宇宙の端の対称性

京都大学理学研究科 素粒子論研究室D1 清水慧人

2025/05/21 @東京女子大学理論物理研究室セミナー

宇宙の端の対称性

ココ

京都大学理学研究科 素粒子論研究室D1 清水慧人

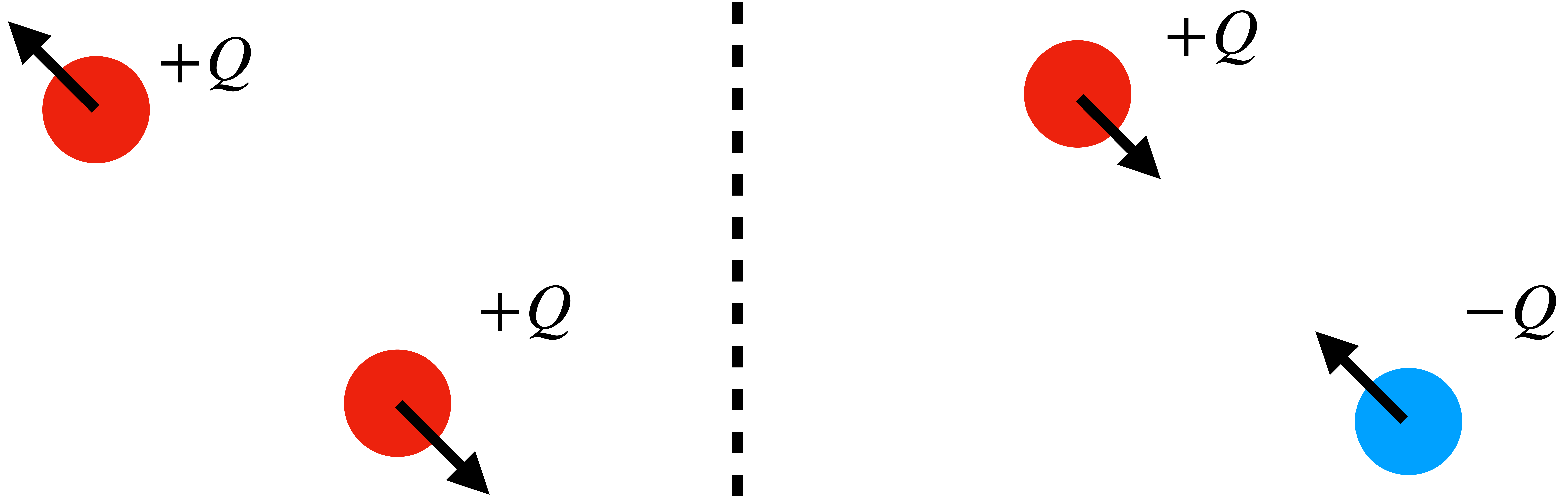
2025/05/21 @東京女子大学理論物理研究室セミナー

目次

目次

電磁気学を思い出す

電荷を持った物体は**クーロン力**を及ぼしあう

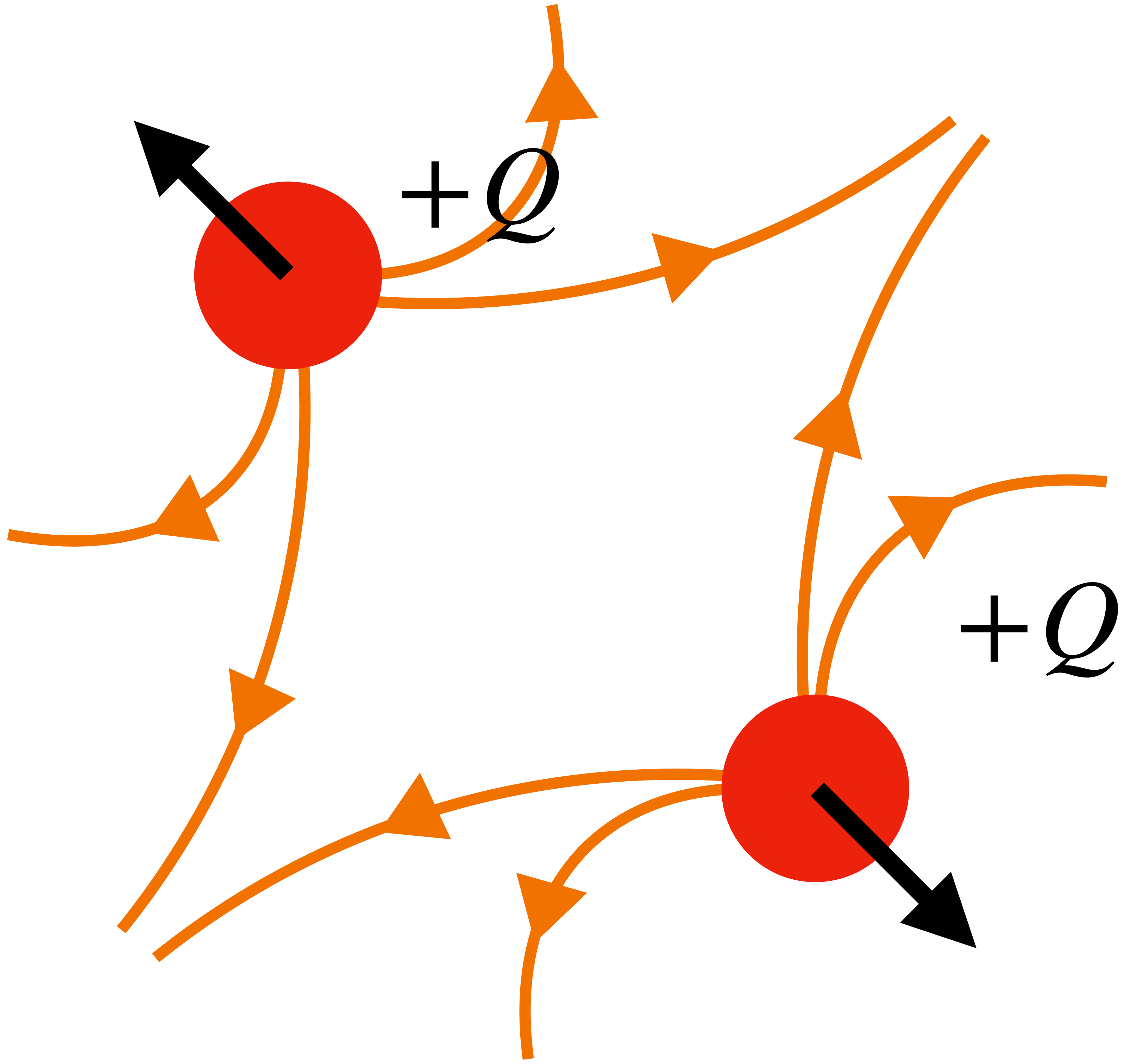


電荷が同符号なら斥力

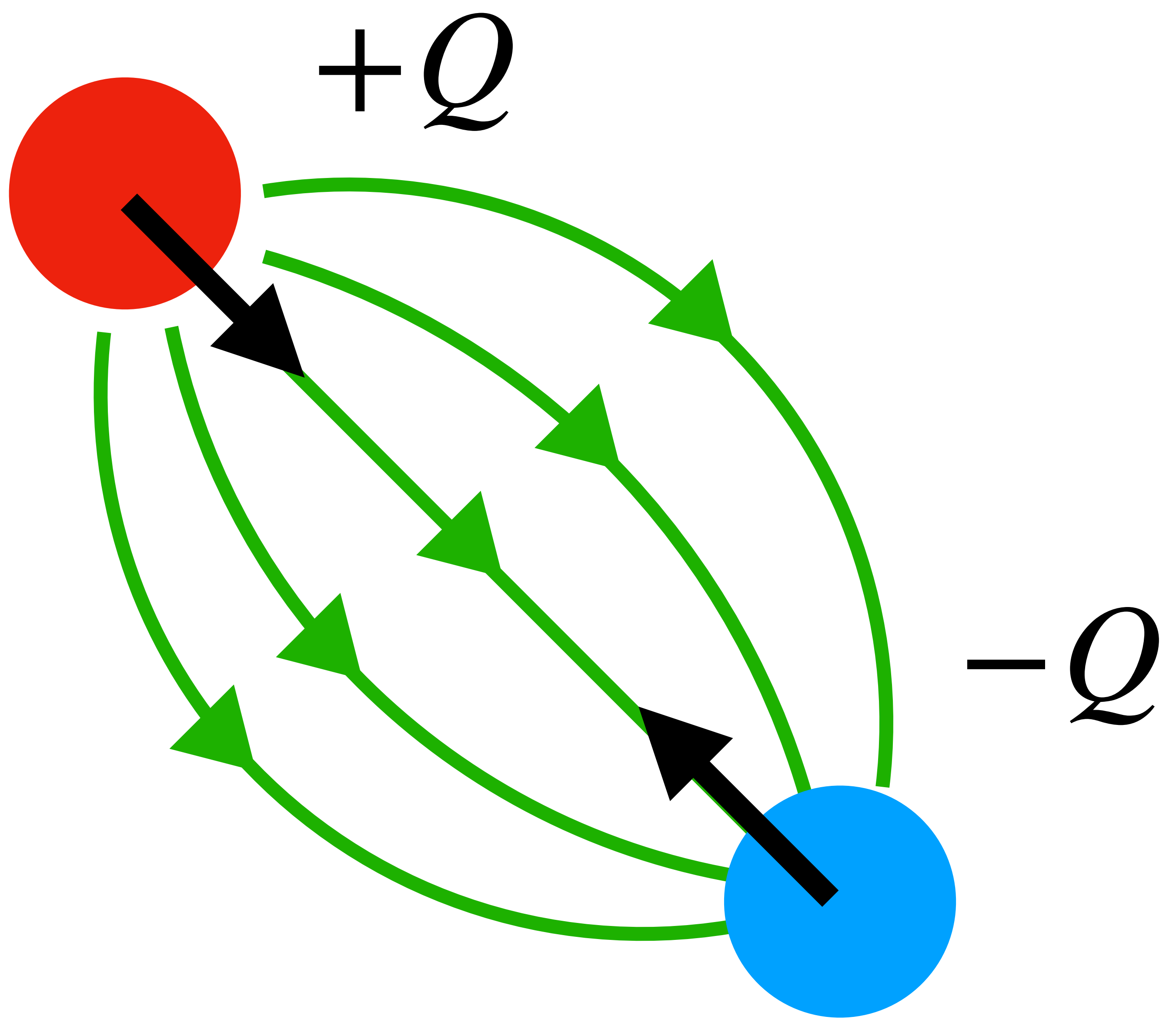
電荷が異符号なら引力

電磁気学を思い出す

もう少し有用な見方: 電荷は**電磁場**を生む



電荷が同符号なら斥力



電荷が異符号なら引力

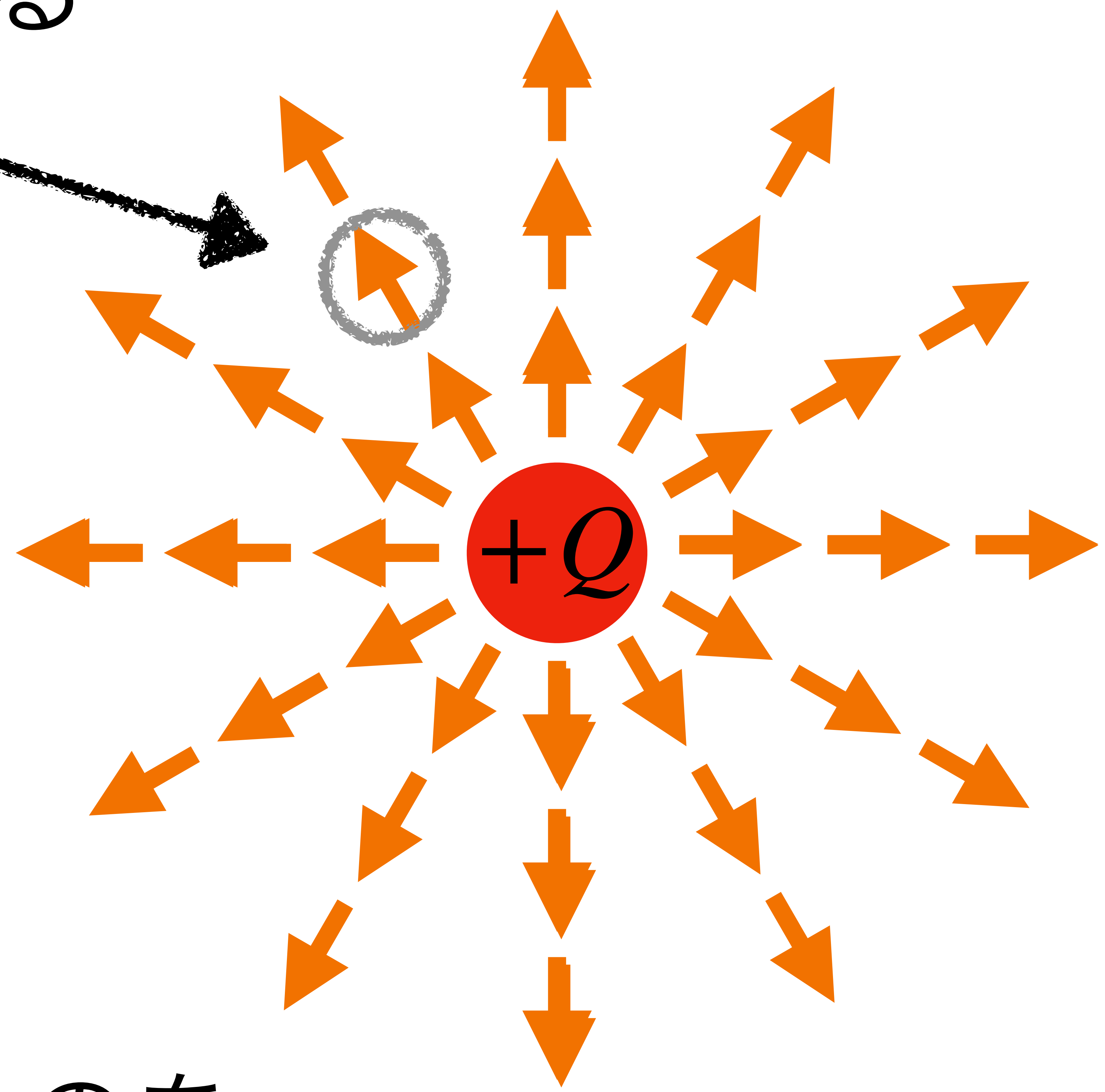
電磁気学を思い出す

電荷があると空間の至る所に電場ができる

電場 $\vec{E} = \vec{E}(t, x)$

…時間/場所 (t, x)を指定すると

ベクトルが得られる



＊時間/場所を指定するとXが得られるものを

X**場**という(X: スカラー、ベクトル、テンソル etc…)

電磁気学を思い出す

電磁気学の4つの基礎方程式: **Maxwell方程式**

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ 電荷があると電場ができる

$$\nabla \cdot B = 0$$ 磁荷はない

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$ 磁場を変えると電場が生じる

$$\nabla \times B = -\mu_0 j + \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}\frac{\partial E}{\partial t}$$ 電場を変えたり
電流があると磁場が生じる

電磁気学を思い出す

電場と磁場の代わりに**ポテンシャル場** (ϕ, A)を導入してもいい

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \phi$$

電位

$$B = \nabla \times A$$

変数を取り替えただけだから物理は変わらない

電磁気学を思い出す

でも、ポテンシャルの取り方は1通りには定まらない:

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla\phi \qquad B = \nabla \times A$$

は

$$\phi \to \phi + \frac{\partial \alpha}{\partial t} \qquad A \to A + \nabla\alpha$$

$\alpha(t, x)$: 時間/空間の関数

という変換(ゲージ変換)に対して不変

電磁気学を思い出す

4元ポテンシャル $A^\mu = (\phi, A)$ を使うと美しく書ける

電場と磁場:

$$E_i = F_{0i}$$

$$B_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk}$$

場の強さ

$$(F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$$

電荷と電流をまとめた

Maxwell方程式:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu$$

$$j^\mu = (\rho, j)$$

ゲージ変換:

$$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \alpha$$

電磁気学を思い出す

いろんな関係式が出てきてしまった…

解析力学の教え:

「手持ちの情報を詰め込んだ**Lagrangian**を書き下せ」

- 理論はベクトル場 A^μ で書ける
- 理論はゲージ変換に対し不変である
- 運動方程式は2階の微分方程式

実はこれだけで電磁気学は特徴づけられてしまう

電磁気学を思い出す

先の3つの要請**だけ**からLagrangianが決まる(係数は調節):

$$\mathscr{L}_{\mathrm{Max}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$(F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$

電流と電磁場の相互作用の仕方も決まる:

$$\mathscr{L}_{\mathrm{int}} = A^\mu j_\mu$$

電荷の保存則 $\partial_\mu j^\mu = 0$

からゲージ不変

$\mathscr{L}_{\mathrm{Max}} + \mathscr{L}_{\mathrm{int}}$ から出る運動方程式がMaxwell方程式

電磁気学まとめ

電磁気学のもろもろは次のLagrangianから全部出る:

$$\boxed{\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A^{\mu}j_{\mu}}$$

電場・磁場

$$(F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu})$$

ソースとしての

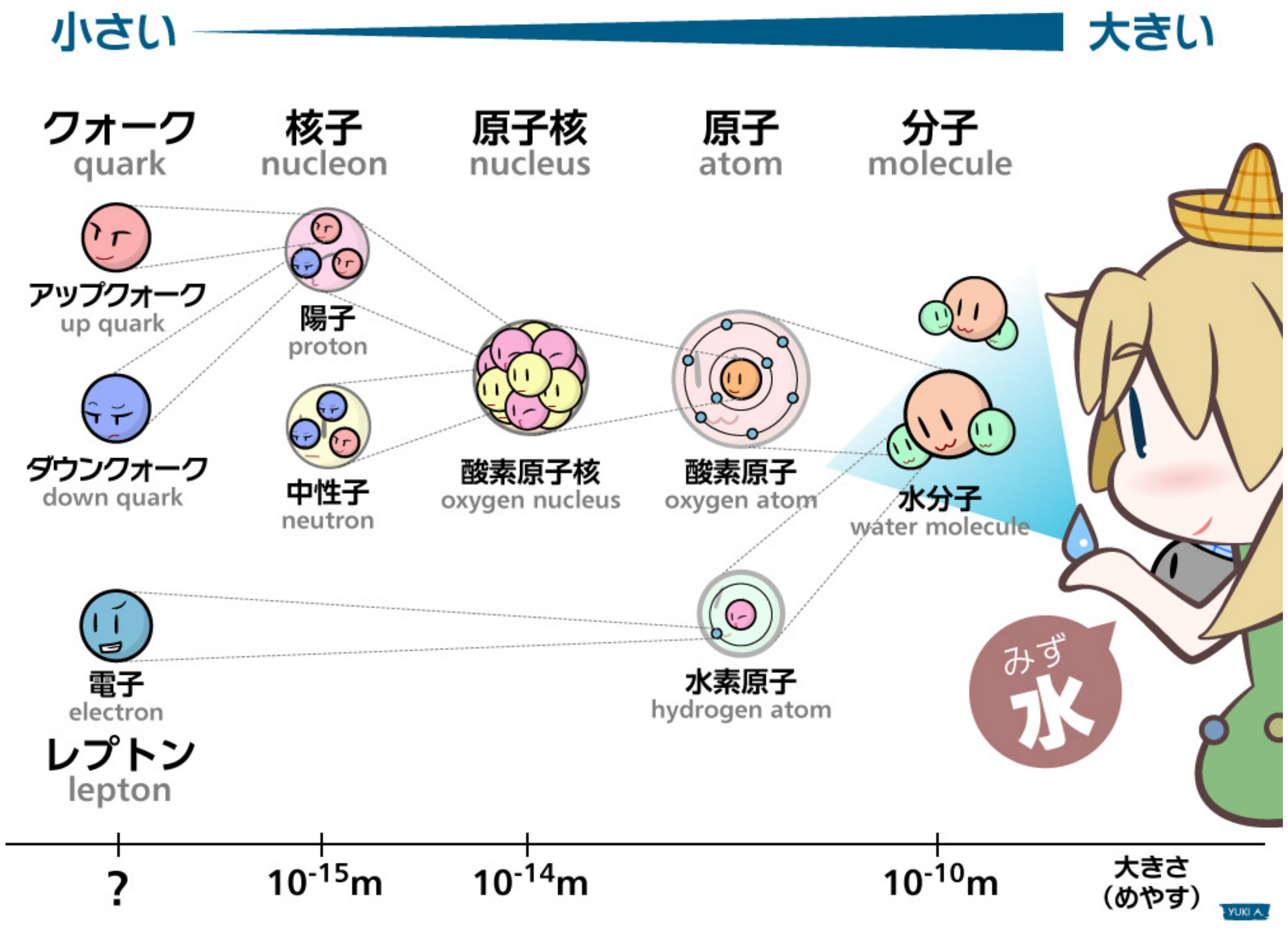
電荷・電流

しかもこのLagrangianは3つの要請

(ベクトル場、ゲージ不変性、微分階数)だけで決まった

Less is essential(?)

ところで、世の中の全てのものは砕いていくと素粒子になる



設計図の作り方

実は、素粒子たちの運動法則も**ゲージ対称性**から大体決まる

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{SM}} = & -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}W^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \\
& + \bar{Q}i\gamma^{\mu}D_{\mu}Q + \bar{L}i\gamma^{\mu}D_{\mu}L \\
& + \overline{u_R}i\gamma^{\mu}D_{\mu}u_R + \bar{d}_R i\gamma^{\mu}D_{\mu}d_R + \overline{e_R}i\gamma^{\mu}D_{\mu}e_R \\
& + \left(D^{\mu}\Phi\right)^{\dagger}\left(D_{\mu}\Phi\right) - \lambda\left(\Phi^{\dagger}\Phi - \frac{1}{2}v^2\right)^2 \\
& + \left\{+Y_u\bar{Q}\tilde{\Phi}u_R + Y_d\bar{Q}\Phi d_R + Y_e\bar{L}\Phi e_R + \ \mathrm{H.c.}\right\}
\end{aligned}
$$

https://www-hep.phys.se.tmu.ac.jp/FPWS2014/uploads/1-SM_Tsumura.pdf より

設計図の作り方

実は、素粒子たちの運動法則も**ゲージ対称性**から大体決まる

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{SM}} = & \boxed{-\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_{\mu\nu}W^{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}} \\
& \boxed{\begin{aligned}&+ \bar{Q}i\gamma^{\mu}D_{\mu}Q + \bar{L}i\gamma^{\mu}D_{\mu}L \\ &+ \overline{u_R}i\gamma^{\mu}D_{\mu}u_R + \bar{d}_R i\gamma^{\mu}D_{\mu}d_R + \overline{e_R}i\gamma^{\mu}D_{\mu}e_R\end{aligned}} \\
& + \left(D^{\mu}\Phi\right)^{\dagger}\left(D_{\mu}\Phi\right) - \lambda\left(\Phi^{\dagger}\Phi - \frac{1}{2}v^2\right)^2 \\
& + \left\{+Y_u\bar{Q}\tilde{\Phi}u_R + Y_d\bar{Q}\Phi d_R + Y_e\bar{L}\Phi e_R + \text{H.c.}\right\}
\end{aligned}
$$

$\mathscr{L}_{\mathrm{Max}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ の部分

$\mathscr{L}_{\mathrm{int}} = A^{\mu}j_{\mu}$ の部分

https://www-hep.phys.se.tmu.ac.jp/FPWS2014/uploads/1-SM_Tsumura.pdf より

ゲージ場の理論

ゲージ対称性がある場の理論: **ゲージ場の理論**

→ 素粒子標準模型はゲージ場の理論で記述されている

電磁気学での実現を電子を入れてもう一度:

電子の場: $\psi(x) \to e^{ie\alpha(x)}\psi(x)$

電磁場: $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$

に対し不変な理論

$$\boxed{\mathscr{L}_{\mathrm{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}$$

Part 1のまとめ

- 電磁気学は電磁場という**場の理論**で書かれている

$$(t, x) \to \overrightarrow{E}(t, x)$$

- 電磁場の理論には**ゲージ対称性**という対称性がある

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha$$

- この世の設計図である**素粒子標準模型**は**ゲージ場の理論**である

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + A_\mu j^\mu$$

目次

対称性はあると言ったけど…

電磁気学のLagrangian

$$\mathscr{L}_{\mathrm{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

は次の局所対称性に対し不変だった:

$$\psi(x) \to e^{ie\alpha(x)}\psi(x) \qquad A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x)$$

この不変性(対称性)の物理的な意味は？

まずは定数変換の場合

実は、対称性があると何かしらが保存する(**Noetherの定理**)

例1) 時間推進対称性→エネルギー保存

例2) 空間並進対称性→運動量保存

Gaussの法則
(電荷を見るには
電場を積分せよ)

今回の場合は**電荷**:

$$Q = \int d^3x \ \partial_i F^{0i} = \int dS_i \ E^i$$

これは定数のゲージ変換($\alpha = \mathrm{const.}$)に対応

局所的変換の場合

もちろん、α が関数の時も保存量はある(**Noetherの第二定理**)

$$Q_\Sigma[\alpha] = \int d\Sigma_\mu \partial_\nu (\alpha \cdot F^{\mu\nu})$$

意味: ある面 Σ 上で電磁場と
変換パラメータを掛けて積分せよ

が、エネルギーの有限性から遠くでは

$$F^{\mu\nu} \to 0$$

となるので意味のある α は限られる

舞台の話

意味のある α を考えるために理論の舞台(時空)を考える

これまでは暗に**平坦な時空**を考えていた

別名: Minkowski時空

Minkowski時空の定義式:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

(時空を定義するには時空間の距離の計算方法を与えればいい)

舞台の話

物理的にはMinkowski時空は無限に広い空っぽな宇宙

何もない…

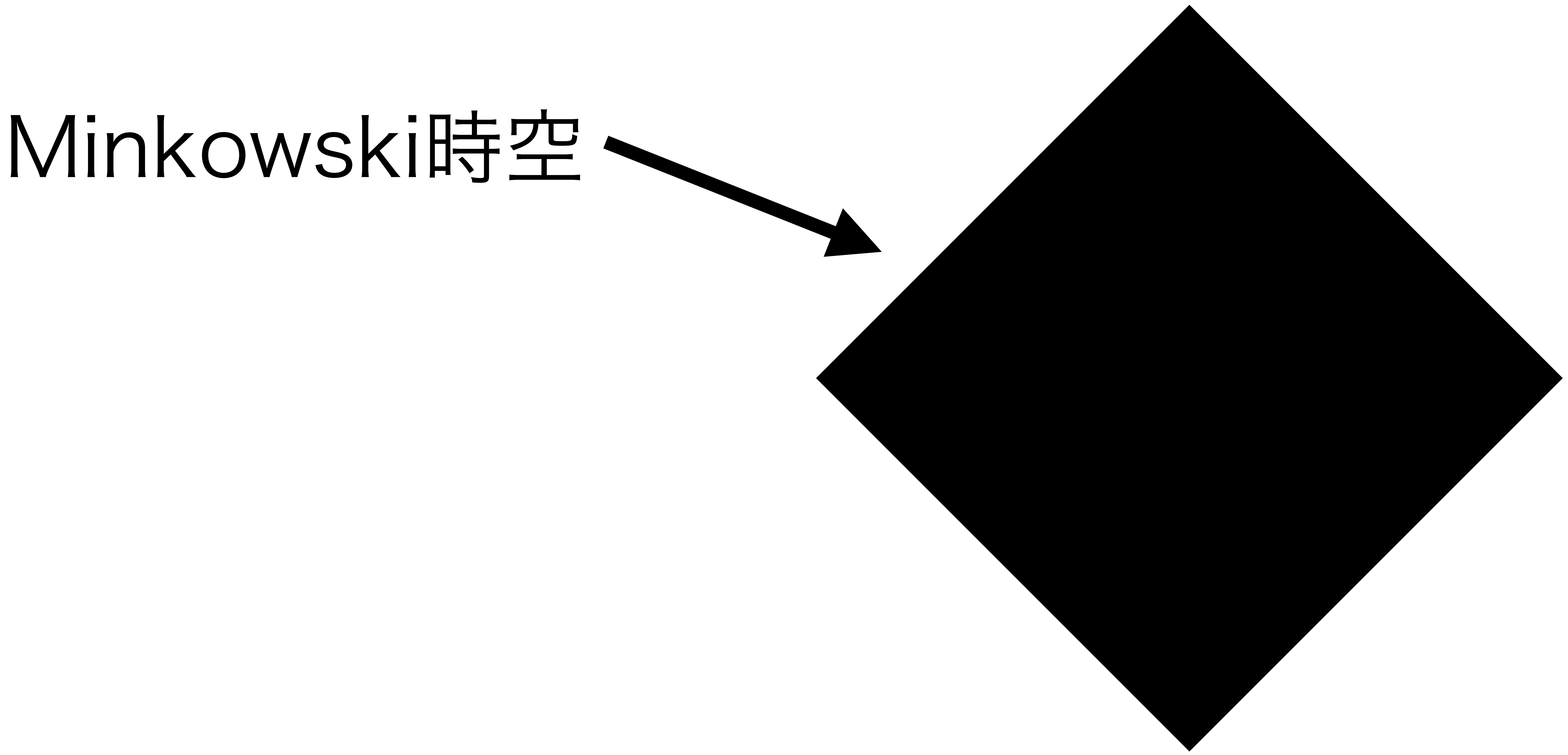
銀河もなければ星もなく、塵もエネルギーもない

空っぽ…

現実の宇宙とは違うけど、実験室を記述するならOK

舞台の話

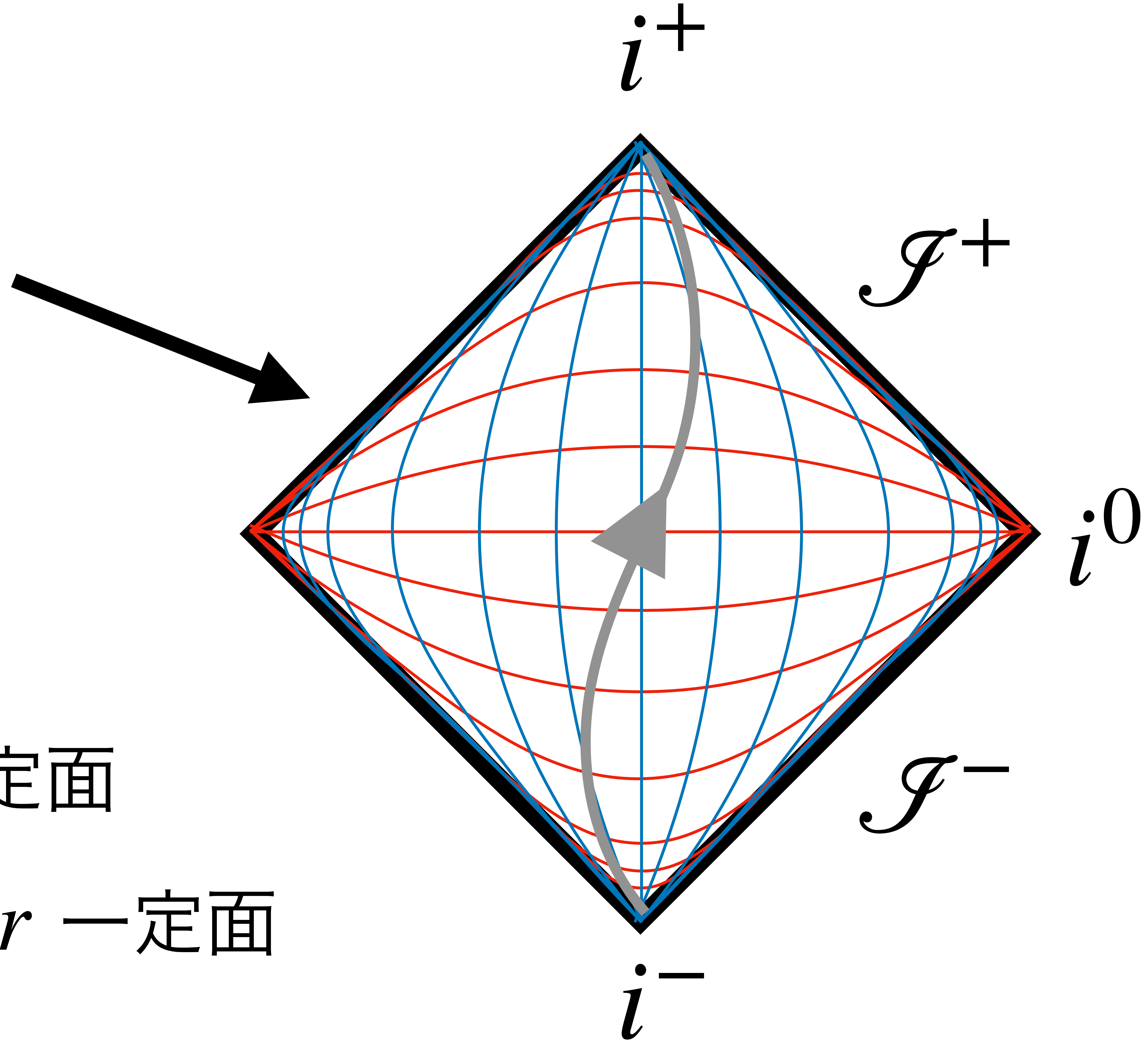
ある変換(共形変換)を使うと端っこ(無限遠)まで紙に書ける



舞台の話

ある変換(共形変換)を使うと端っこ(無限遠)まで紙に書ける

Minkowski時空



横線: 時間 t 一定面

縦線: 動径距離 r 一定面

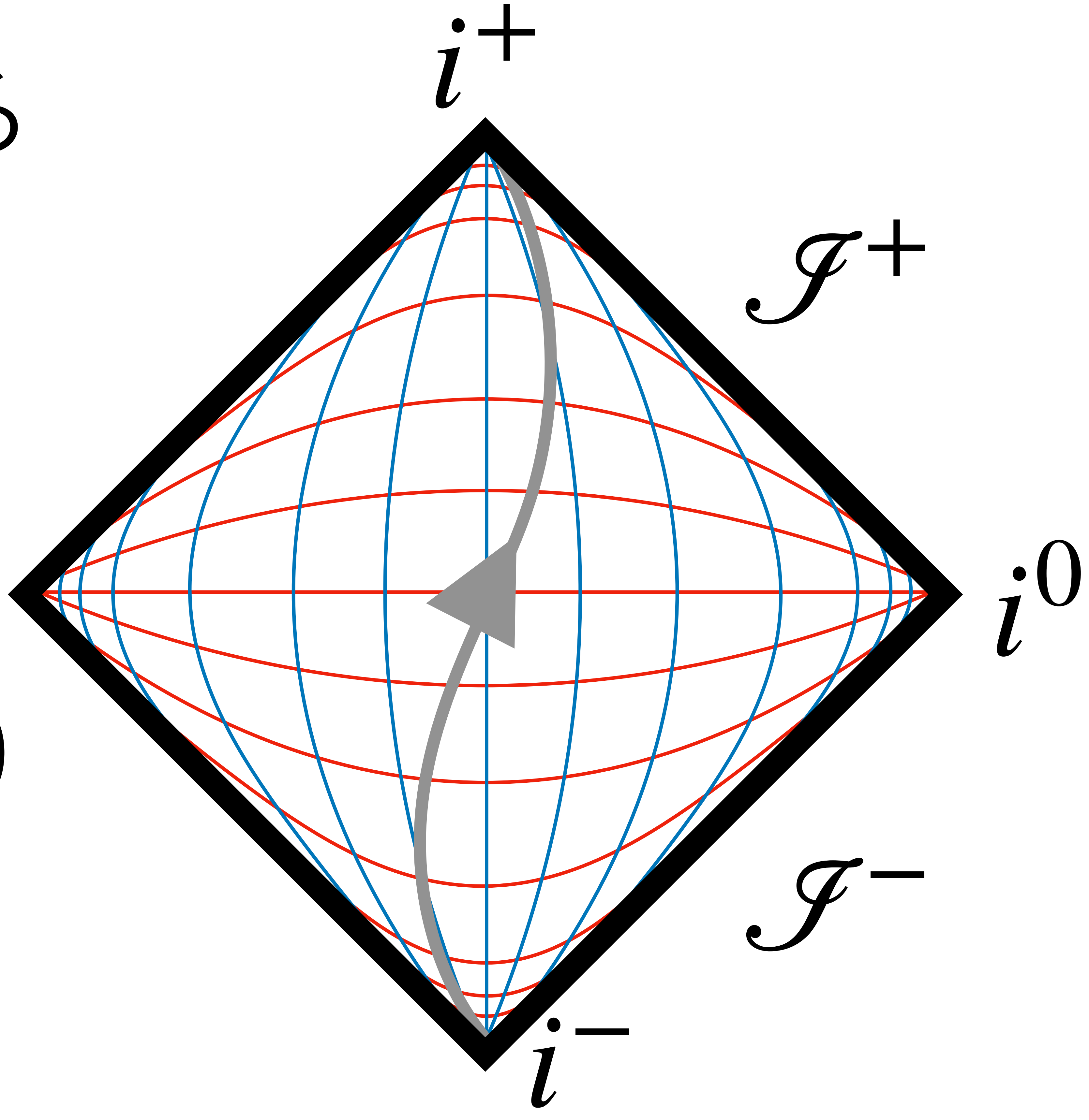
宇宙の端

Minkowski時空には3つの端(無限遠)がある

$i^{\pm}$: **時間的無限遠**、質量のある粒子
が行き着くところ

$\mathscr{I}^{\pm}$: **ヌル無限遠**、質量のない粒子(光子とか)
が行き着くところ

i^{0}: **空間的無限遠**



横線: 時間 t 一定面

縦線: 動径距離 r 一定面

意味のある局所変換は？

保存電荷:

$$Q_\Sigma[\alpha] = \int d\Sigma_\mu \partial_\nu (\alpha \cdot F^{\mu\nu})$$

がゼロにならない変換が意味のある(物理的な)局所変換

つまり、**無限遠で消えるか消えないか**が指標:

$$\alpha(x) \longrightarrow 0$$ ：非物理的な変換

$$\alpha(x) \longrightarrow \text{関数}$$ ：物理的な変換

ココ

宇宙の端の対称性

京都大学理学研究科 素粒子論研究室D1 清水慧人

2025/05/21 @東京女子大学理論物理研究室セミナー

宇宙の端の対称性

講演タイトルの本当の意味

宇宙の端の
(消えない変換は物理的な)
対称性

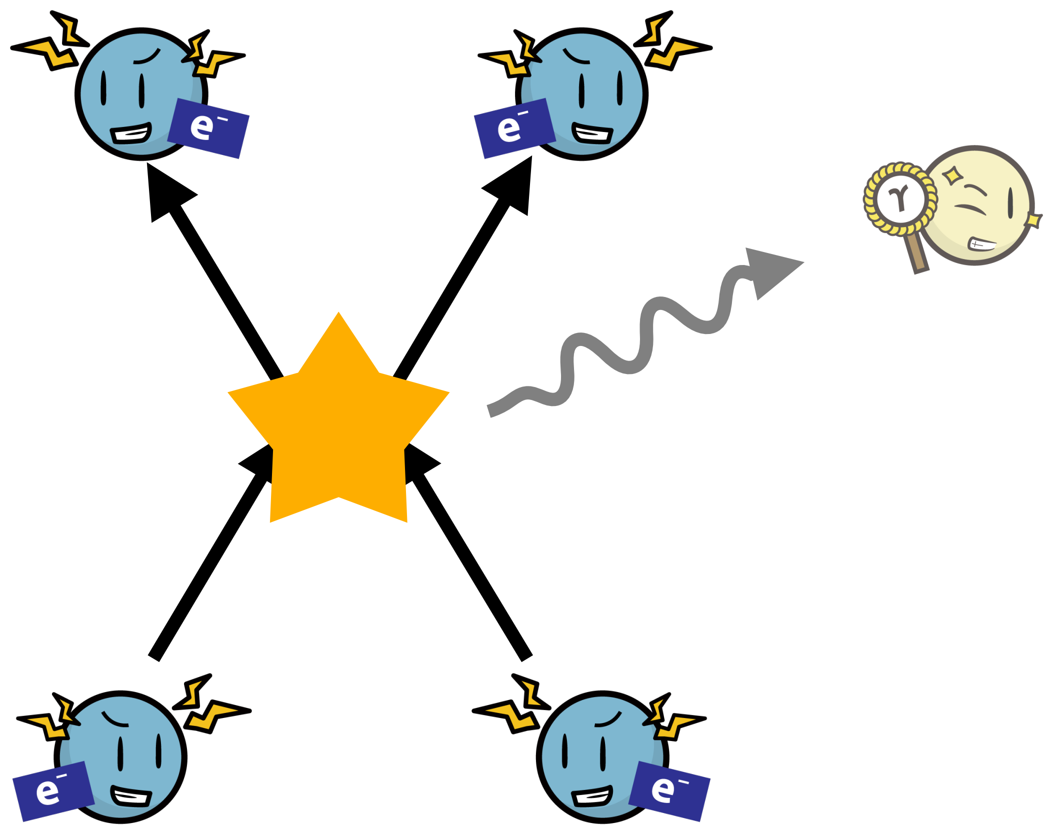
物理的変換の物理的意味

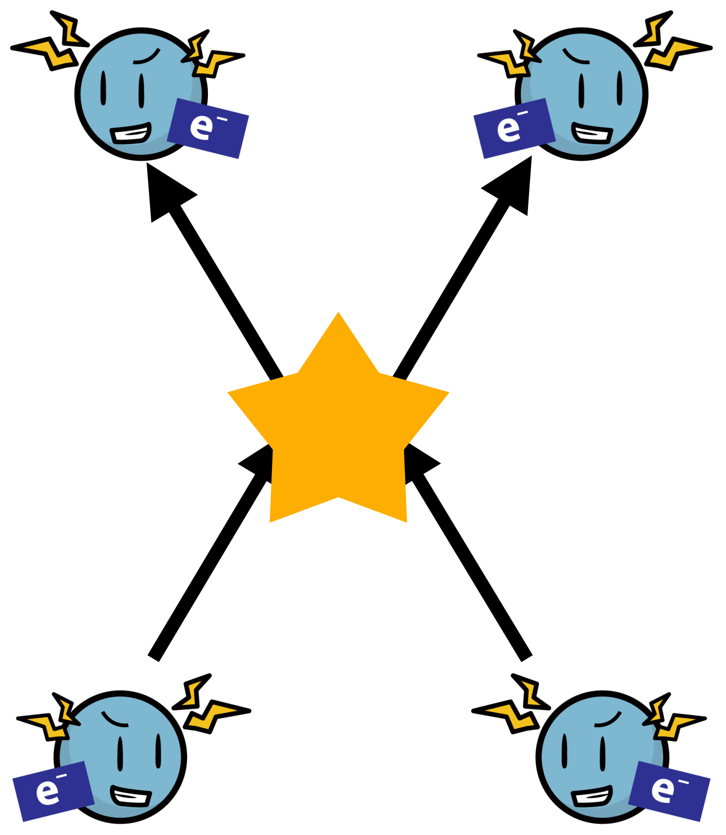
それで、保存電荷が消えない変換の意味は？

→ **soft theoremとmemory effect**

<u>Soft theorem</u> ゼロエネルギー光子が出る過程と

出ない過程は密接に結びつく

$\mathscr{A}$ $\Bigg($ 

$\Bigg) \sim \underline{S} \cdot \mathscr{A}$ $\Bigg($ 

$\Bigg)$

ソフト因子

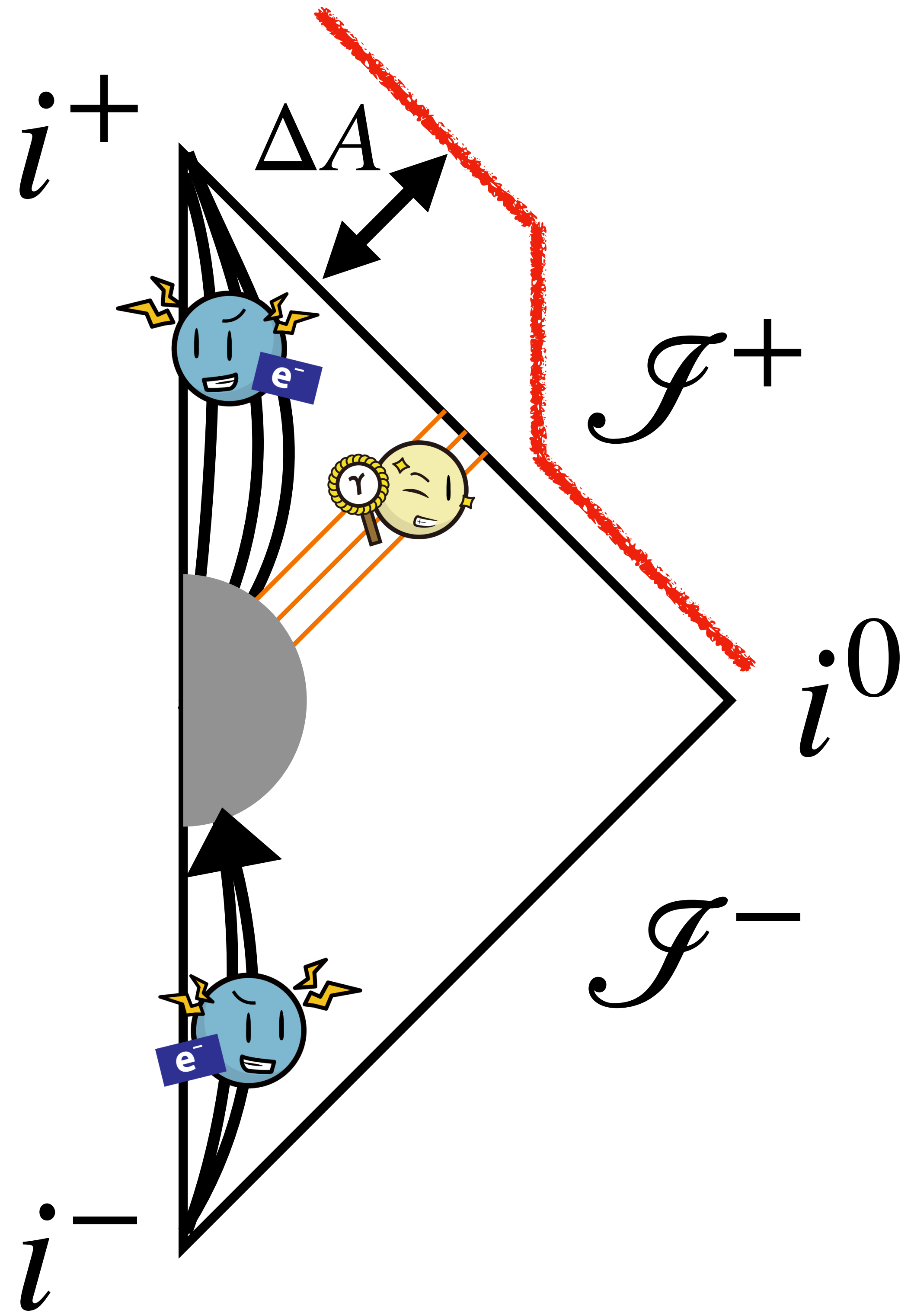
物理的変換の物理的意味

それで、保存電荷が消えない変換の意味は？

→ **soft theoremとmemory effect**

<u>Memory effect</u> 電磁場の放射によって
ヌル無限遠の電磁場が変化

重力波によるmemory effectが有名



物理的変換の物理的意味

それで、保存電荷が消えない変換の意味は？

→ **soft theoremとmemory effect**

<u>Soft theorem</u> ゼロエネルギー光子が出る過程と
出ない過程は密接に結びつく

実は$Q_\Sigma[\alpha]$の保存則と等価

<u>Memory effect</u> 電磁場の放射によって
ヌル無限遠の電磁場が変化

物理的変換の物理的意味

それで、保存電荷が消えない変換の意味は？

$\rightarrow$ **soft theoremとmemory effect**

Soft theorem ゼロエネルギー光子が出る過程と出ない過程は密接に結びつく

赤外三角形

実は$Q_{\Sigma}[\alpha]$の保存則と等価

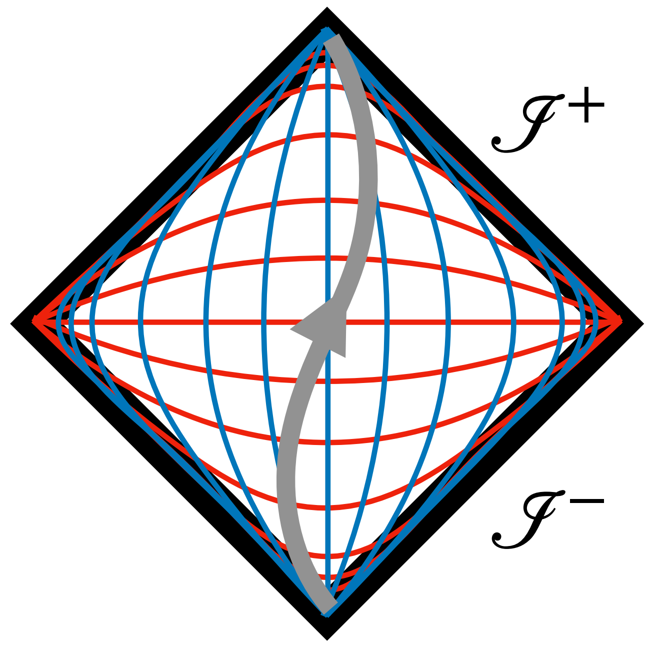
Memory effect 電磁場の放射によってヌル無限遠の電磁場が変化

Part 2まとめ

- 局所(ゲージ)対称性に対して**保存電荷**が定義できた

$$Q[\alpha] = \int d\Sigma_\mu \partial_\nu (\alpha \cdot F^{\mu\nu})$$

- 局所変換には**Minkowski時空**の**無限遠**で**消えるもの**と**消えないもの**があった



- 無限遠で消えない局所対称性の電荷保存則は**soft theorem**や**memory effect**などの物理現象と関わっていた

目次

Part 2までは何を言ってたか

「ゲージ対称性に関して重要なこと:

ゲージ理論における全ての状態は
ゲージ対称性のもとで不変である

この意味で、ゲージ対称性は**対称性ではない**(単に冗長性)」

…とよく言うけれど、

1. ゲージ冗長性は一般には**無限遠で十分早く減衰するもの**だけ
2. 無限遠で残るものは**物理的な対称性**になりうる

総電荷保存、散乱現象

漸近対称性 [Bondi, van der Burg, Metzner 1962, Sachs 1962, Strominger 2013…]

無限遠で十分早く減衰する変換: スモールゲージ変換

無限遠で消えない変換: ラージゲージ変換

漸近対称性(=宇宙の端の対称性)の形式的な定義:

$$\textbf{漸近対称性} = \frac{\text{(境界条件から許される)}\textbf{ラージゲージ変換}}{\textbf{スモールゲージ変換}}$$

＊ゲージ固定をして、残った局所対称性を考えることに対応

ここから研究の話

[KS, Sotaro Sugishita 2025]

やりたかったこと

漸近対称性

この間の関係が知りたい

閉じ込め現象

実際にやったこと in [KS, Sotaro Sugishita 2025]

3次元QEDの漸近対称性

閉じ込めが起きているなら
漸近対称性は**自明に作用**する

3次元QEDの閉じ込め現象

2+1次元電磁気学

ゲージ場の運動方程式
(Lorenzゲージ):

$$\partial_\mu \partial^\mu A_\nu = -j_\nu$$

Green関数$G(x)$
を使うと

$$A_\mu(x) = \int d^d x' \; G(x - x') j_\mu(x')$$

Green関数は次元ごとに異なる:

<u>4次元</u>

$$G(x) = \frac{\delta(t - r)}{4\pi r}$$

<u>3次元</u>

階段関数

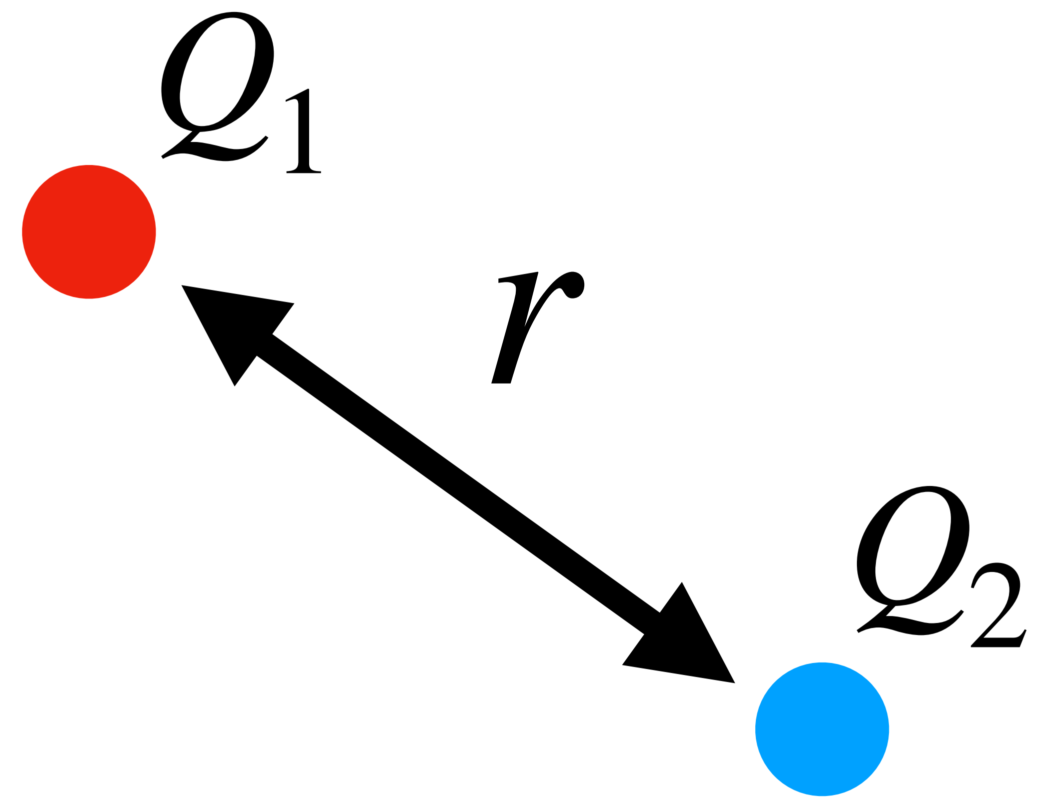
$$G(x) = \frac{\Theta(t - r)}{2\pi\sqrt{t^2 - r^2}}$$

2+1次元電磁気学

2次元空間の電磁ポテンシャル

距離 r だけ離した2つの電荷 Q_1, Q_2 の間の電位:

$$V(r) = Q_1 Q_2 \log \frac{r}{r_0}$$



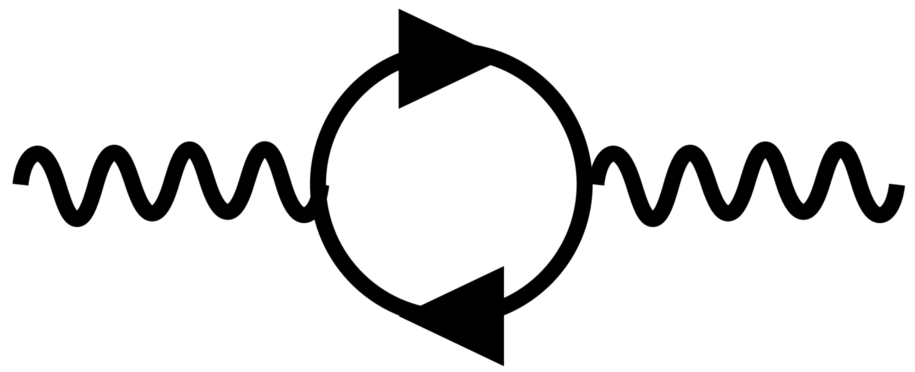
- 無限に離すには**エネルギーが無限に必要**
- **全体で中性**じゃないとエネルギーが無限

$\rightarrow$ logarithmic confinement

2+1次元電磁気学

もちろん量子論では変わることもある:

- フェルミオンによるChern-Simons項の生成



→ Maxwell-Chern-Simons理論では**光子が質量を持つ**

- 質量ゼロのフェルミオンによる遮蔽効果[Burden, Roberts 1991…]

→ ポテンシャルが弱まって**confinementがなくなる**

が、光子質量ゼロ/confinementありのセットアップを考える

閉じ込めが起こる時の漸近対称性

閉じ込めが起きている時は**漸近状態が大きく変質**

例) QCDでは漸近状態はcolor singletしか許されない

➡ 物理的な漸近状態への漸近電荷の作用も変化するはず

$$Q[\alpha]|\psi\rangle = ?$$

具体的な実現を見るために2+1D QEDでやった[KS, Sotaro Sugishita, 2025]

2+1次元QEDの漸近対称性[KS, Sotaro Sugishita, 2025]

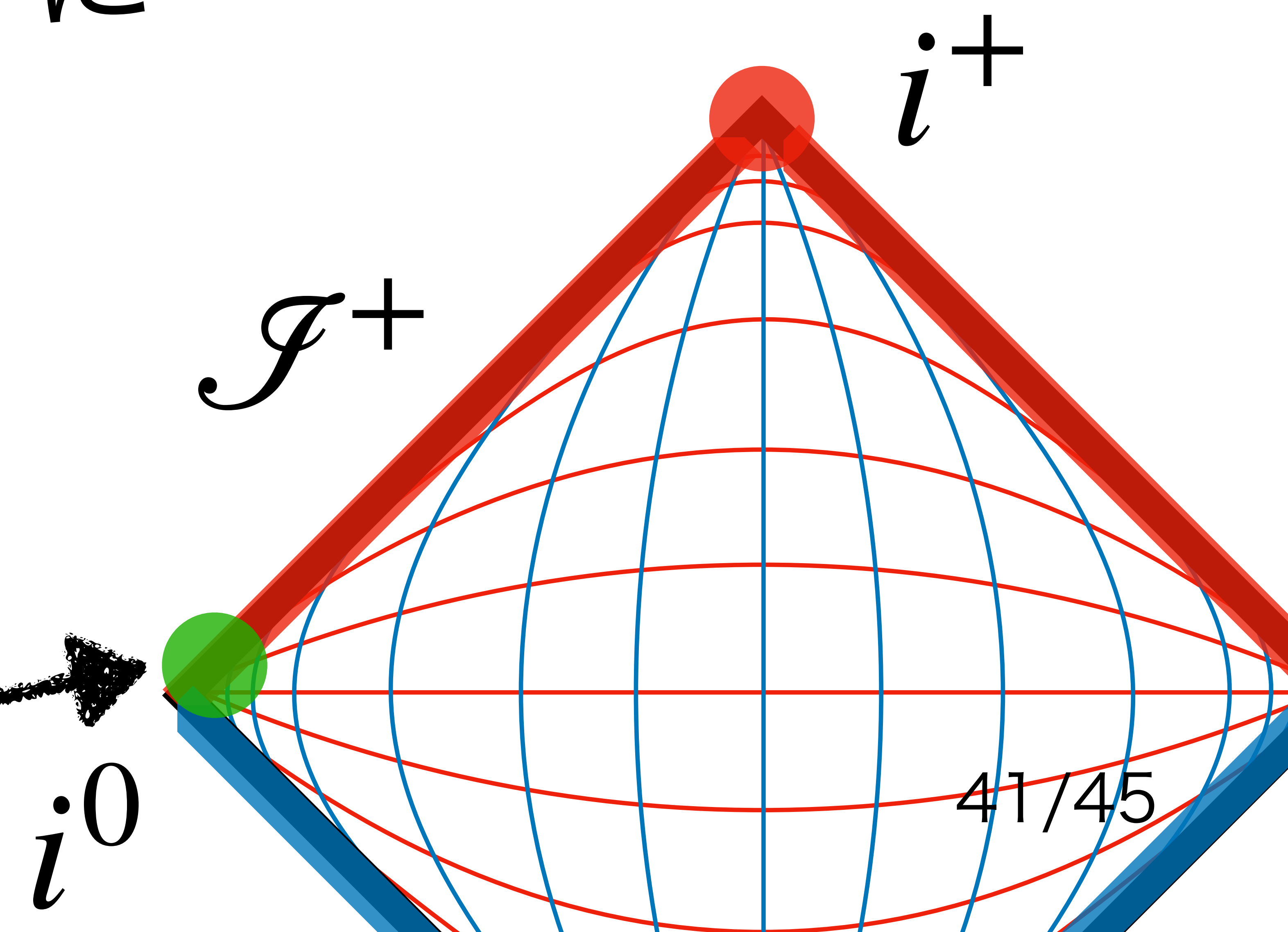
理論:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathscr{L}_{\text{charge}}$$

- 物質場は質量を持ち，ゲージ場とNoetherカレントjが結合
- 物質場は光子が質量ゼロのままになるように
(Chern-Simons項が出ないように)

漸近電荷:

$$Q^+[\alpha] = \int_{\mathscr{I}^+_-} \alpha \tilde{F}$$



2+1次元QEDの漸近対称性[KS, Sotaro Sugishita, 2025]

結論，物理的な漸近状態への作用は消える:

$$Q[\alpha]\,|\,\psi\rangle = 0$$

この式の意味？

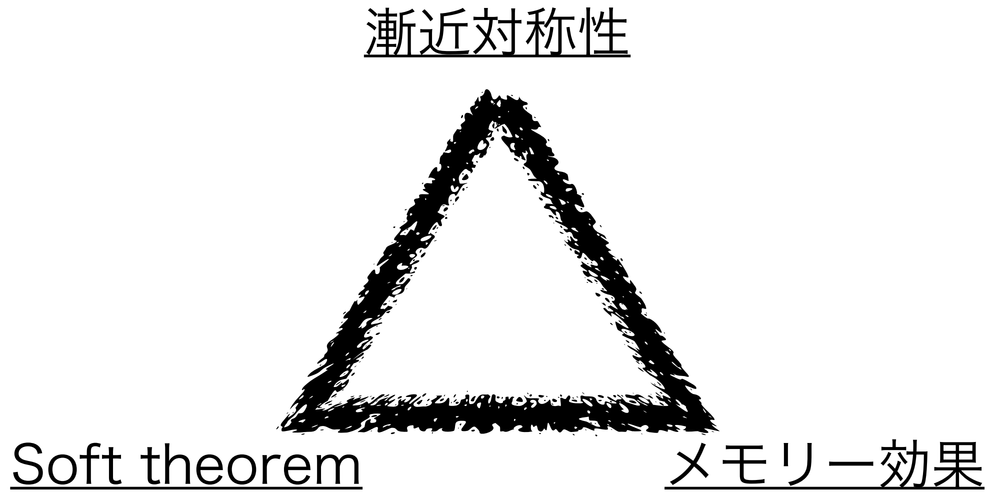
仮定
- α = 定数のときは$Q^+[\alpha]$はただの電荷
  → **中性状態**しか許されない

⬇

結果
- α = 関数のときは$Q^+[\alpha]$はsoft photonの付加自由度
  → そんな自由度は**ない**

結果についてもっと！(4Dとの比較)

3+1次元QEDの漸近対称性は自明ではない:



$$Q[\alpha]\,|\psi\rangle \neq 0$$

だから**soft theorem**や**memory effect**があった (三角形構造)

真空も漸近対称性の作用によって変化 → **SSBが起きている**

2+1次元QEDでは漸近対称性の作用が自明

→ **三角形構造も自明**になり、**SSBも起きていない**

→ 漸近対称性もゲージ冗長性

まとめ

- 電磁気学はゲージ対称性を持ったゲージ場の理論で書かれる
- ゲージ変換には無限遠で消えるスモールゲージ変換と無限遠でも消えないラージゲージ変換の二種類がある
- **漸近対称性**はsoft theoremやmemory effectと結びついた**物理的な対称性**
- 3次元QEDでは**漸近対称性は自明**になりそう

おわり