mathcal{E}(\rho)) \leq R(\rho)$$

free set への contractive な距離 $\Rightarrow$ モノトーン

くりこみ群のリソース理論

リソース理論：

制限された操作の下、どのような状態がリソースとなるのか、体系的に扱うフレームワーク

RG（1ステップを $\mathcal{G}$ とする）では、自由状態 $\mathcal{F}$ として固定点の状態（ $\mathcal{G}(\rho) = \rho \in \mathcal{F}$ ）を取る。

さらに リソース破壊写像 (RDM) Δ を以下のように定義する。

- $\Delta(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ （自由状態は破壊されるリソースを持たない）
- $\Delta(\rho) \in \mathcal{F}, \quad \forall \rho$ （ Δ は全てのリソースを破壊する）

これはいつも存在するとは限らないが、RGの場合、長時間平均（チェザロ極限）

$$\Delta := \mathcal{G}_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathcal{G}^n$$

～低エネルギー極限

で与えられる。自由操作は Δ と可換なものとして定義される。

くりこみ群のリソース理論

このとき、自由状態でゼロ $\mathcal{R}(\mathcal{F}) = 0$ で、自由操作の下で単調 $0 \leq \mathcal{R}(\mathcal{E}(\rho)) \leq \mathcal{R}(\rho), \forall \rho$ な
リソース $\mathcal{R}$ は最適化を除いて定義できる：

$$\mathcal{R}(\rho) := \min_{\sigma \in \mathcal{F}} D(\rho \| \sigma) = D(\rho \| \Delta(\rho)) \quad \Delta := \mathcal{G}_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathcal{G}^n$$

(右辺の単調性の証明)

$$\mathcal{R}(\mathcal{G}(\rho)) = D(\mathcal{G}(\rho) \| \Delta \circ \mathcal{G}(\rho)) \underset{\text{RDM}}{=} D(\mathcal{G}(\rho) \| \mathcal{G} \circ \Delta(\rho)) \underset{\text{DPI}}{\leq} D(\rho \| \Delta(\rho)) = \mathcal{R}(\rho)$$

単調性が情報論的に保証されている & 最適化不要！

RGリソースモノトーン=RGモノトーン

低エネルギー（IR）固定点 ρ_* 周りで展開することで

情報計量（Bogoliubov-Kubo-Mori計量） χ_{ij} とスケール s の中心電荷 $c(s)$ を結びつけることができる！

ρ としてGibbs状態をとると、

$$D(\rho(g) \parallel \rho_*) \approx \frac{1}{2} \chi_{ij} \delta g^i \delta g^j, \quad \chi_{ij} = \beta \int_0^\beta d\tau \int_\Sigma d^{d-1} \mathbf{x} d^{d-1} \mathbf{y} \langle O_i(\tau, \mathbf{x}) O_j(0, \mathbf{y}) \rangle_{\beta, c}$$

RGリソースモノトーン=RGモノトーン

低エネルギー（IR）固定点 ρ_* 周りで展開することで

情報計量（Bogoliubov-Kubo-Mori計量） χ_{ij} とスケール s の中心電荷 $c(s)$ を結びつけることができる！

ρ としてGibbs状態をとると、

$$D(\rho(g) \parallel \rho_*) \approx \frac{1}{2} \chi_{ij} \delta g^i \delta g^j, \quad \chi_{ij} = \beta \int_0^\beta d\tau \int_\Sigma d^{d-1} \mathbf{x} d^{d-1} \mathbf{y} \langle O_i(\tau, \mathbf{x}) O_j(0, \mathbf{y}) \rangle_{\beta, c}$$

線形化RGの固有方向 $\beta = -\omega \delta g$ に、c定理 $\frac{dc}{ds} = -\kappa g_{ij}^{\text{Zam}} \beta^i \beta^j = -\kappa g_{ij}^{\text{Zam}} \frac{dg^i}{ds} \frac{dg^j}{ds}$ を用いて

$$D(\rho(g(s)) \parallel \rho_*) = \frac{C_*}{\kappa \omega} (c(s) - c_{\text{IR}}) + O(\delta g^3).$$

$$\langle O_i(x) O_j(y) \rangle_{T=0} = \frac{g_{ij}^{\text{Zam}}}{|x - y|^{2\Delta}}$$
$$\chi_{ij} = C_* g_{ij}^{\text{Zam}}$$

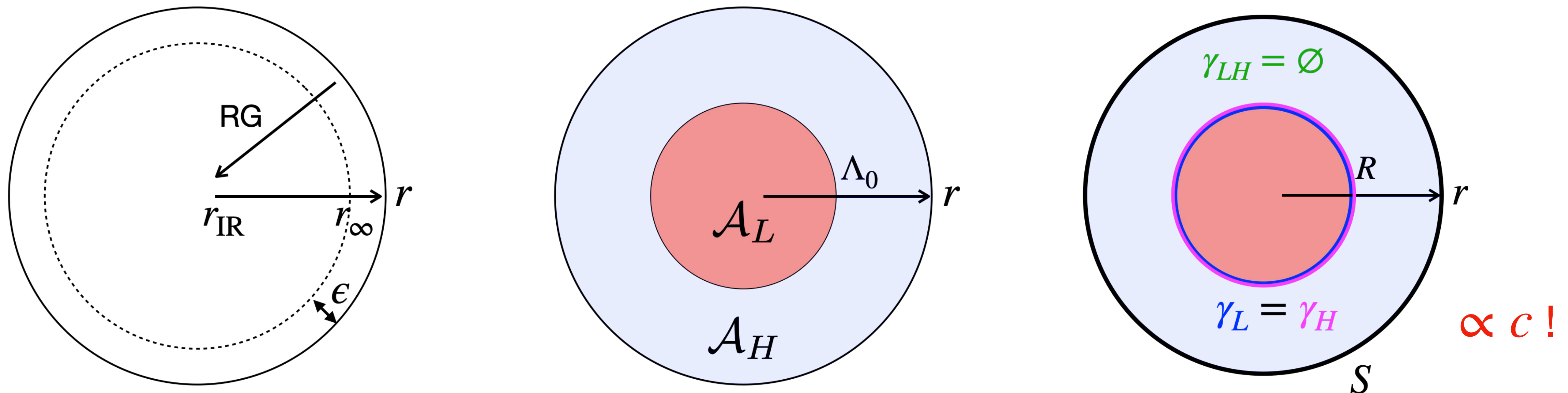
粗視化モノトーン

- リソース理論のモノトーンはIRからの距離のようなもの
- 代わりにUVからの距離（どれだけ情報を捨てたか）で考えても、RG trajectory上のモノトーンを構成できる
- 条件付き期待値と半群の性質からモノトーンを相対エントロピーで特定した
- レファレンス状態 σ_{UV} の最適化をすると、UV–IR相互情報量となる

$$D(\rho \| \rho_L \otimes \rho_H) = I(L : H) = S(\rho_L) + S(\rho_H) - S(\rho_{LR})$$

ホログラフィックな計算

- AdS/CFT identifies the radial direction as energy scale.
- The subalgebra associated to a bulk subregion = low/high-energy algebra
- Algebraic relative entropy resource of coarse graining can be computed by Ryu-Takayanagi formula:



まとめ

- ウィルソンのくりこみ群：各モード毎のエネルギー空間での粗視化とリスケール
- 量子チャンネルとして一般化→次元・連続/離散を問わない
混合状態と純粋状態のくりこみ両方を扱える
- 代数的定式化→テンソル積構造の仮定も不要
ハミルトニアンや基本粒子も任意なので開放量子系やスピン系に適用可能
- リソース理論→相対エントロピーに基づくくりこみ群のモノトーンの構成
- 情報幾何と物理で登場する中心電荷との対応
- (AdS/CFTを用いたリソースモノトーンのあらわな計算)

Appendix

QUANTUM INFORMATION ・ はじめての

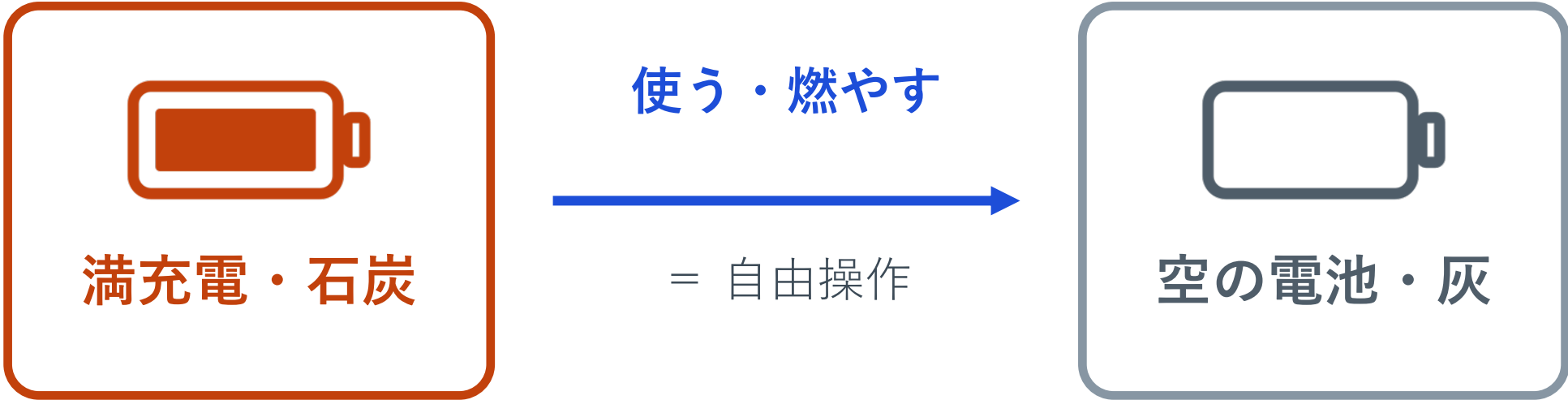
Quantum Resource Theory

「タダでできること」を決めると、「貴重なもの」が自然に定まる。
量子状態の価値を、エネルギー論のように扱う枠組み。



01 電池と石炭で考える

日常の資源



可能：資源を消費して仕事や熱を取り出せる。



不可能：資源は無から作れない。

量子の資源（例：entanglement）



可能：1 ebit を消費して 1 qubit を遠隔転送。



不可能：LOCC では entanglement を作れない。

02 理論を決める 3 つの要素



FREE STATES

タダで用意できる状態

いつでも好きなだけ手に入る状態。
日常でいえば「空の電池」「灰」。

例：separable states, Gibbs state



FREE OPERATIONS

タダで実行できる操作

実験的・物理的な制約から許される
quantum channel の集合。「使う」
「燃やす」に相当。

例：LOCC, thermal operations



RESOURCE STATES

それ以外 = 資源

F の外にある状態。消費することで
、自由操作だけではできないタスク
が可能になる。

例：Bell pair, 非平衡状態

THE GOLDEN RULE

$$\rho \in F, \Lambda \in O \implies \Lambda(\rho) \in F$$

自由操作は free state を free state に写す。

したがって

自由操作だけでは資源を生み出せない。

この一行が理論全体の骨格になる。

03 いろいろな resource theory

理論	Free states	Free operations	代表的な資源	何に使えるか
Entanglement	separable states	LOCC	Bell pair (ebit)	teleportation, 量子鍵配送
Coherence	incoherent states (固定基底で対角)	incoherent operations	$ +\rangle$ などの重ね合わせ	干渉計測, 量子アルゴリズム
Thermodynamics (athermality)	Gibbs state γ	thermal operations	非平衡状態	work extraction
Magic (non-stabilizerness)	stabilizer states	Clifford operations	magic state $ T\rangle$	universal な量子計算

04 資源の「残量」を測る

Resource monotone

$$M(\Lambda(\rho)) \leq M(\rho) \quad (\Lambda \in \mathcal{O})$$

自由操作で決して増えない量。電池の「残量メーター」に相当する。

例：relative entropy of resource

$$D_F(\rho) = \min_{\sigma \in F} S(\rho \parallel \sigma)$$

状態変換の問い

$$\rho \longrightarrow_{\mathcal{O}} \sigma ?$$

自由操作で ρ を σ に変換できるか。monotone が一つでも増えるなら不可能。

多コピー極限では distillation / dilution の rate が資源の「為替レート」を与える。

まとめ 制約（自由操作）を決める $\rightarrow$ 資源が決まる $\rightarrow$ 資源の変換と定量化を問う

量子リソース理論とは？

「使える資源」を定義し、その資源を消費する操作の下で、資源を新たに作れない という枠組み

身近な例：エネルギー資源

資源

使えるエネルギーの源



石炭



電池



ガス

自由操作

資源を消費して行える操作
(エネルギー保存則を満たす操作)



発電・動力・暖房など

出力 (仕事)

資源を使って得られる有用な効果



電気・運動・熱など

資源は自発的には増えない

エネルギーを消費するだけでは
新たに石炭や電池をすることはできない
(外部からの供給が必要)

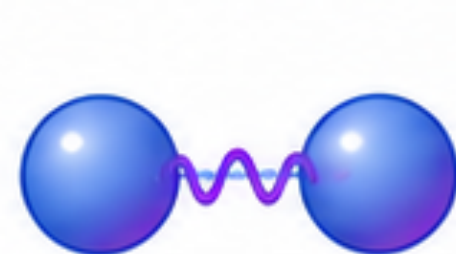


自由操作だけでは
資源を生成できない

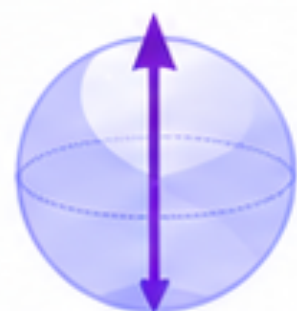
量子リソース理論

資源状態

特定の量子的性質を持つ状態
(自由状態よりも“価値がある”状態)



エンタングルメント



コヒーレンス



マジック状態
など

自由操作

資源を消費して実現できると認める操作

局所操作と古典通信
(LOCC)

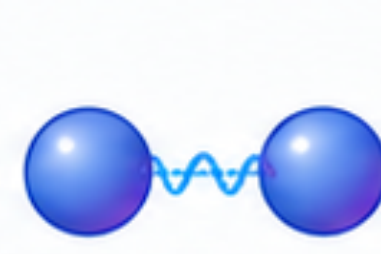


熱力学的操作



出力

資源を使って実現できる量子的な効果



量子通信



量子計算



暗号

資源は自由操作だけでは作れない

自由操作だけでは
資源状態を生成することはできない
(資源は消費・変換されるだけ)



自由状態
(例：分離状態)



資源状態
(例：エンタングルメント状態)

自由操作だけでは
資源を新たに作れない

資源の量 (リソース測度)

自由操作の下で決して増えない量。資源の“価値”を定量化する指標。

任意の自由操作 $\mathcal{F}$ に対して $R(\mathcal{F}(\rho)) \leq R(\rho)$

例：

- エンタングルメントエントロピー
(エンタングルメントの量)

Informational RG (IRG)

Why quantum information? ... It provides a universal formulation!

- To extend WRG to discrete and/or finite systems
- To formulate RG monotones systematically
- Just for fun!

Informational RG (IRG)

[Costa-Brink-Nogueira-Klein '22, '23] reformulated the WRG as

- **Partial trace** = integrating out: $\text{Tr}_> = \int \mathcal{D}\phi_>$
- **Unitary** = basis transformation = relabeling: $U_s = \int \mathcal{D}\phi \, | \tilde{\phi}(p) \rangle \langle \tilde{\phi}(e^{-s}p) |$

Informational RG (IRG)

[Costa-Brink-Nogueira-Klein '22, '23] reformulated the WRG as

- Partial trace = integrating out: $\text{Tr}_> = \int \mathcal{D}\phi_>$
- Unitary = basis transformation = relabeling: $U_s = \int \mathcal{D}\phi | \tilde{\phi}(p) \rangle \langle \tilde{\phi}(e^{-s}p) |$

However, it is not clear how to extend to more generic systems...

- 🤔 What do we integrate out?
- 🤔 Rescaling is not implemented unitary?
- 🤔 Infinitesimal RG ($\rightarrow$ flow eq.)?

Recap: Wilsonian RG

$$Z_{\Lambda} = \int \mathcal{D}\phi_{<} \int \mathcal{D}\phi_{>} e^{-S_{\Lambda}[\phi_{<}, \phi_{>}]} = \int \mathcal{D}\phi_{<} e^{-S'_{\Lambda(s)}[\phi_{<}]} \rightarrow \int \mathcal{D}\phi' e^{-S_{\Lambda}^{(s)}[\phi']}$$

Integrating out high-momentum modes

$$\phi_{>} := \tilde{\phi}(p_i \geq e^{-s}\Lambda)$$

Relabel each mode

$$\begin{aligned} \phi'(p'_I = e^s p_i \leq \Lambda) \\ := \phi_{<}(p_I \leq e^{-s}\Lambda) \end{aligned}$$

Resample to bring back to the original dimensions

$$\{\phi'(p'_I)\}_{I=1}^N \rightarrow \{\phi'(p_i)\}_{i=1}^M$$

Algebraic RG (ARG)

- ✓ RG is realized as a conditional expectation on $\mathcal{A}_L$.
- ✓ Works with finite-dimensional, discrete systems.
- ✓ Infinitesimal RG as a single-site isometry (spontaneously breaking translational invariance in energy spectrum).
- ✓ Approximate uniform rescaling is characterized by the Kullback-Leibler divergence. In thermodynamic limit, this gives the dilation $\psi'(e^{-s}p) = e^{s/2}\psi(p)$.
- ✓ Averaging over isometric configurations recovers uniform rescaling.
- ✓ Applicable to any systems
 - No tensor factorization assumed. Not limited to ∞ dim or continuum.
 - Definition of ‘particle’ can be arbitrary. e.g. single-site Pauli op.
 - ‘Hamiltonian’ need not be a physical one. e.g. $\sqrt{H^2 - \mathbf{P}^2}$ (Lorentz invariant)

動機：任意の系に対するくりこみ群とその単調性

1. What is RG for generic systems?

Wilsonian RG:
continuum, infinite dim., momentum=energy

Real-space RG:
spatially extended, no infinitesimal flow,
mostly numerical

Generic scheme?

- analytically tractable
- computable
- discrete/continuous
- finite/infinite dims

2. Universal RG monotone?

c-theorem:
limited to 2d, extension to higher dim
is subtle

Entropic c-function and Wilsonian
cutoff?

This talk: Quantum informational and algebraic reformulation of Wilsonian RG

Informational RG (IRG)

- **Coarse graining** as **partial trace**
- **Rescaling** as a product of **isometries**
- ✓ Explicit Kraus operator realization
(Haar random unitary/basis scrambling)
- ☹ Tensor factorization assumed

Algebraic RG (ARG)

- Constructing **Wilsonian low/high-energy algebra** from **one-particle operators**
- **Rescaling** as **one-particle isometry**
- **RG** as **conditional expectation**
- ✓ No factorization assumed

This talk: Quantum informational and algebraic reformulation of Wilsonian RG

Informational RG (IRG)

- Coarse graining as partial trace
- Rescaling as a product of isometries
- ✓ Explicit Kraus operator realization
(Haar random unitary/basis scrambling)
- ☹ Tensor factorization assumed

Algebraic RG (ARG)

- Constructing Wilsonian low/high-energy algebra from one-particle operators
- Rescaling as one-particle isometry
- RG as conditional expectation
- ✓ No factorization assumed

- 😊 **Resource-theoretic formulation** leads to a **rigorous RG monotone!**
- 😊 Explicit relation between **QI metric** and **Zamolodchikov metric/central charge!**
- 😊 Holographic calculation!

Recap: Wilsonian RG (WRG)

$$Z_{\Lambda} = \int \mathcal{D}\phi_{<} \int \mathcal{D}\phi_{>} e^{-S_{\Lambda}[\phi_{<}, \phi_{>}] } = \int \mathcal{D}\phi_{<} e^{-S'_{\Lambda(s)}[\phi_{<}] }$$

**Integrating out high-
momentum modes**

$$\phi_{>} := \tilde{\phi}(p \geq e^{-s}\Lambda)$$

Recap: Wilsonian RG (WRG)

$$Z_{\Lambda} = \int \mathcal{D}\phi_{<} \int \mathcal{D}\phi_{>} e^{-S_{\Lambda}[\phi_{<}, \phi_{>}]} = \int \mathcal{D}\phi_{<} e^{-S'_{\Lambda(s)}[\phi_{<}]} \rightarrow \int \mathcal{D}\phi' e^{-S_{\Lambda}^{(s)}[\phi']}$$

Integrating out high-momentum modes

$$\phi_{>} := \tilde{\phi}(p \geq e^{-s}\Lambda)$$

Rescale each mode

$$\begin{aligned} \phi'(p' = e^s p \leq \Lambda) \\ := \phi_{<}(p \leq e^{-s}\Lambda) \end{aligned}$$

Recap: Wilsonian RG (WRG)

$$Z_{\Lambda} = \int \mathcal{D}\phi_{<} \int \mathcal{D}\phi_{>} e^{-S_{\Lambda}[\phi_{<}, \phi_{>}]} = \int \mathcal{D}\phi_{<} e^{-S'_{\Lambda(s)}[\phi_{<}]} \rightarrow \int \mathcal{D}\phi' e^{-S_{\Lambda}^{(s)}[\phi']}$$

Integrating out high-momentum modes

$$\phi_{>} := \tilde{\phi}(p \geq e^{-s}\Lambda)$$

Rescale each mode

$$\phi'(p' = e^s p \leq \Lambda)$$

$$:= \phi_{<}(p \leq e^{-s}\Lambda)$$

➡ This iterative, infinitesimal procedure defines the effective action $S_{\Lambda}^{(s)}[\phi]$ at each renormalization scale s

Informational RG (IRG)

🤔 What do we integrate out?

Intuition: Coarse graining = scramble high-energy modes

Informational RG (IRG)

🤔 What do we integrate out?

Intuition: Coarse graining = scramble high-energy modes

Yes!

$$\mathcal{E}(\rho) := \int dU_{>} K_U^{(\sigma)} \rho K_U^{(\sigma)\dagger} = (\text{Tr}_{>} \rho) \otimes \sigma_{>}$$

agrees with
[Costa-Brink-Nogueira-
Klein '22, '23]

$$K_U^{(\sigma)} = \sqrt{d_{>}} (\mathbf{1}_{<} \otimes \sqrt{\sigma_{>}}) (\mathbf{1}_{<} \otimes U_{>})$$

↑
high-E
reference state

↑
scrambling
high-E modes

Informational RG (IRG)

$$\frac{\Lambda}{\Delta p} \sim \# \text{ of modes}$$

🤔 Rescaling is a mere relabeling? Consider a discrete system

$$\phi(p_0 = 0) \quad \phi(p_1 = \Delta p) \quad \phi(p_2 = 2\Delta p = \Lambda)$$

Dimensions disagree!

Cannot compare two on the same ground!

→ We need an **interpolation**!

$$\phi(p'_0 = 0) \quad \phi(p_1 = \Delta p) \quad \phi(p'_2 = 2\Delta p = \Lambda)$$

Rescaling as isometry

For rescaling, it must

- map from a smaller dimension (#modes = N) to a larger dimension (#modes = M)
- only use the coarse-grained information (unless you have a prior info)
= preserving the coarse-grained observables
- does not mix UV and IR; sufficiently local in momentum space

Rescaling as isometry

For rescaling, it must

- map from a smaller dimension (#modes = N) to a larger dimension (#modes = M)
- only use the coarse-grained information (unless you have a prior info)
= preserving the coarse-grained observables
- does not mix UV and IR; sufficiently local in momentum space

➡ a product of isometries!

$$V := \bigotimes_{i=0}^{N-1} V_i$$

$$V_i : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_{C_i}, \quad V_i^\dagger V_i = \mathbf{1}_i$$

$$\{0, \dots, M-1\} = \bigsqcup_{i=0}^{N-1} C_i, \quad n_i := |C_i|, \quad \sum_{i=0}^{N-1} n_i = M$$

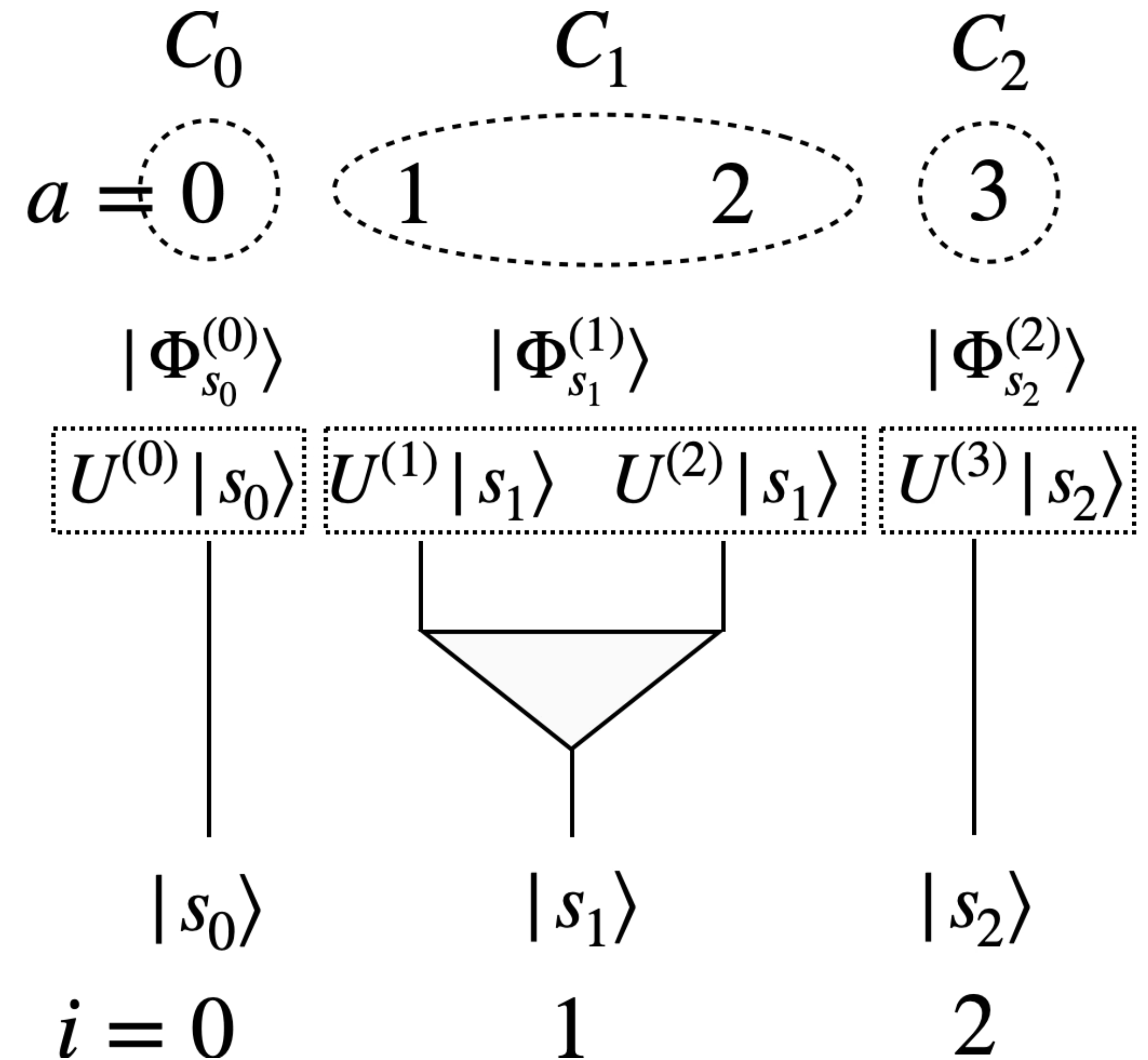
Rescaling as isometry

$$V := \bigotimes_{i=0}^{N-1} V_i$$

$$V_i = \int \mathcal{D}\phi_i \left(\bigotimes_{i \in C_i} U^{(i)} |\phi_i\rangle \right) \langle \phi_i |$$

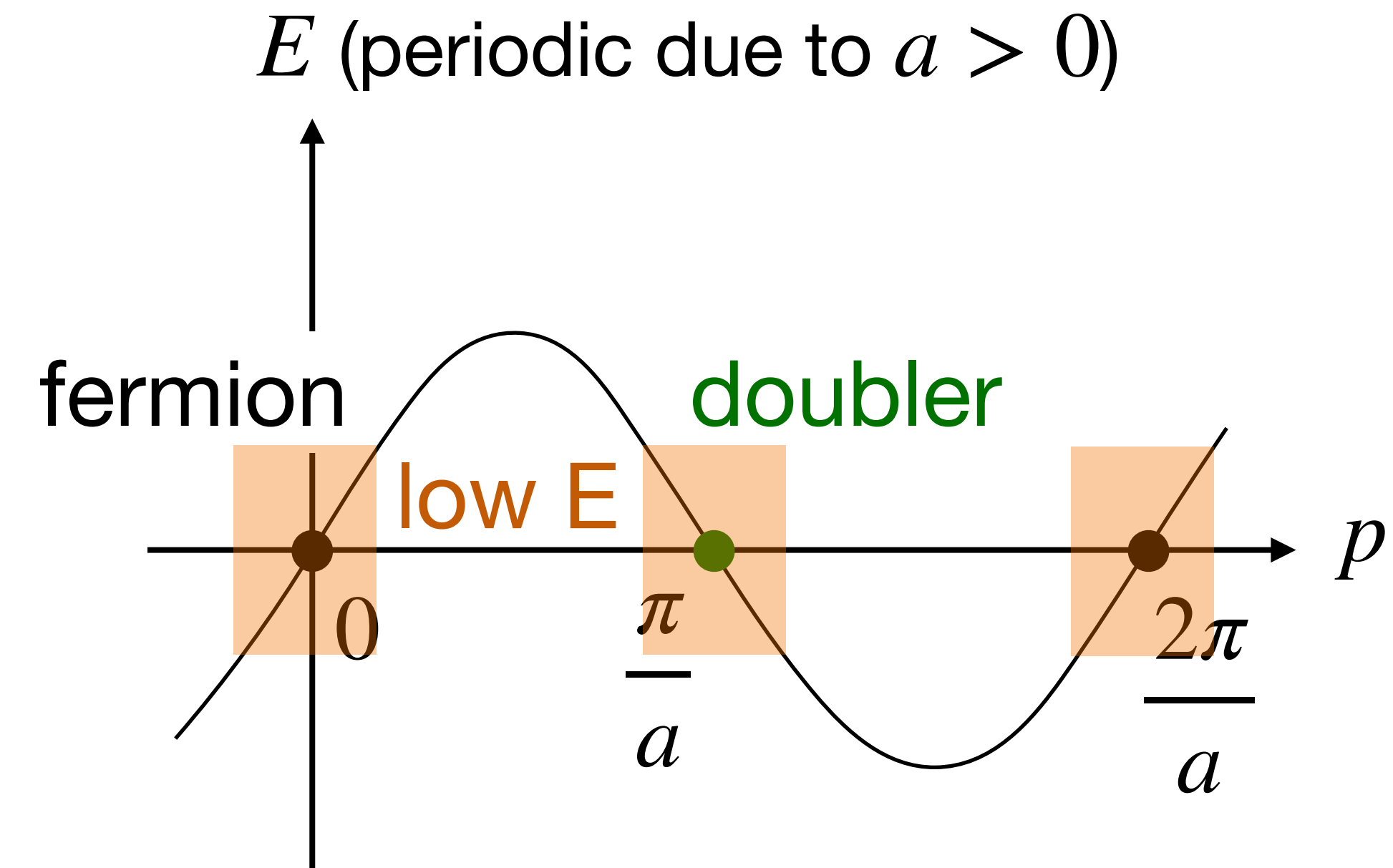
✓ does not generate a momentum-space entanglement

✓ becomes unitary in infinite modes limit



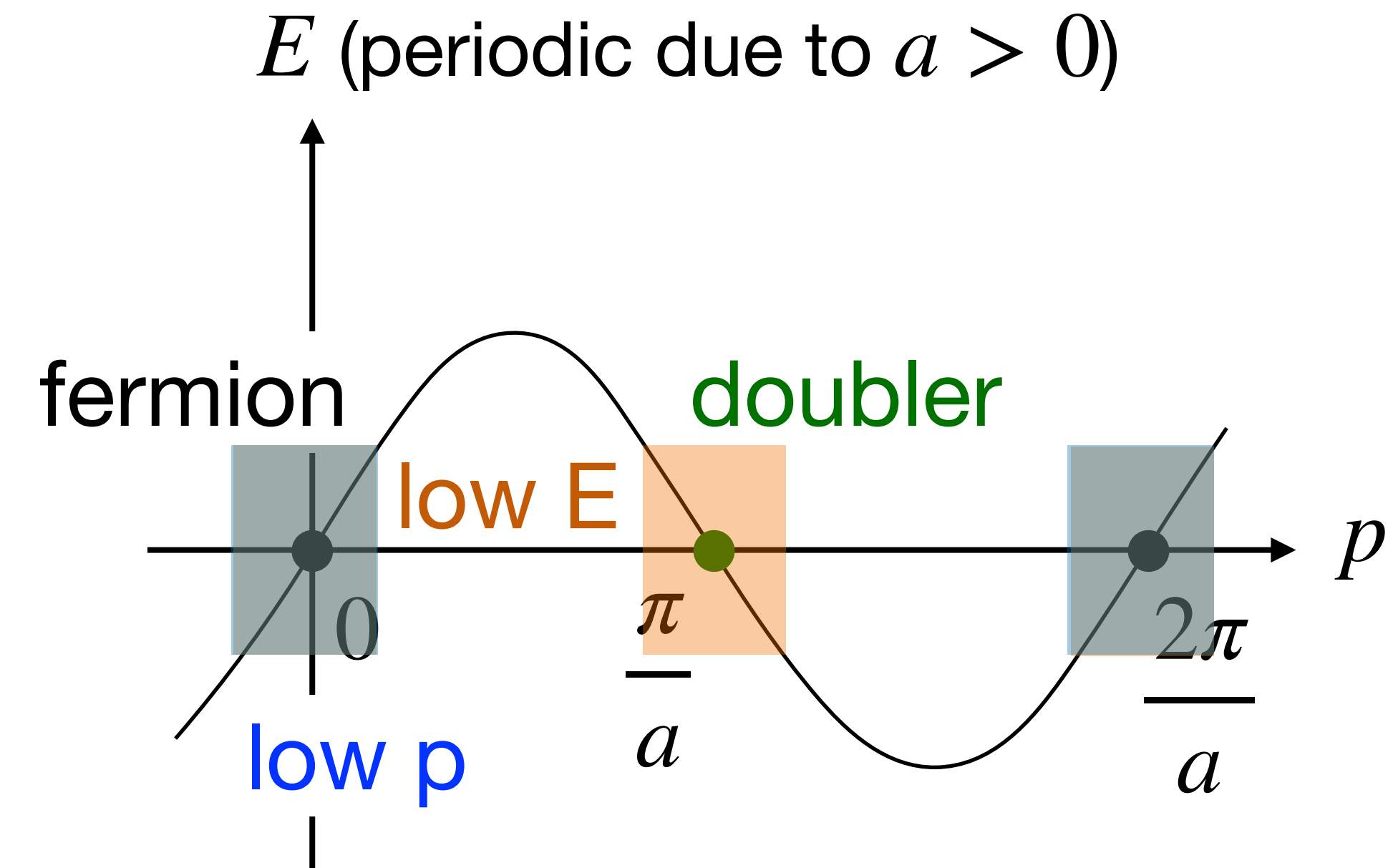
Information to Algebra

- IRG still assumes a tensor product structure $\mathcal{H} = \mathcal{H}_< \otimes \mathcal{H}_>$
- Beyond free theories, tensor product structure is not guaranteed
- Without translational invariance, momentum $\neq$ energy



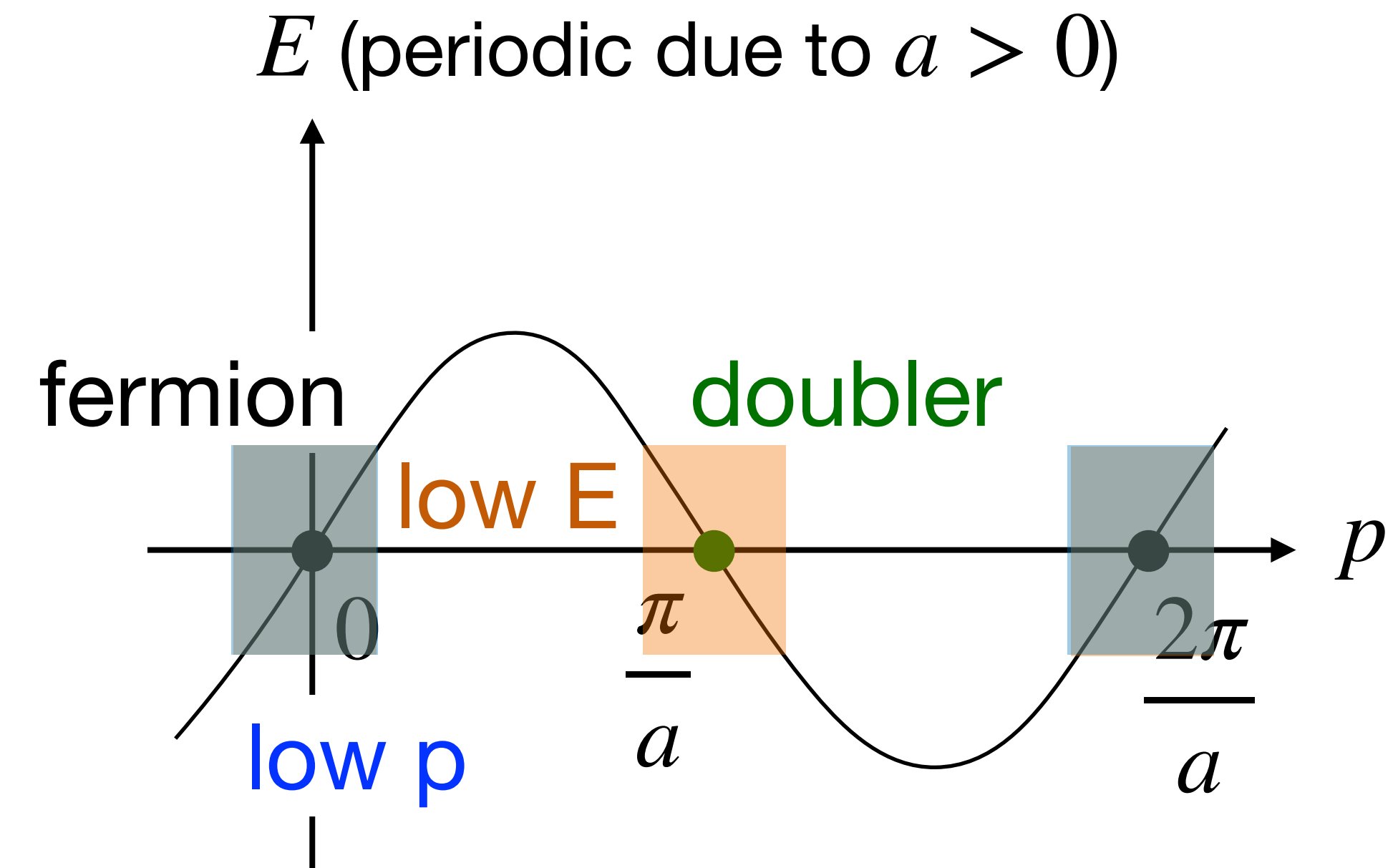
Information to Algebra

- IRG still assumes a tensor product structure $\mathcal{H} = \mathcal{H}_< \otimes \mathcal{H}_>$
- Beyond free theories, tensor product structure is not guaranteed
- Without translational invariance, momentum $\neq$ energy



Information to Algebra

- IRG still assumes a tensor product structure $\mathcal{H} = \mathcal{H}_< \otimes \mathcal{H}_>$
- Beyond free theories, tensor product structure is not guaranteed
- Without translational invariance, momentum $\neq$ energy



We first need to define “low/high energy”... What does it mean?

Algebraic RG (ARG)

We should distinguish two notions of energy:

- Total energy: $E = \int_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}}$
- Modewise energy = one-particle energy $\omega_{\mathbf{p}}$ ← ‘energy’ in Wilsonian RG

Collective excitations can carry a large amount of energy but this is not a UV phenomenon, e.g. electromagnetism

Algebraic RG (ARG)

1. Choose 'one-particle' (1p) excitations

$$S_{1p} = \{\mathbf{1}\} \cup \{O_i\}_i \Rightarrow \mathcal{V}_1 = \text{span}\{S_{1p}\}$$

s.t. they are separating on $|\Omega\rangle$

→ Define 1p Hilbert space & projector

$$\mathcal{H}_1 = \text{span}\{O|\Omega\rangle \mid O \in \mathcal{V}_1\}, \quad P_1\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$$

→ 1p Hamiltonian $H_1 = P_1HP_1 = \sum_i \varepsilon_i |\varepsilon_i\rangle\langle\varepsilon_i|$

In free theory

$$\{a_p^\dagger |\Omega\rangle = |p\rangle\}_p$$

$$P_1 = \sum_p |p\rangle\langle p|$$

$$\sum_p \frac{3\omega_p}{2} |p\rangle\langle p|$$

Algebraic RG (ARG)

In free theory

1. Choose 'one-particle' (1p) excitations

$$S_{1p} = \{\mathbf{1}\} \cup \{O_i\}_i \Rightarrow \mathcal{V}_1 = \text{span}\{S_{1p}\}$$

s.t. they are separating on $|\Omega\rangle$

- Define 1p Hilbert space & projector

$$\mathcal{H}_1 = \text{span}\{O|\Omega\rangle \mid O \in \mathcal{V}_1\}, \quad P_1 \mathcal{H} = \mathcal{H}_1$$

- 1p Hamiltonian $H_1 = P_1 H P_1 = \sum_i \varepsilon_i |\varepsilon_i\rangle\langle\varepsilon_i|$

2. Low-E 1p projection & Hilbert space

$$P_{1,L} = \sum_{\varepsilon_i \leq \Lambda} |\varepsilon_i\rangle\langle\varepsilon_i| \Rightarrow \mathcal{H}_{1,L} = P_{1,L} \mathcal{H}_1$$

- Low-E 1p generators $\mathcal{V}_{1,L} = \{O \in \mathcal{V}_1 \mid O|\Omega\rangle \in \mathcal{H}_{1,L}\}$

$$\{a_p^\dagger |\Omega\rangle = |p\rangle\}_p$$

$$P_1 = \sum_p |p\rangle\langle p|$$

$$\sum_p \frac{3\omega_p}{2} |p\rangle\langle p|$$

$$P_{1,L} = \sum_{p \leq \Lambda} |p\rangle\langle p| \quad |p \leq \Lambda\rangle \in \mathcal{H}_{1,L}$$

$$a_{p \leq \Lambda}^\dagger$$

Algebraic RG (ARG)

In free theory

3. Isometric 1p rescaling

$$\tilde{\mathcal{V}}_{1,L} = W \mathcal{V}_{1,L} W^\dagger, \quad W = \sum_i \left(\frac{1}{\sqrt{m_i}} \sum_{a \in B_i} |\varepsilon_a\rangle \right) \langle \varepsilon_i|$$

$$W = \int_p |p\rangle \langle e^{-s}p|$$

Algebraic RG (ARG)

In free theory

3. Isometric 1p rescaling

$$\tilde{\mathcal{V}}_{1,L} = W \mathcal{V}_{1,L} W^\dagger, \quad W = \sum_i \left(\frac{1}{\sqrt{m_i}} \sum_{a \in B_i} |\varepsilon_a\rangle \right) \langle \varepsilon_i|$$

$$W = \int_p |p\rangle \langle e^{-s} p|$$

4. Double/relative commutant $\rightarrow$ low/high-E algebra

$$\mathcal{A}_L = (\tilde{\mathcal{V}}_{1,L} \cup \tilde{\mathcal{V}}_{1,L}^\dagger)'' \quad \mathcal{A}_H = \mathcal{A}'_L \cap \mathcal{A}$$

$$O_{<} \otimes \mathbf{1}_{>} \in \mathcal{A}_L \quad \mathbf{1}_{<} \otimes O_{>} \in \mathcal{A}_H$$

RG is realized as a conditional expectation on $\mathcal{A}_L$.

Algebraic RG (ARG)

✓ Applicable to any systems

- No tensor factorization assumed. Not limited to ∞ dim or continuum.
- Definition of ‘particle’ can be arbitrary. e.g. single-site Pauli op.
- ‘Hamiltonian’ need not be a physical one. e.g. $\sqrt{H^2 - \mathbf{P}^2}$ (Lorentz invariant)

Resource theory

Resource theory clarifies *which* operations can make use of *what* resources of states.

Resource theory

Resource theory clarifies *which* operations can make use of *what* resources of states.

Given an operation Δ , which we call the resource-destroying map (RDM),

- **Free states** $\forall \rho \in \mathcal{F}(\Delta)$ leave invariant under Δ :

$$\Delta(\rho) = \rho \quad (\text{free states have no resource to be destroyed})$$

Resource theory

Resource theory clarifies *which* operations can make use of *what* resources of states.

Given an operation Δ , which we call the resource-destroying map (RDM),

- **Free states** $\forall \rho \in \mathcal{F}(\Delta)$ leave invariant under Δ :

$$\Delta(\rho) = \rho \quad (\text{free states have no resource to be destroyed})$$

- (A broader class of) **free operations** are those commuting with Δ :

$$\mathcal{E} \circ \Delta = \Delta \circ \mathcal{E} \quad (\text{free operations do not generate any resource that can be destroyed})$$

If ρ is a free state, $\Delta(\mathcal{E}(\rho)) = \mathcal{E}(\Delta(\rho)) = \mathcal{E}(\rho)$ so free operations does not generate any resources for free states.

Resource theory

Resource theory clarifies *which* operations can make use of *what* resources of states.

Given an operation Δ , which we call the resource-destroying map (RDM),

- **Free states** $\forall \rho \in \mathcal{F}(\Delta)$ leave invariant under Δ :

$$\Delta(\rho) = \rho \quad (\text{free states have no resource to be destroyed})$$

- (A broader class of) **free operations** are those commuting with Δ :

$$\mathcal{E} \circ \Delta = \Delta \circ \mathcal{E} \quad (\text{free operations do not generate any resource that can be destroyed})$$

If ρ is a free state, $\Delta(\mathcal{E}(\rho)) = \mathcal{E}(\Delta(\rho)) = \mathcal{E}(\rho)$ so free operations does not generate any resources for free states.

- **Resource** of free states should be zero $\mathcal{R}(\mathcal{F}) = 0$ and **resource** of states never increase under free operations

$$0 \leq \mathcal{R}(\mathcal{E}(\rho)) \leq \mathcal{R}(\rho), \quad \forall \rho \quad \Delta \in \mathcal{E}$$

Resource theory

Resource theory clarifies *which* operations can make use of *what* resources of states.

Given an operation Δ , which we call the resource-destroying map (RDM),

- **Free states** $\forall \rho \in \mathcal{F}(\Delta)$ leave invariant under Δ :

$$\Delta(\rho) = \rho \quad (\text{free states have no resource to be destroyed})$$

- (A broader class of) **free operations** are those commuting with Δ :

$$\mathcal{E} \circ \Delta = \Delta \circ \mathcal{E} \quad (\text{free operations do not generate any resource that can be destroyed})$$

If ρ is a free state, $\Delta(\mathcal{E}(\rho)) = \mathcal{E}(\Delta(\rho)) = \mathcal{E}(\rho)$ so free operations does not generate any resources for free states.

- **Resource** of free states should be zero $\mathcal{R}(\mathcal{F}) = 0$ and **resource** under free operations

$$0 \leq \mathcal{R}(\mathcal{E}(\rho)) \leq \mathcal{R}(\rho), \quad \forall \rho$$

Quantify resource $\mathcal{R}$
given Δ ?

Example: Entanglement as resource. Local Operations and Classical Communication (LOCC) is free operations. Separable states are free.

Resource theory of RG

Consider the Cesàro mean of each RG step $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G}_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathcal{G}^n \quad (\text{long time average})$$

This becomes the IR limit when it exists. Even if the IR limit does not exist (e.g. limit cycles), the RDM exists.

One can show that $\mathcal{G}_\infty(\rho) = \rho$ iff $\rho \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$. So $\mathcal{G}_\infty = \Delta$ (RDM).

Resource theory of RG

Consider the Cesàro mean of each RG step $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G}_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathcal{G}^n \quad (\text{long time average})$$

This becomes the IR limit when it exists. Even if the IR limit does not exist (e.g. limit cycles), the RDM exists.

One can show that $\mathcal{G}_\infty(\rho) = \rho$ iff $\rho \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$. So $\mathcal{G}_\infty = \Delta$ (RDM).

With this, one can information theoretically identify the resource monotone of RG:

$$\mathcal{R}(\rho) := D(\rho || \mathcal{G}_\infty(\rho)) \quad \text{relative entropy from the IR limit}$$