一般相対性理論における二つの保存量: エネルギーと重力電荷

大阪大学 素粒子論研究室
山岡起也

Int.J.Mod.Phys.A 39 (2024) 07n08, 2450049, arXiv:2305.09849 に基づく

自己紹介

Yamaoka　　Tatsuya

山岡　起也

初ハーフマラソン(2026/4/12)

購入時

着用9ヶ月

所属：大阪大学素粒子論研究室

学年: 博士後期課程3年

出身地：兵庫県芦屋市

趣味：サッカー、映画鑑賞、デニム、最近はランニングも。

自己紹介

私の研究について：

・一般相対論における新たな保存量について

Sinya Aoki, Tetsuya Onogi, **T. Y**, “Energies and a gravitational charge for massive particles in general relativity,” International Journal of Modern Physics A : 10.1142/S0217751X24500490.

・格子カイラルゲージ理論、 symmetric Mass Generation mechanism (SMG)　について

- Tatsuhiro Misumi, Tetsuya Onogi, **T. Y**,
  “Taste-splitting mass and edge modes in 3+1D staggered fermions,”arXiv:2604.02078
- Tetsuya Onogi, **T. Y**,
  “Non-singlet conserved charges and anomalies in 3+1 D staggered fermions,” arXiv:2509.04906
- **T. Y**,
  “Quantized Axial Charge in the Hamiltonian Approach to Wilson Fermions,” *JHEP* 10 (2025) 102

自己紹介

私の研究について：

今日のトピック

・一般相対論における新たな保存量について

Sinya Aoki, Tetsuya Onogi, **T. Y**, “Energies and a gravitational charge for massive particles in general relativity,” International Journal of Modern Physics A : 10.1142/S0217751X24500490.

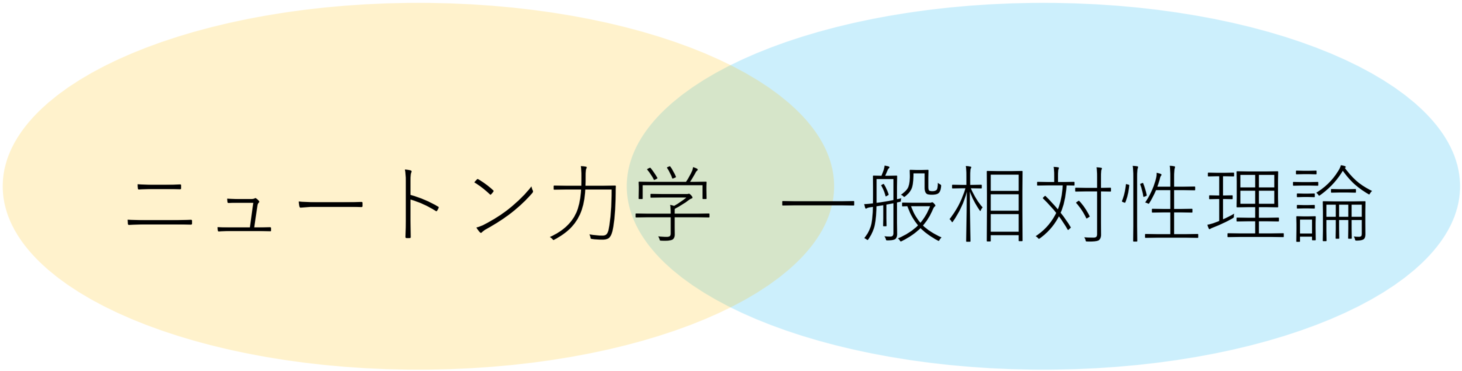
・格子カイラルゲージ理論、 symmetric Mass Generation mechanism (SMG)　について

- Tatsuhiro Misumi, Tetsuya Onogi, **T. Y**,
  “Taste-splitting mass and edge modes in 3+1D staggered fermions,”arXiv:2604.02078
- Tetsuya Onogi, **T. Y**,
  “Non-singlet conserved charges and anomalies in 3+1 D staggered fermions,” arXiv:2509.04906
- **T. Y**,
  “Quantized Axial Charge in the Hamiltonian Approach to Wilson Fermions,” *JHEP* 10 (2025) 102

今日考えたいこと

・一般相対論における新たな保存量について

Sinya Aoki, Tetsuya Onogi, **T. Y**, “Energies and a gravitational charge for massive particles in general relativity,” International Journal of Modern Physics A : 10.1142/S0217751X24500490.



- **一般相対性理論におけるエネルギー保存則とは？**
- **一般相対相対論における局所的な保存量とは何か。**

目次

[前半]　一般相対性理論におけるエネルギーとは。

- ニュートン力学の復習
- 一般相対性理論の導入
- 1次ポストニュートニアン近似を用いたN個の質点系におけるエネルギーについて
- 一般相対性理論におけるエネルギー保存則について

[後半]　一般相対性理論におけるエネルギー保存則と新たな保存量について。

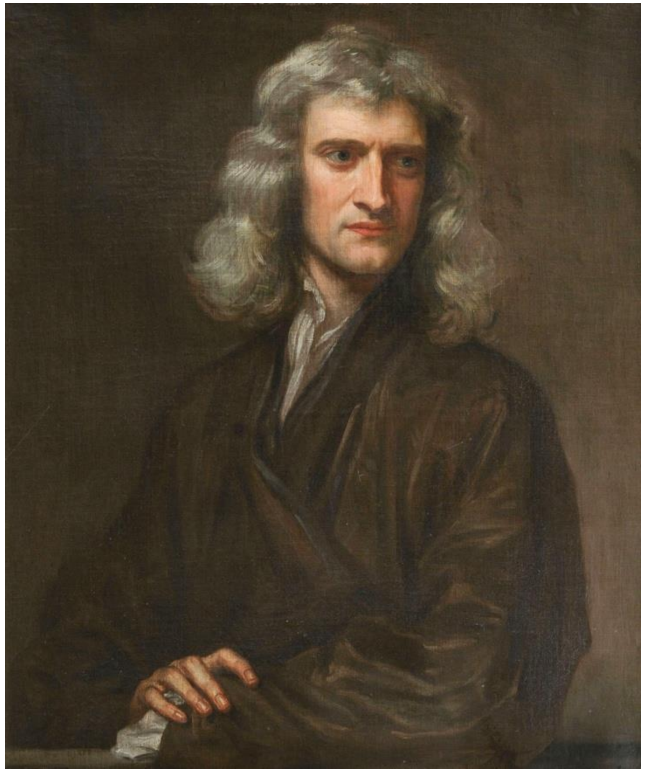
- Introduction
- Noether's 2nd theoremについて
- **重力場とのみ相互作用をする質点粒子の系における保存量について**　←　**Our Work**

［前半］　一般相対性理論におけるエネルギーとは。

- **ニュートン力学の復習**
- 一般相対性理論の導入
- 1次ポストニュートニアン近似を用いた
N個の質点系におけるエネルギーについて
- 一般相対性理論におけるエネルギー保存則について

ニュートン力学

Sir Isaac Newton



引用元：Wikipedia

・ニュートンの第一法則：慣性の法則

力を受けていない物体は静止あるいは等速直線運動をする

・ニュートンの第二法則：運動の法則

物体の加速度は受けている力 fに比例しその質量m に反比例する

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{f}$$

・ニュートンの第三法則：

二つの質点が互いに及ぼし合う力は大きさが等しく、
かつ、向きは反対である。

ニュートン力学

・ニュートン力学の大前提：

慣性系(力を受けていない物体がすべからかく静止または等速直線運動をするように観測される座標系)
の存在を仮定

・時間は絶対的なものと仮定

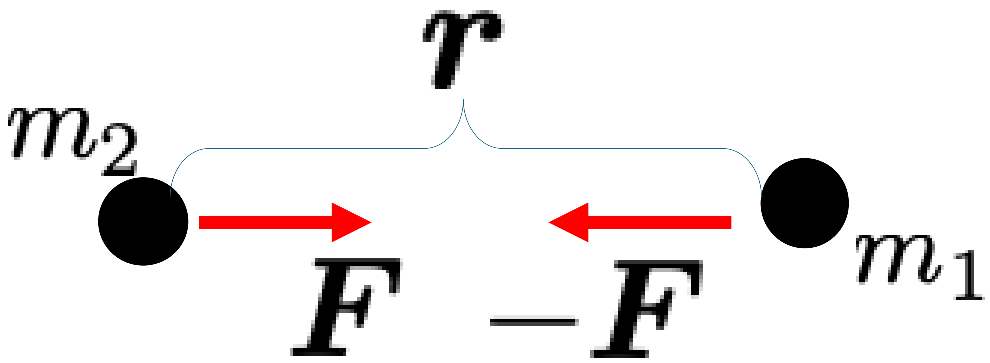
・空間座標は相対的である。

・ガリレイ変換の元で不変 $t = t' \,, \quad \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{V} t \,.$

$$m \frac{d^2 \boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{f}$$

はどの慣性系においても不変

ニュートン力学(二つの質点系)



$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$$

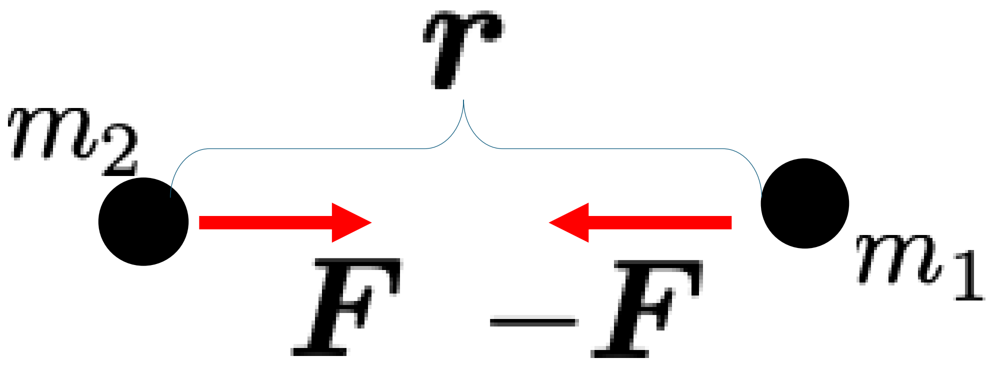
$$\boldsymbol{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

ニュートンの第二法則により、運動方程式は

$$m_1 \ddot{\boldsymbol{r}}_1 = -\boldsymbol{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$$m_2 \ddot{\boldsymbol{r}}_2 = \boldsymbol{F} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

ニュートン力学(二つの質点系)



系のポテンシャルは　$V(r) = -\dfrac{Gm_1m_2}{r}$

系の(時間に顕に依存しない)ラグランジアンは　$L = \dfrac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1{}^2 + \dfrac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2{}^2 + \dfrac{Gm_1m_2}{r}$

この時、“エネルギー”　は保存する。

$$E = \frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2{}^2 - \frac{Gm_1m_2}{r}$$

ニュートン力学の限界

ニュートン力学は完璧な理論か？

もちろん、No !!

我々はニュートン力学には様々な修正点が必要であることを既に知っている。

・光速度は有限かつ不変である。

・電磁気学はガリレイ変換の元で不変でない。

・時間は絶対的なものではなく、相対的に扱われるべきである。
すなわち、物理法則は**時間と空間を対等に扱う変換**の下で不変な形で記述されるべきである。

・**慣性系を特別視**している。いかなる座標系を用いても物理法則は変わらないべきである。

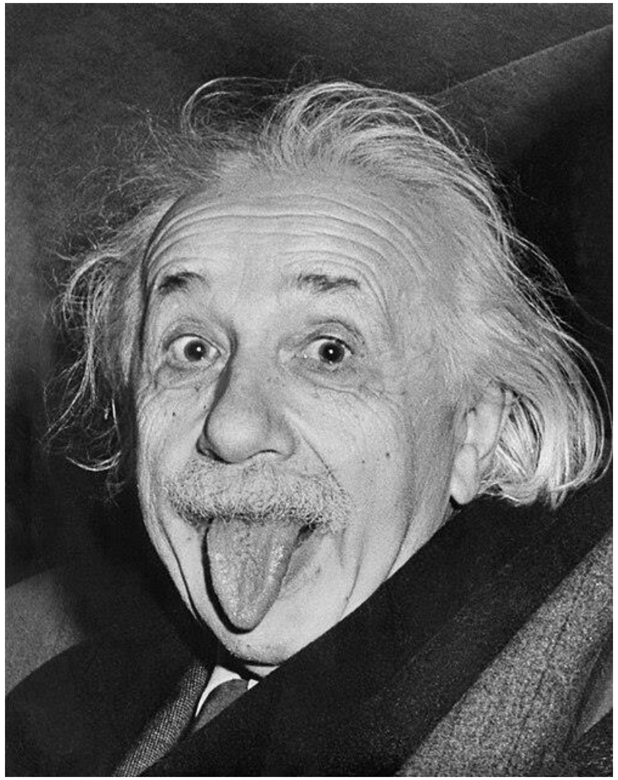
→ **一般相対性理論**

[前半]　一般相対性理論におけるエネルギーとは。

- ニュートン力学の復習
- **一般相対性理論の導入**
- 1次ポストニュートニアン近似を用いた
  N個の質点系におけるエネルギーについて
- 一般相対性理論におけるエネルギー保存則について

一般相対性理論 (Einstein, 1915)

Albert Einstein



引用元：Wikipedia

一般相対性理論は次の二つの指導原理の元に成り立つ理論:

- 一般相対性原理

  全ての座標系で物理法則は同じ
  (物理法則は一般座標変換の元で不変)

- 等価原理

  重力を受けている系と加速度系は局所的に区別できない

∵ 慣性質量と重力質量が等しい $m_I \ddot{\boldsymbol{r}} = -m_G g$

➡ 加速度系に移れば、重力の寄与は局所的に消すことができる。

Eötvös experiment (1922)

一般相対性理論が教えること：準備

ニュートン力学を（時間と空間を相対的に扱うために）4次元化する。

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} \quad \rightarrow \quad u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

$$p^i = mv^i \quad \rightarrow \quad P^\mu = mu^\mu$$

$$\frac{dp^i}{dt} = f^i \quad \rightarrow \quad \frac{dP^\mu}{d\tau} = F^\mu$$

固有時間：$\tau = \sqrt{dt^2 - dx^i dx_i} = dt\sqrt{1 - v^2}$

一般相対性理論が教えること: その1

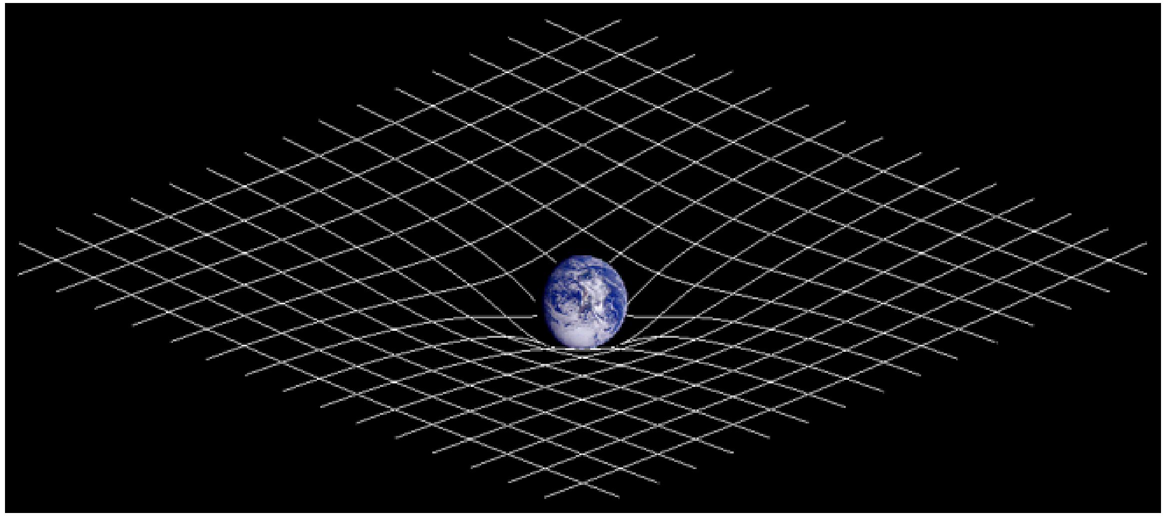
$$c = 1$$

アインシュタイン方程式

$$\underline{G_{\mu\nu}} = 8\pi G \underline{T_{\mu\nu}}$$

重力場の式：時空の幾何学的量

物質場の式：エネルギー運動量テンソル



引用元：Wikipedia

"Spacetime tells matter how to move; matter tells spacetime how to curve."

John Archibald Wheeler

一般相対性理論が教えること: その2

$$\partial_\mu A^\nu \equiv A^\nu_{,\mu}\,,$$
$$\nabla_\mu A^\nu = A^\nu_{,\mu} + \Gamma^n u_{\mu\rho} A^\rho \equiv A^\nu_{;\mu}$$

一般座標系$\{x^\mu\}$における、運動方程式：

測地線方程式　　(ニュートン力学における運動方程式の修正版)

$$u^\mu u^\alpha_{;\mu} = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

一般相対性理論が教えること: その2

$$c = 1$$

測地線方程式　　　(ニュートン力学における運動方程式の修正版)

$$u^\mu u^\alpha_{;\mu} = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$$

仮定：

1, $|v^i| \ll 1$: 質点の速度が非相対論的
2, 重力場が弱い(時空がほぼ平坦(ミンコフスキー時空))
3, 重力場の 時間変化が無視できる(定常な重力場)

のもとで

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \simeq -\frac{\partial}{\partial x^i}\phi ,$$

ϕ ：ニュートンポテンシャル

つまり、**ニュートン力学は一般相対性理論の近似理論である。**

一般相対性理論が教えること: その2

ニュートン力学は一般相対性理論の近似理論である。

つまり、近似により無視している**相対論的効果**がある。

さっき見た、N個の質点系を、

相対性理論の枠組み内で、**1次ポストニュートニアン近似**を用いて再構成してみよう。

$$= \left(\frac{v^i}{c}\right)^2$$ 以下のオーダーの 相対論的効果による補正を取り入れる近似

［前半］　一般相対性理論におけるエネルギーとは。

- ニュートン力学の復習
- 一般相対性理論の導入
- 1次ポストニュートニアン近似を用いた
  N個の質点系におけるエネルギーについて
- 一般相対性理論におけるエネルギー保存則について

質点系の作用

$$\kappa = 4\pi G$$

$$v_n(s_n) := \frac{dx_n(s_n)}{ds_n}$$

重力場とのみ作用するN個の質点系において、

これまでにみたアインシュタイン方程式と測地線方程式を与える作用は

$$S = S_G + S_M$$

$$S_G = \frac{1}{4\kappa}\int d^4x\,\sqrt{-g}(R-2\Lambda), \qquad S_M = -\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}\int ds_n\left[m_n^2 e_n(s_n) - \frac{g_{\mu\nu}}{e_n(s_n)}v_n^\mu v_n^\nu\right]$$

Where $e_n(s_n)$: einbein of the n-th particle , s_n: proper time,

ワールドラインの再パラメータ化不変性を実現する補助場

質点系の作用

$$\kappa = 4\pi G$$

$$\Lambda = 0$$

実際、作用について変分をとると、$m_n e_n(s_n) = 1$ 　のもとで、

アインシュタイン方程式：
$$G_{\mu\nu} = 2\kappa T_{\mu\nu}$$

測地線方程式：
$$\frac{d}{ds_n} v_n^\mu(s_n) + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} v_n^\alpha(s_n) v_n^\beta(s_n) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots, N$$

where

アインシュタインテンソル：
$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

エネルギー運動量テンソル：
$$T^{\mu\nu} := \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}(x)} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{n=1}^{N} m_n \int ds_n \, v_n^\mu(s_n) v_n^\nu(s_n) \delta^{(4)}(x - x_n(s_n))$$

ポストニュートニアン近似

(v/c)でエネルギー運動量テンソルを摂動展開すると、

$$\overset{0}{T}{}^{00} = \sum_n m_n \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n), \quad \overset{2}{T}{}^{00} = \sum_n m_n(\phi + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_n^2)\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n), \;\; \boldsymbol{v}_n^2 := \sum_{i=1}^{3}(v_n^i)^2,$$

$$\overset{1}{T}{}^{i0} = \sum_n m_n v_n^i \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n), \quad \overset{2}{T}{}^{ij} = \sum_n m_n v_n^i v_n^j \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n).$$

where

$$\underline{\phi(\boldsymbol{x}, t) = -G\sum_n \frac{m_n}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n|}}, \quad \zeta_i(\boldsymbol{x}, t) = -4G\sum_n \frac{m_n v_n^i}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n|}.$$

ニュートンポテンシャル

ポストニュートニアン近似

同様にメトリックも次のように展開できる。

$$g_{00} = -1 + \overset{2}{g}_{00} + \overset{4}{g}_{00} + \cdots\ ,\ g_{ij} = \delta_{ij} + \overset{2}{g}_{ij} + \cdots\ ,\ g_{i0} = \overset{3}{g}_{i0} + \cdots\ ,$$

$$\overset{2}{g}_{00} = -2\phi, \quad \overset{4}{g}_{00} = -2\phi^2 - 2\psi, \quad \overset{2}{g}_{ij} = -2\delta_{ij}\phi, \quad \overset{3}{g}_{i0} = \zeta_i,$$

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) = -G\int d^3x' \frac{\overset{0}{T}{}^{00}(\boldsymbol{x'}, t)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}|}, \quad \zeta_i(\boldsymbol{x}, t) = -4G\int d^3x' \frac{\overset{1}{T}{}^{i0}(\boldsymbol{x'}, t)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}|},$$

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = -\int \frac{d^3x'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x'}|}\left[\frac{1}{4\pi}\phi_{,00}(\boldsymbol{x'}, t) + G\overset{0}{T}{}^{00}(\boldsymbol{x'}, t) + G\overset{2}{T}{}^{ij}(\boldsymbol{x'}, t)\right]$$

測地線方程式

1次ポストニュートニアン近似の下で、

測地線方程式： $\frac{d}{ds_n}v_n^{\mu}(s_n)+\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}v_n^{\alpha}(s_n)v_n^{\beta}(s_n)=0, \quad n=1,2,\cdots,N$ は

ニュートン力学と同じ運動方程式を与える。

$$\boxed{\frac{dv_n^i}{dt}=-\partial_i\phi(\boldsymbol{x_n},t), \quad n=1,2,\cdots,N.}$$

この系において1次ポストニュートニアン近似が、

ニュートン力学と同じ運動方程式を与える。

ニュートン力学の時と同様に、
物質の運動エネルギー(エネルギー運動量テンソル)を計算すれば、
ニュートン力学のエネルギーと、その保存則が得られる？？

The matter energy

物質のエネルギー は1PN のオーダーで

$$E_M(t) = -\int d^3x\sqrt{-g}T^0{}_0(\boldsymbol{x},t) \simeq \int d^3x\left(1+\frac{1}{2}\overset{2}{g}\right)(-1+\overset{2}{g}_{00})\left(\overset{0}{T}{}^{00}+\overset{2}{T}{}^{00}\right)$$

$$\simeq \sum_{n=1}^{N}\left(m_n + \boxed{\frac{1}{2}m_n\boldsymbol{v}_n^2 + m_n\phi(\boldsymbol{x_n},t)}\right),$$

ポテンシャルの項の係数が余分に大きい

物質のエネルギーだけを考えても、ニュートンエネルギーを再現しない。

The matter energy

物質のエネルギーは一般に保存しない。

$$\frac{dE_M}{dt} = \sum_{n=1}^{N} m_n v_n^i \underbrace{\left[\partial_i \phi(\boldsymbol{x}_n, t) + \frac{dv_n^i}{dt}\right]}_{=0} + \sum_{n=1}^{N} m_n \partial_t \phi(\boldsymbol{x}_n, t) = \sum_{n=1}^{N} m_n \partial_t \phi(\boldsymbol{x}_n, t) \neq 0$$

∵ 測地線方程式：$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \simeq -\frac{\partial}{\partial x^i}\phi,$

系全体のエネルギーが保存するためには、

重力場の寄与を考える必要があることを表している。

[前半]　一般相対性理論におけるエネルギーとは。

- ✓ ニュートン力学の復習
- ✓ 一般相対性理論の導入
- ✓ 1次ポストニュートニアン近似を用いた
  N個の質点系におけるエネルギーについて
- 一般相対性理論におけるエネルギー保存則について

一般相対性理論における保存則について

物質だけではエネルギーが保存しないことを再考し、
系全体のエネルギーの保存則について見る。

エネルギー運動量テンソルの保存則

微小座標変換 $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$ のもとで、

作用の $\delta g^{\mu\nu} = g^{\rho\nu}\xi^{\mu}{}_{;\rho} + g^{\mu\sigma}\xi^{\nu}{}_{;\sigma} = \xi^{\mu;\nu} + \xi^{\nu;\mu}$ に対する変分をとると、

定義より、

$$\delta S_M\Big|_{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = \int d^4x\sqrt{-g}T^{\mu\nu}{}_{;\nu}\xi_{\mu} = 0$$

➡ $$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$$

➡ $$\boxed{\nabla_{\mu}(\sqrt{-g}T^{\mu}{}_{\nu}) = \partial_{\mu}(\sqrt{-g}T^{\mu}{}_{\nu}) - \frac{1}{2}\sqrt{-g}T^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\nu} = 0}$$

物質のエネルギーは保存しない

$$\nabla_\mu(\sqrt{-g}T^\mu{}_\nu) = \partial_\mu(\sqrt{-g}T^\mu{}_\nu) - \underline{\frac{1}{2}\sqrt{-g}T^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\nu}} = 0$$

重力場の寄与？？

➡ $$\frac{d}{dt}E_M = \frac{d}{dt}\int d^3x\sqrt{-g}T^0_0 \neq 0$$ は明らか!!!!

系全体のエネルギーが保存するためには、重力場の寄与を考える必要があることを表している。

※ 定常な重力場 $g_{\alpha\beta,0} = 0$ を仮定するニュートン力学では $\dfrac{dE_M}{dt} = 0$ となる。

物質のエネルギーは保存しない

$$\boxed{\nabla_\mu(\sqrt{-g}T^\mu{}_\nu) = \partial_\mu(\sqrt{-g}T^\mu{}_\nu) - \frac{1}{2}\sqrt{-g}T^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\nu} = 0}$$

系全体のエネルギーが保存するためには、重力場の寄与を考える必要があることを表している。

$$\partial_\mu\{\sqrt{-g}(T^\mu{}_\nu + t^\mu{}_\nu)\} = 0$$

重力場の寄与？？

このような式を満たす $t^\mu{}_\nu$ は存在すれば、局所的な保存量が作れる。。。

物質のエネルギーは保存しない

$$\boxed{\nabla_\mu(\sqrt{-g}T^\mu{}_\nu) = \partial_\mu(\sqrt{-g}T^\mu{}_\nu) - \underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{-g}T^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\nu}}_{\text{重力場の寄与？？}} = 0}$$

$$\partial_\mu\{\sqrt{-g}(T^\mu{}_\nu + \underbrace{t^\mu{}_\nu}_{\text{重力場の寄与？？}})\} = 0$$

このような式を満たす $t^\mu{}_\nu$ は存在すれば、局所的な保存量が作れる。。。

実は、そのような都合の良い $t^\mu{}_\nu$ は定義できる！！！！

Einstein's pseudo-tensor energy $\tilde{E}_{pt}$ Einstein(1916)

$\partial_\mu\{\sqrt{-g}(T^\mu{}_\nu + t^\mu{}_\nu)\} = 0$ を満たす適切な $t^\mu{}_\nu$ を定義すると、

$t^\mu{}_\nu$ の詳細は後半のトークで議論する

$$\Delta\tilde{E}(t) = \int d^3x\sqrt{-g}t^0{}_0$$

1PNオーダーでのエネルギーの計算結果

$$\boxed{\tilde{E}_{pt}(t) = E_M + \Delta\tilde{E}(t) = \sum_n m_n\left(1 + \frac{1}{2}\phi(x_n, t) + \frac{1}{2}v_n^2\right)}$$

エネルギーの時間変化

$$\boxed{\frac{d\tilde{E}_{pt}(t)}{dt} = 0}$$

物質に加えて重力場を考慮すると、
ニュートンポテンシャルを正しく再現できる！！

少しコメント

1PN 近似の下での電磁気学との比較

$$\phi(x_n, t) = -\sum_k \frac{m_k}{|x_n - x_k|}$$

重力とのみ相互作用する系

$$E_M = \sum_n m_n \left(1 + \frac{1}{2}v_n^2 + \phi(x_n, t)\right)$$

$$E_G = \Delta\tilde{E}(t) = -\sum_n \frac{1}{2}m_n\phi(x_n, t)$$

$$E_M + E_G = \sum_n m_n \left(1 + \frac{1}{2}v_n^2\right) + \sum_n \frac{1}{2}m_n\phi(x_n, t)$$

1PN 近似の下での電磁気学との比較

$$\phi(x_n,t) = -\sum_k \frac{m_k}{|x_n - x_k|}$$

$$\phi^{EM}(x_n,t) = -\sum_k \frac{q_k}{|x_n - x_k|}$$

重力とのみ相互作用する系

$$E_M = \sum_n m_n \left(1 + \frac{1}{2}v_n^2 + \phi(x_n,t)\right)$$

$$E_G = \Delta\tilde{E}(t) = -\sum_n \frac{1}{2} m_n \phi(x_n,t)$$

$$E_M + E_G = \sum_n m_n \left(1 + \frac{1}{2}v_n^2\right) + \sum_n \frac{1}{2} m_n \phi(x_n,t)$$

電磁気力とのみ相互作用する系

$$E_M = \sum_n m_n \left(1 + \frac{1}{2}v_n^2\right)$$

$$E_{EM} = -\sum_n \frac{1}{2} q_n \phi^{EM}(x_n,t)$$

$$E_M + E_{EM} = \sum_n m_n \left(1 + \frac{1}{2}v_n^2\right) - \sum_n \frac{1}{2} q_n \phi^{EM}(x_n,t)$$

重力は引力として働き、電磁気力は斥力として働くことを表している。

話を戻します。

Pseudo tensor を用いた局所的な保存則の**不満点**

$$\partial_\mu\{\sqrt{-g}(\underbrace{T^\mu{}_\nu}_{\text{物質の寄与}} + \underbrace{t^\mu{}_\nu}_{\text{重力場の寄与}})\} = 0$$

$t^\mu{}_\nu$ の詳細は後半のトークで議論する

・ $t^\mu{}_\nu$ はテンソルではなく疑テンソル(pseudo tensor)。一般座標変換のもとで不変ではない。

➡ この保存則が与える保存量は**座標に依存**する。

エネルギー密度の**局所的に共変な定義は非自明**

2nd Noether charge と呼ぶ

・ $t^\mu{}_\nu$ は作用に全微分項を加えられる任意性に応じて自由に定義できる。

➡ **無数に定義できる保存量**はすべてエネルギーを与えるのか非自明。

・この保存則は**ネータの第二定理から導出される“恒等式”**である。

➡ **物質のダイナミクスに関係なく保存**する。

Pseudo tensor を用いた局所的な保存則は、様々な不満点を持つ。
特に一般相対性理論の指導原理である一般相対性原理を破ってしまう。

Pseudo tensor を用いた局所的な保存則は、様々な不満点を持つ。
特に一般相対性理論の指導原理である一般相対性原理を破ってしまう。

一方、最近

一般座標変換のもとで不変で局所的な保存量の定義が新たに発見された。

[Aoki, Onogi, Yokoyama, (2021)]

Extra Conserved Charge

[Aoki, Onogi, Yokoyama, (2021)]

$\nabla_\mu \beta^\nu = 0$ を満たすベクトル β^ν を導入する。

➡ $K^\mu = T^\mu_\nu \beta^\nu$ s.t. $\nabla_\mu K^\mu(x) = \partial_\mu(\sqrt{-g} K^\mu) = 0$ を定義できる。

一般座標変換のもとで不変かつ局所的に保存している!!!

この時、エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ に関する**局所的に共変な保存量**が存在する。

$$Q(t) = \int d^3x \sqrt{-g} T^0{}_\nu \beta^\nu$$

Extra Conserved Charge

この時、エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ に関する**局所的に共変な保存量**が存在する。

$$Q(t) = \int d^3x \sqrt{-g} T^0{}_\nu \beta^\nu$$

この保存量が与える物理的量は何か？？？？

[Aoki, Onogi, TY (2023)]

➡ 後半のトークで議論する！！！！

我々は、この保存量を "**Gravitational Charge**" と名付けた。

前半のまとめ

まとめ

・一般相対性理論は、一般相対性原理と等価原理を指導原理として構成される。

・ニュートン力学は一般相対性理論の近似理論として得られる。

・一般相対性理論の枠組みで1次ポストニュートニアン近似を用いると、

・物質のエネルギーは保存しない。重力場の存在を示唆。

・重力場の寄与 $t^{\mu}{}_{\nu}$ を考慮すると、ニュートンエネルギーが再構成できる。

・ $t^{\mu}{}_{\nu}$ は擬テンソルである。　エネルギー密度の**局所的に共変な定義は非自明**

・ $t^{\mu}{}_{\nu}$ は、無数に定義できる。それらが与える保存量の物理的意味も非自明。

・局所的で共変な保存量の存在が新たに発見された。その物理的意味は！？

後半の予告

後半のトークでは以下のことを議論する。

1. 2^{nd} **Noether charge**は
   A. **どのような物理量に対応するか?**
   B. **本当に保存するか？**

2.我々の宇宙で、**Extra Chargeは何か？**

[後半]

一般相対性理論におけるエネルギー保存則と新たな保存量について。

arXiv:2305.09849 に基づく

目次

[前半] 一般相対性理論におけるエネルギーとは。

・ニュートン力学の復習

・一般相対性理論の導入

・1次ポストニュートニアン近似を用いたN個の質点系におけるエネルギーについて

・一般相対性理論におけるエネルギー保存則について

[後半] 一般相対性理論におけるエネルギー保存則と新たな保存量について。

・Introduction

・Noether's 2nd theoremについて

・重力場とのみ相互作用をする質点粒子の系における保存量について ← Our Work

[後半]　**一般相対性理論におけるエネルギー保存則と新たな保存量について。**

- **Introduction**
- Noether’s 2nd theoremについて　←　Review
- 重力場とのみ相互作用をする質点粒子の系における保存量について　←　Our Work

一般相対論における保存量

一般相対性理論　: 2つの指導原理

- 一般相対性原理
- 等価原理

観測される物理量は、**一般座標変換のもとで局所的に共変**であるように定義される

しかし、エネルギー密度の**局所的に共変な定義は非自明**

$$\because \quad \nabla_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} T^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta,\nu} = 0$$

局所的なエネルギー保存則を定義することは困難

エネルギーは物質場と重力場の寄与の合計が保存する。

一般相対性理論の指導原理の一つである

等価原理：重力の寄与は局所的に消すことができる。

➡ 局所的に一般座標変換のもとで不変なエネルギー保存則を定義することは出来ない。

一般相対論における保存量

解決策1　　共変性/局所性を諦めた定義

2nd Noether charge と呼ぶ

(eg.)　・Einstein’s quasi local energy　　・Komar energy　　etc.

(*)Noether’s 2nd theorem から成り立つ恒等式として定義できる　　[2022. S. Aoki, T. Onogi]

一方で、

物質のエネルギー運動量テンソルだけに関する物理量であれば

共変かつ局所的な保存量が定義できても良いはず。

一般相対論における保存量

解決策2

もし、 $\nabla_\mu K^\mu(x) = 0$ を満たすカレントが定義できたら、

$$\nabla_\mu K^\mu(x) = \boxed{\partial_\mu(\sqrt{-g}K^\mu) = 0}$$

を自動的に満たす。

局所的に共変な保存量の定義 が可能

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q(x^0) = \int_{x_0} d^3x\sqrt{-g}K^0(x)}$$

一般相対論における保存量

解決策2　**局所的に共変な保存量**の定義　[Aoki, Onogi, Yokoyama(2021)]

$\nabla_\mu \beta^\nu = 0$ を満たすベクトル β^ν を導入する。

➡ $K^\mu = T^\mu_\nu \beta^\nu$ s.t. $\nabla_\mu K^\mu = T^\mu_\nu \nabla_\mu \beta^\nu = 0$ が定義できる。

この時、エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ に関する**局所的に共変な保存量**が存在する。

$$Q(x^0) = \int_{x_0} d^3x \sqrt{-g} T^\mu{}_\nu \beta^\nu$$

一般相対論における保存量

解決策1　　共変性/局所性を諦めた定義

(eg.)　・Einstein's quasi local energy　・Komar energy　etc.

(*)Noether's 2nd theorem から成り立つ恒等式として定義できる

解決策2　　**局所的に共変な保存量**の定義　[2021. S. Aoki, T. Onogi, S. Yokoyama]

Extra Charge: $Q(x^0) = \int_{x_0} d^3x \sqrt{-g} T^{\mu}{}_{\nu} \beta^{\nu}$

Question

1. 2nd Noether chargeは
   A. どのような物理量に対応するか?
   B. 本当に保存するか？

2.我々の宇宙で、Extra Charge（解決策2）は何か？

[後半]　**一般相対性理論におけるエネルギー保存則と新たな保存量について。**

✓ Introduction

- **Noether's 2nd theoremについて** ← **Review** [Aoki, Onogi, Yokoyama(2021)]
- 重力場とのみ相互作用をする質点粒子の系における保存量について ← **Our Work**

作用について

$$L = L_G + L_M, \qquad S_\Omega := \int_\Omega d^d x\, L.$$

重力場：

$$L_G = \frac{1}{2\kappa}\sqrt{-g}(R - 2\Lambda), \quad \kappa := 4\pi G,$$

スカラー場：

$$L_M = \sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}g^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi - V(\phi)\right],$$

運動方程式

作用の変分をとると、以下の運動方程式が得られる。

$$E_G^{ab} := -\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\left(R^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}(R - 2\Lambda) - 2\kappa T^{ab}\right) = 0,$$

$$E_\phi := \sqrt{-g}(\nabla_a\nabla^a\phi - V'(\phi)) = 0.$$

ラグランジアンに全微分項 $\partial_a\left(\sqrt{-g}K^a\right)$ を加えても運動方程式は変わらないことに注意。

Noether's 2nd theorem について

一般座標変換

$$\delta x^a := (x')^a - x^a = \xi^a(x), \quad \delta\phi := \phi'(x') - \phi(x) = 0,$$

$$\delta g_{ab} := g'_{ab}(x') - g_{ab}(x) = -\xi^c{}_{,a}(x) g_{cb}(x) - \xi^c{}_{,b}(x) g_{ac}(x).$$

この変換のもとで $\delta S_\Omega = 0$ を要請すると、

$$\Rightarrow \quad {}^\exists J^a[\xi] = \frac{1}{2\kappa}\nabla_b \underline{\left(\nabla^{[a}\xi^{b]}\right)} \quad \text{s.t.} \quad \partial_a J^a = 0\,.$$

a と b について反対称より、保存則は自明

Noether's 2nd theorem について

$$^{\exists}J^a[\xi] = \frac{1}{2\kappa}\nabla_b\left(\nabla^{[a}\xi^{b]}\right) \quad \text{s.t.} \quad \partial_a J^a = 0\,.$$

カレントは次のように展開できる。

$$J^a[\xi] = A^a{}_b\xi^b + B^a{}_b{}^c\xi^b_{,c} + C^a{}_b{}^{cd}\xi^b_{,cd},$$

where

$$\begin{aligned} A^a{}_b &= \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}(2R^a{}_b + g^{ca}\Gamma^d_{db,c} - g^{cd}\Gamma^a_{cd,b}) \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}[\partial_c(g^{d[a}\Gamma^{c]}_{db}) + \Gamma^e_{ec}g^{d[a}\Gamma^{c]}_{db}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^a{}_b{}^c &= \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}(g^{ac}\Gamma^d_{db} - 2g^{dc}\Gamma^a_{db} + g^{de}\delta^a_b\Gamma^c_{de}), \\ C^a{}_b{}^{cd} &= \frac{\sqrt{-g}}{4\kappa}(g^{ac}\delta^d_b + g^{ad}\delta^c_b - 2g^{cd}\delta^a_b) = C^a{}_b{}^{dc}, \end{aligned}$$

Noether's 2nd theorem について

$$\boxed{\partial_a J^a = 0}$$

より、

$$\boxed{\partial_a A^a{}_b = 0,}$$

$$A^a{}_b + \partial_c B^c{}_b{}^a = 0,$$

$$B^a{}_b{}^c + B^c{}_b{}^a + 2\partial_d C^d{}_b{}^{ac} = 0,$$
$$C^a{}_b{}^{cd} + C^d{}_b{}^{ac} + C^c{}_b{}^{da} = 0.$$

Noether's 2nd theorem について

Noether's 2nd theorem より、二種類の保存カレントが定義できる。

共変な保存則

$$\partial_a J^a = 0$$

共変でない保存則

$$\partial_a A^a{}_b = 0$$

$$J^a[\xi] = \frac{1}{2\kappa}\nabla_b\left(\nabla^{[a}\xi^{b]}\right)$$

$$\begin{aligned} A^a{}_b &= \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}(2R^a{}_b + g^{ca}\Gamma^d_{db,c} - g^{cd}\Gamma^a_{cd,b}) \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}[\partial_c(g^{d[a}\Gamma^{c]}_{db}) + \Gamma^e_{ec}g^{d[a}\Gamma^{c]}_{db}], \end{aligned}$$

Noncovariant charge : Pseudo-tensor

$$\partial_a A^a{}_b = 0$$

g_{ab} に関する運動方程式： $E_G^{ab} := -\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\left(R^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}(R-2\Lambda) - 2\kappa T^{ab}\right) = 0,$ を用いると、

$$\boxed{A^a{}_b = \sqrt{-g}(T^a{}_b + t^a{}_b),} \quad t^a{}_b := \frac{1}{2\kappa}\left[R^a{}_b + \frac{R-2\Lambda}{2}\delta^a_b + g^{ca}\Gamma^d_{db,c} - g^{cd}\Gamma^a_{cd,b}\right]$$

Time-like boundary の積分の寄与がない場合を仮定すると、

EH pseudo-tensor energy

$$E_{\rm pt} = -\int_\Sigma [d^3x]\,\sqrt{-g}\,(T^0{}_0 + t^0{}_0)$$

Noncovariant charge : Pseudo-tensor

さらに、EOM を変えることなく作用に全微分項を加えることが可能であることに注意する。

$$S_G \to S_G - \frac{1}{4\kappa}\int d^4x \partial_a D^a$$

ここで、D^a は、作用 S_G に含まれるmetricの2回微分 $g_{\mu\nu,\alpha\beta}$ を消去するように定義する。

$$D^a = g^{ab}\Gamma^c{}_{bc} - g^{bc}\Gamma^a{}_{bc}$$

すなわち、作用 S_G は、$g_{\mu\nu}$ と $g_{\mu\nu,\alpha}$ のみを含む。

Noncovariant charge : Pseudo-tensor

この時、保存量 E_{pseudo} は次のように修正される。

Einstein's pseudo-tensor energy

$$\tilde{E}_{\text{pt}} = -\int_{\Sigma} [d^3x] \sqrt{-g} \left(T^0{}_0 + \tilde{t}^0{}_0 \right)$$

where $\sqrt{-g}\tilde{t}^a{}_b = \sqrt{-g} t^a{}_b + \frac{1}{4\kappa} \partial_c \left(\delta_b^{[a} D^{c]} \right)$

$\tilde{t}^a{}_b$ も同様に $g_{\mu\nu}$ と $g_{\mu\nu,\alpha}$ のみを含む。

Covariant charge :Komar integral

$$\partial_a J^a = 0$$

任意の ξ^b に対して、保存量が作れる。

$$\begin{aligned} Q_{\text{Komar}}[\xi] := \int_{\Sigma} [d^{d-1}x]_a \, J^a[\xi] &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma} [d^{d-1}x]_a \sqrt{-g} \nabla_b [\nabla^{[a} \xi^{b]}] \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int_{\partial\Sigma} [d^{d-2}x]_{ab} \sqrt{-g} \nabla^{[a} \xi^{b]}, \end{aligned}$$

特に、時空が定常的で $\xi^a = -\delta^a{}_0$ で与えらえるとき、 $Q_{\text{Komar}} = E_{\text{pt}}$

Noether's 2nd theoremのまとめ

・Noether's 2nd theoremはこれまでに議論されてきた一般相対性理論における保存量を再現する。
そして無数の保存量を定義できる。

$$E_{\rm pt},\ \tilde{E}_{\rm pt},\ Q_{\rm Komar} \quad \text{etc.}$$

まとめて**2nd Noether charge** と呼ぶことにする。

・これらの保存量に関する**保存則は物質のダイナミクスに関係なく、常に恒等式として成り立つ。。。**

⇒ **2nd Noether chargeは**
A. どのような物理量に対応するか?
B. 本当に保存するか？

[後半]　**一般相対性理論におけるエネルギー保存則と新たな保存量について。**

- ✔ Introduction
- ✔ Noether's 2nd theoremについて ⬅ Review
- **・重力場とのみ相互作用をする質点粒子の系における保存量について** ⬅ **Our Work**

arXiv:2305.09849 に基づく

重力場とのみ相互作用をする質点粒子の系における保存量について

arXiv:2305.09849 に基づく

Question

1. 2nd Noether chargeは
   A. どのような物理量に対応するか?
   B. 本当に保存するか？

2.我々の宇宙で、Extra Charge（解決策2）は何か？

後で議論する

本研究でやったこと

Noether's 2nd から得られる二つの**保存カレントの比較**

Einstein-Hilbert action: $S_G = \frac{1}{4\kappa}\int d^4x\,\sqrt{-g}(R-2\Lambda) \Longrightarrow \boxed{\partial_\mu(\sqrt{-g}J^\mu[\xi]) = 0}$

Stokes' theorem $\Longrightarrow$ EOM

$$\boxed{E_{pt}(x^0) = -\int_{x^0}[d^3x]_\mu\left(T^\mu_{\ 0} + \underline{t^\mu_{\ 0}}\right)}$$

擬テンソル

EH pseudo-tensor energy

(Komar charge)

Actionに全微分項を加える $S_G \to S_G - \int d^4x\,\partial_\mu D^\mu \Longrightarrow \boxed{\partial_\mu\left(\sqrt{-g}J^\mu[\xi] + \partial_\alpha\left(\delta^{[\mu}_\nu \mathcal{D}^{\alpha]}\right)\right) = 0}$

Stokes' theorem $\Longrightarrow$ EOM

$$\boxed{\tilde{E}_{pt}(x^0) = -\int_{x^0}[d^3x]_\mu\left(T^\mu_{\ 0} + \tilde{t}^\mu_{\ 0}\right)}$$

Einstein's pseudo-tensor energy

[Uchiyama 1984]

NOTE: 全微分項により、$\tilde{t}^\mu_\nu$をメトリック$g^{\alpha\beta}$と$g^{\alpha\beta}_{\ ,\gamma}$のみから再構成した

本研究でやったこと

Actionに全微分項を加えて作ったエネルギー

$$E_{pt}(x^0) = -\int_{x^0} [d^3x]_\mu \left(T^\mu_{\ 0} + \boldsymbol{t}^{\mu}_{\ \boldsymbol{0}}\right)$$

$$\tilde{E}_{pt}(x^0) = -\int_{x^0} [d^3x]_\mu \left(T^\mu_{\ 0} + \tilde{\boldsymbol{t}}^{\mu}_{\ \boldsymbol{0}}\right)$$

どれが本当の(保存する)エネルギー？

計算手法：

(v/c)で摂動展開しその二次までを扱う**1次ポストニュートニアン近似**を用いて

重力場とのみ相互作用をする質点粒子の系における、エネルギーを計算をした。

質点系の作用

$$\kappa = 4\pi G$$

$$v_n(s_n) := \frac{dx_n(s_n)}{ds_n}$$

重力場とのみ作用するN個の質点系において、

これまでにみたアインシュタイン方程式と測地線方程式を与える作用は

$$S = S_G + S_M$$

$$S_G = \frac{1}{4\kappa}\int d^4x\,\sqrt{-g}(R - 2\Lambda), \qquad S_M = -\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}\int ds_n\left[m_n^2 e_n(s_n) - \frac{g_{\mu\nu}}{e_n(s_n)}v_n^\mu v_n^\nu\right]$$

Where $e_n(s_n)$: einbein of the n-th particle , s_n: proper time,

ワールドラインの再パラメータ化不変性を実現する補助場

質点系の作用

$$\kappa = 4\pi G$$
$$\Lambda = 0$$

実際、作用について変分をとると、$m_n e_n(s_n) = 1$　のもとで、

アインシュタイン方程式：　$G_{\mu\nu} = 2\kappa T_{\mu\nu}$

測地線方程式：　$\frac{d}{ds_n} v_n^\mu(s_n) + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} v_n^\alpha(s_n) v_n^\beta(s_n) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots, N$

where

アインシュタインテンソル：　$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$

エネルギー運動量テンソル：　$T^{\mu\nu} := \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}(x)} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{n=1}^{N} m_n \int ds_n \, v_n^\mu(s_n) v_n^\nu(s_n) \delta^{(4)}(x - x_n(s_n))$

ポストニュートニアン近似

(v/c)でエネルギー運動量テンソルを摂動展開すると、

$$\overset{0}{T}{}^{00} = \sum_n m_n \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n), \quad \overset{2}{T}{}^{00} = \sum_n m_n\left(\phi + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_n^2\right)\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n), \ \boldsymbol{v}_n^2 := \sum_{i=1}^{3}(v_n^i)^2,$$

$$\overset{1}{T}{}^{i0} = \sum_n m_n v_n^i \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n), \quad \overset{2}{T}{}^{ij} = \sum_n m_n v_n^i v_n^j \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n).$$

where $$\underline{\phi(\boldsymbol{x}, t) = -G\sum_n \frac{m_n}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n|},} \quad \zeta_i(\boldsymbol{x}, t) = -4G\sum_n \frac{m_n v_n^i}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n|}.$$

ニュートンポテンシャル

ポストニュートニアン近似

同様にメトリックも次のように展開できる。

$$g_{00} = -1 + \overset{2}{g}_{00} + \overset{4}{g}_{00} + \cdots\ ,\ g_{ij} = \delta_{ij} + \overset{2}{g}_{ij} + \cdots\ ,\ g_{i0} = \overset{3}{g}_{i0} + \cdots\ ,$$

$$\overset{2}{g}_{00} = -2\phi, \quad \overset{4}{g}_{00} = -2\phi^2 - 2\psi, \quad \overset{2}{g}_{ij} = -2\delta_{ij}\phi, \quad \overset{3}{g}_{i0} = \zeta_i,$$

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) = -G \int d^3x' \frac{\overset{0}{T}{}^{00}(\boldsymbol{x'}, t)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}, \quad \zeta_i(\boldsymbol{x}, t) = -4G \int d^3x' \frac{\overset{1}{T}{}^{i0}(\boldsymbol{x'}, t)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|},$$

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = -\int \frac{d^3x'}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \left[\frac{1}{4\pi} \phi_{,00}(\boldsymbol{x'}, t) + G\overset{0}{T}{}^{00}(\boldsymbol{x'}, t) + G\overset{2}{T}{}^{ij}(\boldsymbol{x'}, t) \right]$$

測地線方程式

1次ポストニュートニアン近似の下で、

測地線方程式 は　ニュートン力学と同じ運動方程式を与える。

$$\boxed{\frac{dv_n^i}{dt} = -\partial_i \phi(\boldsymbol{x_n}, t), \quad n = 1, 2, \cdots, N.}$$

The matter energy

物質のエネルギー は1PN のオーダーで

$$E_M(t) = -\int d^3x \sqrt{-g}\,\underline{T^0{}_0(\boldsymbol{x},t)} \simeq \int d^3x \left(1 + \frac{1}{2}\overset{2}{g}\right)\left(-1 + \overset{2}{g}_{00}\right)\left(\overset{0}{T}{}^{00} + \overset{2}{T}{}^{00}\right)$$

$$\simeq \sum_{n=1}^{N}\left(m_n + \boxed{\frac{1}{2}m_n\boldsymbol{v}_n^2 + m_n\phi(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}},t)}\right),$$

ポテンシャルの項の係数が余分に大きい

物質のエネルギーだけを考えても、ニュートンエネルギーを再現しない。

The matter energy

物質のエネルギーは一般に保存しない。

$$\frac{\mathrm{d}E_M(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{n=1}^{N} m_n \partial_t \phi(\boldsymbol{x}_n, t) \neq 0$$

系全体のエネルギーが保存するためには、重力場の寄与を考える必要があることを表している。

EH pseudo-tensor energy

EH pseudo-tensor energy

$$E_{\mathrm{pt}} = -\int_{\Sigma} [d^3x]\, \sqrt{-g}\, (T^0{}_0 + t^0{}_0)$$

EH pseudo-tensor energy E_{pt}

1PNオーダーでのエネルギーの計算結果

$$E_{pt}(t) = E_M + \Delta E(t) = \sum_n \frac{m_n}{2}\left[1 + \phi(x_n, t) + \frac{7}{6}\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{2}}(t) - \frac{1}{3} x_n \cdot \dot{v}_n\right]$$

物理的解釈が困難！！！

Where $E_M(x^0) \coloneqq \int_{x^0}[d^3x]_\mu T^\mu{}_\nu \tau^\nu = -\int_{x^0}[d^3x]_\mu T^\mu{}_0,$

$$\Delta E(t) = -\int d^3x\sqrt{-g}\, t^0_0 = -\frac{1}{4\kappa}\int\sqrt{-g}\left[R + g^{\alpha 0}\Gamma^\beta_{\beta 0,\alpha} - g^{\alpha\beta}\Gamma^0_{\beta\alpha,0}\right]$$

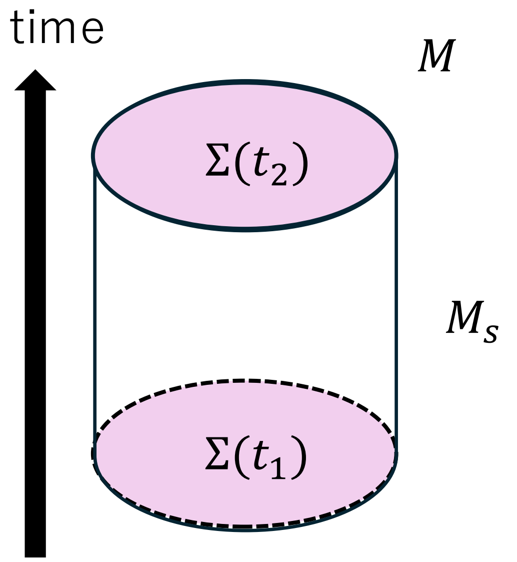
エネルギーの時間変化

$$\frac{dE_{pt}(t)}{dt} = -\frac{G}{6}\sum_{n,k,n\neq k} m_n m_k \frac{(x_n - x_k)\cdot(v_n - v_k)}{|x_n - x_k|^3} \neq 0$$

保存しない！！

EH pseudo-tensor energy

なぜ、保存しないのか！？



定義に注目する

$$\partial_\mu A^\mu{}_\nu = 0 \xrightarrow[\text{Stokes' theorem}]{} 0 = \int_M d^4x\, \partial_\mu A^\mu{}_0 = E_{\rm pt}(t_1) - E_{\rm pt}(t_2) + \underline{\int_{M_S} [d^3x]_k\, A^k{}_0}$$

$$\Rightarrow \quad -\int_{M_S} [d^3x]_k\, A^k{}_0 = E_{\rm pt}(t_1) - E_{\rm pt}(t_2) \neq 0$$

保存カレントがあるにも関わらず

空間的無限遠の境界へ流出するエネルギーカレントが存在する！

Einstein's pseudo-tensor energy

$$S_G \to S_G - \frac{1}{4\kappa}\int d^4x \partial_a D^a$$

Einstein's pseudo-tensor energy

$$\tilde{E}_{\rm pt} = -\int_\Sigma [d^3x]\sqrt{-g}\left(T^0{}_0 + \tilde{t}^0{}_0\right)$$

Einstein's pseudo-tensor energy $\tilde{E}_{pt}$

1PNオーダーでのエネルギーの計算結果

$$\boxed{\tilde{E}_{pt}(t) = E_M + \Delta\tilde{E}(t) = \sum_n m_n \left(1 + \frac{1}{2}\phi(x_n, t) + \frac{1}{2}v_n^2\right)}$$

ニュートンエネルギーの形！

エネルギーの時間変化

Where $\Delta\tilde{E}(t) \coloneqq -\int d^3x\,\sqrt{-g}\,\tilde{t}^0{}_0 = \frac{1}{4\kappa} g^{\alpha\beta}\left(\Gamma^\rho_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta\rho} - \Gamma^\rho_{\alpha\beta}\Gamma^\lambda_{\beta\lambda}\right)$

$$\boxed{\frac{d\tilde{E}_{pt}(t)}{dt} = 0}$$

保存している！

ADM energy

$$\boxed{E_{\mathrm{ADM}}(x^0) := \frac{1}{4\kappa}\int_{r\to\infty}[d^2x]_{0k}\,(h_{kj,j} - h_{jj,k}) = \frac{1}{4\kappa}\int[d^3x]_0\,(h_{kj,jk} - h_{jj,kk})}$$

where $h_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ with the flat Minkowski metric $\eta_{\mu\nu}$.

= 空間的無限遠から見た、系の全エネルギー

$\tilde{E}_{pt}$ とADM energy E_{ADM} との等価性

1PN 近似において、

$$h_{kj,jk} - h_{jj,kk} = g_{kj,jk} - g_{jj,kk} \simeq 4\nabla^2\phi + 4\kappa \overset{2}{T}{}^{00} + 2\phi_{,k}^2 - 8\left(\phi\phi_{,k}\right)_{,k},$$

より、

$$\boxed{E_{\text{ADM}}(x^0) \simeq \sum_n m_n\left(1 + \phi(\boldsymbol{x_n}, t) + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_n^2\right) + \frac{1}{2\kappa}\int d^3x\,\phi_{,k}^2 = \tilde{E}_{\text{pt}}(x^0).}$$

where

$$\int d^3x\,\partial_i(\phi\partial_i\phi) = \lim_{r\to\infty}\int r^2 d\Omega\frac{x^i}{r}\phi\phi_{,i} = -\kappa G\lim_{r\to\infty}\sum_n\frac{m_n}{r} = 0, \qquad \nabla^2\phi(\boldsymbol{x},t) = 4\pi G\overset{0}{T}{}^{00} = 4\pi G\sum_n m_n\delta^{(3)}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n).$$

$\tilde{E}_{pt}$ とADM energy E_{ADM} との等価性

PN近似の結果は漸近的平坦時空において、

弱場近似のもとで、

∵表面積分に書き直せることを用いた

$$\boxed{\tilde{E}_{pt}(x^0) = \frac{1}{4\kappa}\int [d^3x]_0 \partial_k \rho^k = \frac{1}{4\kappa}\int [d^2x]_{0k}\rho^k = E_{ADM}(x^0)}$$

Where $\rho^k \cong \left(h_{kj,j} - h_{jj,k}\right) + \mathcal{O}(h^2), \quad h_{\mu\nu} \coloneqq g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$

一致する！！！

(∵) $h \cong \mathcal{O}(r^{-1})$→無限遠で、hの高次は効かない

2nd Noether charge についてのまとめ

1st Post Newtonian 近似の下で、

$$\boxed{E_{\rm pt} = -\int_\Sigma [d^3x]\,\sqrt{-g}\,(T^0{}_0 + t^0{}_0)}$$

物理的な量を与えない

保存しない

$$\boxed{\tilde{E}_{\rm pt} = -\int_\Sigma [d^3x]\,\sqrt{-g}\,(T^0{}_0 + \tilde{t}^0{}_0)}$$

ニュートンエネルギーを再現

保存する

漸近的平坦時空ではPN 近似の全オーダーで
ADM energy と一致

Question

1. 2nd Noether chargeは
   A. どのような物理量に対応するか?
   B. 本当に保存するか？

2.我々の宇宙で、**Extra Charge（解決策2）は何か？**

物質のエネルギー運動量テンソルのみ

に関する共変かつ局所的な保存量は何を表すのか？？

Extra Charge

$T^{\mu}{}_{\nu}\nabla_{\mu}\beta^{\nu}=0$ を満たすベクトル β^{ν} が定義できれば、

エネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ に関する**局所的に共変な保存量**が存在する。

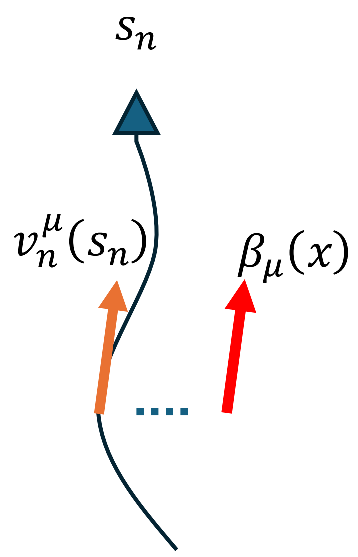
$$Q(t)=\int d^3x\sqrt{-g}T^{0}{}_{\nu}\beta^{\nu}$$

$T^{\mu}{}_{\nu}\nabla_{\mu}\beta^{\nu}=0$ **を満たすベクトル** β^{ν} **を見つけるられるか？**

ベクトル β_ν について

N個の質点系において、

エネルギー運動量テンソル $T^\mu{}_\nu$ の流れと並行になるように定義する。



$$\beta^\mu(x) \simeq [\beta_n(s_n) + \gamma_{n,\nu}(s_n)\,(x^\nu - x_n^\nu(s_n))]\, v_n^\mu(s_n) + \mathcal{O}((x - x_n)^2)$$

$$\text{at } x^\mu \simeq x_n^\mu(s_n)$$

$\nabla_\mu \beta^\nu = 0$ の解は $\boxed{\beta_n(s_n) = -\dfrac{1}{m_n} = \text{const.}}$

ここでは、PN 近似を用いる必要はないことに注意する。

N個の質点系においてExtra Charge

この時、PN 近似の全オーダーで、

Gravitational charge

$$Q = \sum_{n=1}^{N} 1 = N$$ **：粒子数**

まとめ

★ $$E_{\rm pt} = -\int_\Sigma [d^3x]\,\sqrt{-g}\,\left(T^0{}_0 + t^0{}_0\right)$$ **Not conserved !!!**

$$\boxed{\tilde{E}_{\rm pt} = -\int_\Sigma [d^3x]\,\sqrt{-g}\,\left(T^0{}_0 + \tilde{t}^0{}_0\right)}$$ **Conserved !!!**

⇒ Match with the ADM energy in the asymptotically flat space time

★ Extra charge: $\boxed{Q = \sum_{n=1}^{N} 1 = N}$ **# of particles** (Gravitational charge)

(For non–interacting massive point N-particles)

一般相対論において、系には常に二つの保存量が存在する。

Discussion

★ There always exists two conserved quantities in GR

$$\boxed{\tilde{E}_{pt}(x^0) = -\int_{x^0} [d^3x]_\mu \left(T^\mu_{\ 0} + \tilde{\boldsymbol{t}}^{\boldsymbol{\mu}}{}_{\boldsymbol{0}}\right)}$$

Conserved Energy

$$\boxed{Q = \sum_{n=1}^{N} 1 = N}$$

Gravitational charge

➡ The coexistence can constrain the dynamics in GR

Eg1.) Matters disappearing completely
due to the interaction w/ gravitational fields is prohibited.

Eg2.) A creation of matters from gravitational fields is not allowed.

Buck up

Noncovariant charge : Pseudo-tensor

$$S_G = \frac{1}{4\kappa}\int d^4x\sqrt{-g}R = \frac{1}{4\kappa}\int d^4x\left(-\sqrt{-g}G + \partial_a D^a\right)$$

where

$$G = g^{ab}\left\{\Gamma^c{}_{ad}\Gamma^d{}_{bc} - \Gamma^c{}_{ab}\Gamma^d{}_{dc}\right\} \qquad D^a = g^{ab}\Gamma^c{}_{bc} - g^{bc}\Gamma^a{}_{bc}$$

したがって、

$$S_G \to S_G - \frac{1}{4\kappa}\int d^4x\partial_a D^a = -\frac{1}{4\kappa}\int d^4x\, G$$